

离散 Lagrange 系统的 Lie 对称性^{*}

施沈阳^{1)†} 傅景礼¹⁾ 陈立群²⁾

1) 浙江理工大学物理系 杭州 310018)

2) 上海大学上海市应用数学与力学研究所 上海 200072)

(2006 年 7 月 13 日收到, 2006 年 9 月 16 日收到修改稿)

研究离散 Lagrange 系统的 Lie 对称性. 根据离散变分原理建立离散系统的运动方程, 给出离散运动方程 Lie 对称性的定义和确定方程. 举例说明结果的应用.

关键词: 离散 Lagrange 系统, 离散变分原理, Lie 对称性, 确定方程

PACC: 0320, 4610

1. 引言

离散力学是近年来分析力学的研究方向之一^[1-6], 其主要思想是利用变分原理构建离散算法, 离散原有的连续系统, 并尽可能多地保留原系统的结构和性质. 在许多情况下, 约束力学系统所具有的许多几何性质, 在离散系统中也相应地存在. 因此, 在研究约束系统的性质和数值计算时, 这些离散算法通常比一些传统的算法有更好的计算效率和长期跟踪性质.

1970 年, Cadzow^[7]在研究离散系统的最优化问题时, 提出离散变分原理, 给出了离散运动方程. Maeda^[8-11]在 20 世纪八十年代前后, 较系统地研究过位型空间中离散系统的对称性质. 与此同时, Lee^[12, 13]首次提出将时间视作一个动力学变量和空间变量一起离散化, 并给出了新的变分原理——差分变分原理. 近几年来, 郭汉英等^[14-16]给出了离散力学一类新型变分形式——差分离散变分原理, 并提出“Euler-Lagrange 上同调”的概念. 张宏彬等^[17-20]研究了非保守非完整系统、事件空间系统、Hamilton 系统的离散变分原理和第一积分.

Lie 对称性是研究力学系统对称性质的重要方法之一, 主要思想是考虑运动微分方程在无限小群变换时的一种不变性质^[21]. 梅凤翔等^[22-28]研究了各种约束力学系统的 Lie 对称性. Levi 从数学角度研

究了差分方程和微分差分方程的 Lie 对称性^[29]. 本文将 Lie 对称性方法推广至离散力学系统, 研究了离散 Lagrange 系统的 Lie 对称性, 通过力学变分原理给出离散 Lagrange 系统的 Euler-Lagrange 方程, 并给出离散系统的 Lie 对称性定义和确定方程.

2. 离散变分原理与离散运动方程

考虑一个 n 维的位型流形 Q 用坐标 q ($q = q_1, q_2, \dots, q_n$) 表示, 其切丛 TQ 用 $(q, \dot{q})$ 表示, 扩展的位型流形 $R \times Q$ 用 (t, q) 表示, 扩展的切丛 $R \times TQ$ 用 $(t, q, \dot{q})$ 表示, 则系统的 Lagrange 函数表示为 $I(t, q, \dot{q}): R \times TQ \rightarrow R$ 相应的 Hamilton 作用量为

$$S = \int_{t_1}^{t_2} I(t, q, \dot{q}) dt, \quad (1)$$

由 Hamilton 作用量原理

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} I(t, q, \dot{q}) dt = 0, \quad (2)$$

可得 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (3)$$

离散变分原理的基本假设是用 $M \times M$ 来代替扩展的切丛 $R \times TQ$, 其中 $M = R \times Q$. 在 $(R \times Q) \times (R \times Q)$ 中, 相邻两个离散点用坐标 $(t_i, t_{i+1}, q_i, q_{i+1})$ 表示, $q_i = q_{i,1}, q_{i,2}, \dots, q_{i,n}$, $i = 0, 1, \dots, N-1$, 离散 Lagrange 函数

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10672143)和河南省自然科学基金(批准号: 0511022200)资助的课题.

[†] E-mail: shzshishenyang@sina.com

$L_d(R \times Q) \times (R \times Q) \rightarrow R$ 近似表示两相邻离散点间的作用量积分,有

$$\begin{aligned} & L_d(h_i, q_i, q_{i+1}) \\ &= L_d(t_i, t_{i+1}, q_i, q_{i+1}) \\ &\approx \int_0^{h_i} L(t, q, \dot{q}) dt \\ &= \int_i^{t_{i+1}} L(t, q, \dot{q}) dt, \end{aligned} \quad (4)$$

其中

$$h_i = t_{i+1} - t_i \quad (5)$$

表示时间步长.

