

非线性演化方程孤立波的同伦分析法求解*

杨红娟¹⁾ 石玉仁^{1)†} 段文山¹⁾ 吕克璞¹⁾

1) 西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070

2) 兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000

(2006 年 9 月 14 日收到, 2006 年 9 月 19 日收到修改稿)

利用同伦分析法求解了 Burgers 方程, 得到了其扭结形孤立波的近似解析解, 该解非常接近于相应的精确解. 结果表明, 同伦分析法可用来求解非线性演化方程的孤立波解. 同时, 也对所用方法进行了一定扩展, 得到了 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程的钟形孤立子解. 经过扩展后的方法能够更方便地用于求解更多非线性演化方程的高精度近似解析解.

关键词: Burgers 方程, 同伦分析法, KP 方程, 孤立波解

PACC: 0340K, 0290

1. 引 言

对非线性偏微分方程 (NPDE) 的求解, 一直是数学家和物理学家感兴趣的问题. 过去的几十年中, 数学物理研究领域内一大成就就是提出了许多求解 NPDE 的精巧数学方法, 如逆散射法、Bäcklund 变换法等. 近年来, 许多学者又提出了很多新方法, 如齐次平衡法^[1,2]、双曲函数法^[3-7]、sine-cosine 方法^[8]、Jacobi 椭圆函数展开法^[9-14]、同伦分析法^[15-26]等. 这些方法都可以借助近年发展起来的计算机代数系统得以部分甚至完全的实现, 从而极大提高了工作效率.

同伦分析法是一种新的、一般性地求解强非线性问题的解析近似方法. 它在方法上彻底抛弃了小参数假设, 从根本上克服了传统摄动法的局限性. 在逻辑上包含了其他“非摄动方法”, 从而更具一般性^[15]. 该方法被成功用于解决工程技术中的许多非线性问题, 如非线性振动^[16,17]、边界层流动^[18,19]、多孔介质中的黏性流动^[20]、非牛顿磁流体流动^[21]、深水中的非线性波^[22]、Thomas-Fermi 方程^[23]、Lane-Emden 方程^[24]、非线性演化方程的周期解^[25,26]等. 这些成功应用的例子表明, 同伦分析法具有广阔的应用领域, 对于解决很多非线性问题是行之有效的. 关于该方法的更多介绍请参看文献 [15, 18]. 但就作者

所知, 用该方法求解 NPDE 孤立波解的报道似乎很少.

本文用同伦分析法求解了 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

得到了其扭结形孤立波的近似解析解, 该解与相应的精确解吻合的非常好, 表明同伦分析法对于求解非线性演化方程的孤立波解, 仍很有效. 同时, 我们也对所用方法进行进一步扩展, 使其能够更方便的用于求解更多的非线性演化方程. 作为一例, 文中给出了 KP 方程孤立子解的近似解析解, 该解也非常接近相应的精确解.

2. 同伦分析法求解方程 (1)

2.1. 变换公式

考虑方程 (1) 的行波解

$$u(x, t) = \phi(\xi), \xi = kx - \omega t, \quad (2)$$

式中 k 为波数, ω 是圆频率, 均为待定常数. 此时 (1) 变为

$$-c\phi' + \phi\phi' - \nu k\phi'' = 0, \quad (3)$$

其中 $c = \frac{\omega}{k}$, 撇号表示 $\frac{d}{d\xi}$. 下面首先对方程 (3) 进行简化, 寻找适当的边界条件或其他限制条件, 然后再

* 国家自然科学基金(批准号: 10247008)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: shiy@nwnu.edu.cn

利用同伦分析法进行求解.

作变换

$$\phi = A + B\varphi(\xi), \tag{4}$$

其中 A, B 为待定常数.把(4)式代入方程(3),发现取 $c = A$ 可大大简化方程(此时 A 为自由常数).于是有

$$\varphi'' = B\varphi\varphi'(vk). \tag{5}$$

方程(5)两边同时对 ξ 积分一次,得

$$\varphi' = B\varphi^2(2vk) + C_1, \tag{6}$$

C_1 为积分常数.由于 k 为自由常数,故取 $k = -B(2v)$ 以简化方程.又这里寻求方程(1)的扭结形孤立波解,故 $\varphi(\xi)$ 满足下列边界条件

$$\varphi'(\pm\infty) = 0. \tag{7}$$

由(6)(7)式知 $C_1 > 0$.不失一般性,取 $C_1 = 1$.代入方程(6)后,取边界条件为

$$\varphi(-\infty) = -1, \varphi(+\infty) = +1. \tag{8}$$

由变换(4)知,总可取适当的 A 使 $\varphi(0) = 0$.于是有

$$\begin{cases} \varphi' + \varphi^2 - 1 = 0, \\ \varphi(0) = 0, \\ \varphi(\pm\infty) = \pm 1, \varphi'(\pm\infty) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

上式表明,若 φ 满足方程(9),则由变换(4)所确定的 ϕ 即为方程(3)的解,进一步可得方程(1)的解.下面用同伦分析法求解方程(9).

2.2. 同伦分析法求解过程

设方程(9)的解可表示为

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} f(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j e^{-j\xi}, & (\xi \geq 0), \\ g(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} b_j e^{j\xi}, & (\xi \leq 0). \end{cases} \tag{10}$$

其中 $a_j, b_j (j = 0, 1, \dots)$ 为展开系数.(10)式提供了同伦分析法中的解表达式(SE).

定义线性微分算符

$$L = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} + 1, & (\xi > 0), \\ \frac{\partial}{\partial \xi} - 1, & (\xi < 0). \end{cases} \tag{11}$$

为方便起见,下面先讨论 $\xi \geq 0$ 的情形,再讨论 $\xi \leq 0$ 的情形.

2.2.1. $\xi \geq 0$ 的情形

构造下面零阶形变方程:

$$\begin{aligned} (1-q)L[F(\xi, q) - f_0(\xi)] \\ = qh_1 e^{-\xi} M[F(\xi, q)], \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $q \in [0, 1]$, 为一重要可变参数; h_1 是一个非零辅助参数; $f_0(\xi) = F(\xi, 0)$, 为一已知函数(后面给出); $F(\xi, q)$ 满足

$$F(0, q) = 0, F(+\infty, q) = 1 \tag{13}$$

且

$$M[F(\xi, q)] = \frac{\partial F(\xi, q)}{\partial \xi} + F(\xi, q)^2 - 1. \tag{14}$$

由SE可知,满足限制条件(13)的 $