考虑离散点序列 $\{q_j\}_{j=0}^N$, 系统的离散 Hamilton 作用量和为

$$S_d = \sum_{i=0}^{N-1} L_d(q_i, q_{i+1}, h_i), \quad (6)$$

由离散 Hamilton 作用量和原理

$$\begin{aligned} \delta S_d &= \delta \sum_{i=0}^{N-1} L_d(q_i, q_{i+1}, h_i) \\ &= \sum_{i=0}^{N-1} [D_1 L_d(q_i, q_{i+1}, h_i) \delta q_i \\ &\quad + D_2 L_d(q_i, q_{i+1}, h_i) \delta q_{i+1}] \\ &= \sum_{k=1}^{N-1} [D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, h_{k-1}) \\ &\quad + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, h_k) \delta q_k] = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

可得离散 Euler-Lagrange 方程

$$\begin{aligned} & D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, h_{k-1}) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, h_k) = 0, \\ & (q_k = q_{k,1}, q_{k,2}, \dots, q_{k,n}, k = 1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (8)$$

在(7)式中用到离散分部积分法(重新排列求和次序)和端点条件 $\delta q_0 = \delta q_N = 0$, D_1, D_2 分别表示对第 1, 2 个自变量的导数, 方程(8)给出了系统离散坐标之间的递推关系, 称为运动差分方程, 要确定系统的运动, 还需要离散时间的递推关系, 由等时间步长条件

$$h_0 = h_1 = \dots = h_{N-1} = h = \text{const} \neq 0, \quad (9)$$

得

$$h_k - h_{k-1} = (t_{k+1} - t_k) - (t_k - t_{k-1}) = 0, \quad (10)$$

或

$$t_{k+1} - 2t_k + t_{k-1} = 0. \quad (11)$$

方程(11)给出了离散时间之间的递推关系, 称为格子方程, (8)(11)式合起来称为离散 Lagrange 系统的运动方程. 由(9)式, 方程(8)可表示为

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, h) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, h) = 0 \quad (12)$$

或

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, t_{k-1}, t_k) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, t_k, t_{k+1}) = 0. \quad (13)$$

3. 离散系统的 Lie 对称性

方程(8)(11)可分别表示为

$$F(h, q_{k-1}, q_k, q_{k+1}) = 0, \quad (14)$$

$$\alpha(t_{k-1}, t_k, t_{k+1}) = 0. \quad (15)$$

取离散时间和坐标的无限小点变换

$$\begin{aligned} t_j^* &= t_j + \epsilon \xi_0(t_j, q_j), \\ q_j^* &= q_j + \epsilon \xi(t_j, q_j), \\ (\xi &= \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \end{aligned} \quad (16)$$

ϵ 为群参数, ξ_0, ξ 表示无限小变换群生成元, 是依赖于 t_j, q_j 的序列, $j = 0, 1, \dots, N$, 并确定生成元矢量场

$$X_d^{(0)} = \xi_0(t_j, q_j) \frac{\partial}{\partial t_j} + \xi(t_j, q_j) \frac{\partial}{\partial q_j}, \quad (17)$$

矢量场 $X_d^{(0)}$ 依赖一个离散点 j , ($j = 0, 1, \dots, N$), 其二次扩展则依赖于所有相邻的三个离散点, 表示为

$$\begin{aligned} X_d^{(2)} &= \xi_0(t_{k-1}, q_{k-1}) \frac{\partial}{\partial t_{k-1}} + \xi_0(t_k, q_k) \frac{\partial}{\partial t_k} \\ &\quad + \xi_0(t_{k+1}, q_{k+1}) \frac{\partial}{\partial t_{k+1}} + \xi(t_{k-1}, q_{k-1}) \frac{\partial}{\partial q_{k-1}} \\ &\quad + \xi(t_k, q_k) \frac{\partial}{\partial q_k} + \xi(t_{k+1}, q_{k+1}) \frac{\partial}{\partial q_{k+1}} \\ &\quad (k = 1, \dots, N-1), \end{aligned} \quad (18)$$

如果方程(14)(15)满足条件

$$\begin{aligned} X_d^{(2)} \{F(h, q_{k-1}, q_k, q_{k+1})\} &= 0, \\ X_d^{(2)} \{\alpha(t_{k-1}, t_k, t_{k+1})\} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

则相应的对称性为离散 Lagrange 系统的 Lie 点对称性, 方程(19)称为 Lie 点对称的确定方程, 求解确定方程可得到无限小变换群(16)的生成元.

4. 应用

考虑力学系统的 Lagrange 函数 $L = \frac{1}{2} \dot{q}^2$ 研究其离散系统的 Lie 对称性.

在 $(R \times Q) \times (R \times Q)$ 中, 有离散 Lagrange 函数表示为

$$L_d(q_{k-1}, q_k, h) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_k - q_{k-1}}{h} \right)^2, \quad (20)$$

$$L_d(q_k, q_{k+1}, h) = \frac{1}{2} \left(\frac{q_{k+1} - q_k}{h} \right)^2, \quad (21)$$

其中

$$h = t_{k+1} - t_k, \quad (22)$$

由离散 Euler-Lagrange 方程(12)和(20)(21)得

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, h) = \frac{q_k - q_{k-1}}{h^2}, \quad (23)$$

$$D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, h) = -\frac{q_{k+1} - q_k}{h^2}, \quad (24)$$

由方程(12)可得运动差分方程为

$$D_2 L_d(q_{k-1}, q_k, h) + D_1 L_d(q_k, q_{k+1}, h) = -\frac{q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1}}{h^2} = 0 \quad (25)$$

或

$$q_{k+1} - 2q_k + q_{k-1} = 0, \quad (26)$$

格子方程为

$$t_{k+1} - 2t_k + t_{k-1} = 0, \quad (27)$$

方程(26)(27)可化为

$$q_{k+1} = 2q_k - q_{k-1}, \quad (28)$$

$$t_{k+1} = 2t_k - t_{k-1}. \quad (29)$$

运用扩展矢量场(18)于方程(26)可得

$$\xi(t_{k+1}, q_{k+1}) - 2\xi(t_k, q_k) + \xi(t_{k-1}, q_{k-1}) = 0, \quad (30)$$

(30)式对 q_{k-1} 求导 结合(28)式可得

$$-\frac{\partial \xi(t_{k+1}, q_{k+1})}{\partial q_{k+1}} \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_{k-1}} + \frac{\partial \xi(t_{k-1}, q_{k-1})}{\partial q_{k-1}} = -\frac{\partial \xi(t_{k+1}, q_{k+1})}{\partial q_{k+1}} + \frac{\partial \xi(t_{k-1}, q_{k-1})}{\partial q_{k-1}} = 0, \quad (31)$$

(31)式对 q_k 求导, 结合(28)式可得

$$-\frac{\partial^2 \xi(t_{k+1}, q_{k+1})}{\partial q_{k+1}^2} \frac{\partial q_{k+1}}{\partial q_k} = -2 \frac{\partial^2 \xi(t_{k+1}, q_{k+1})}{\partial q_{k+1}^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \xi(t_{k+1}, q_{k+1})}{\partial q_{k+1}^2} = 0, \quad (32)$$

由(32)式可得通解形式

$$\xi(t_k, q_k) = A(t_k)q_k + B(t_k), \quad (33)$$

(33)式代入(30)式, 并有(28)式可得

$$A(t_{k+1})[2q_k - q_{k-1}] + B(t_{k+1}) - 2A(t_k)q_k - 2B(t_k) + A(t_{k-1})q_{k-1} + B(t_{k-1}) = 0, \quad (34)$$

比较 q_k, q_{k-1} 前面的系数得

$$2A(t_{k+1}) - 2A(t_k) = 0, \quad (35)$$

$$-A(t_{k+1}) + A(t_{k-1}) = 0, \quad (36)$$

$$B(t_{k+1}) - 2B(t_k) + B(t_{k-1}) = 0, \quad (37)$$

由(35)(36)式可得

$$A(t_k) = C_1, \quad (38)$$

由(37)式可得

$$B(t_k) = C_2 t_k + C_3, \quad (39)$$

由(38)(39)式可得生成元

$$\xi(t_k, q_k) = C_1 q_k + C_2 t_k + C_3, \quad (40)$$

对于格子方程(27), 重复上述步骤(30)–(40)有

$$\xi_0(t_k, q_k) = C_4 q_k + C_5 t_k + C_6, \quad (41)$$

C_1 — C_6 为常数.

5. 结 论

本文将 Lie 对称性方法推广运用于离散力学系统, 并可通过求解确定方程得到离散系统 Lie 对称性无限小变换群的生成元. 本文结果有可能推广到其他类型的离散力学系统, 并有可能得到与 Lie 对称性有关的守恒量.

- [1] Lall S, West M 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 5509
- [2] Marsden J E, West M 2001 *Acta Numerica* 357
- [3] Wendlandt J M, Marsden J E 1997 *Physica D* **106** 223
- [4] Jalnapurkar S M, Leok M, Marsden J E, West M 2006 *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** 5521
- [5] Dorodnitsyn V, Kozlov R, Winternitz P 2000 *J. Math. Phys.* **41** 480
- [6] Leon M D, Diego D M D 2002 *Reps. Math. Phys.* **49** 183
- [7] Cadzow J D 1970 *Int. J. Control* **11** 393
- [8] Maeda S 1978 *Math. Japonica* **23** 231
- [9] Maeda S 1980 *Math. Japonica* **25** 405
- [10] Maeda S 1981 *Math. Japonica* **26** 85
- [11] Maeda S 1982 *Math. Japonica* **27** 345
- [12] Lee T D 1983 *Phys. Lett. B* **122** 217

- [13] Lee T D 1987 *J. Statist. Phys.* **46** 843
- [14] Guo H Y, Li Y Q, Wu K, Wang S K 2002 *Comm. Theor. Phys.* **37** 1
- [15] Guo H Y, Li Y Q, Wu K, Wang S K 2002 *Comm. Theor. Phys.* **37** 129
- [16] Guo H Y, Li Y Q, Wu K, Wang S K 2002 *Comm. Theor. Phys.* **37** 257
- [17] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 238
- [18] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 888
- [19] Zhang H B, Chen L Q, Liu R W 2005 *Chin. Phys.* **14** 1063
- [20] Liu R W, Zhang H B, Chen L Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 249
- [21] Olver P J 1993 *Applications of Lie groups to differential equations* (New York: Springer Verlag)

[22]

Mei F X 1999 *Applications of Lie groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing : Science Press) (in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用 (北京 科学出版社)]

[23]

Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing : Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京 北京理工大学出版社)]

[24]

Xu X J , Mei F X , Zhang Y F 2006 *Chin . Phys .* **15** 19

[25]

Fu J L , Chen L Q , B J H 2005 *Chin . Phys .* **14** 6

[26]

Mei F X 2003 *Acta Phys . Sin .* **52** 1048 (in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[27]

Luo S K 2003 *Acta Phys . Sin .* **52** 2941 (in Chinese)[罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[28]

Ge W K , Zhang Y 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 4985 (in Chinese)[葛伟宽、张毅 2005 物理学报 **54** 4985]

[29]

Levi D , Tremblay S , Winternitz P 2000 *J . Phys . A : Math . Gen .* **33** 8507

Lie symmetries of discrete Lagrange systems^{*}

Shi Shen-Yang^{1 2 †} Fu Jing-Li¹⁾ Chen Li-Qun²⁾

¹ *Department of Physics , Zhejiang Science and Technology University , Hangzhou 310018 , China)*

² *Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics , Shanghai University , Shanghai 200072 , China)*

(Received 13 July 2006 ; revised manuscript received 16 September 2006)

Abstract

This paper studies the Lie symmetries of discrete Lagrange systems. Based on discrete variational principle , the equations of motion for the discrete systems are established. Definition of Lie symmetry and determining equations for the discrete equations of motion are given. An example is presented to illustrate the application of the results.

Keywords : discrete Lagrange system , discrete variational principle , Lie symmetry , determining equation

PACC : 0320 , 4610

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10672143) and the Natural Science Foundation of Henan Province of China (Grant No. 0511022200).

[†] E-mail : hzshishenyang@sina.com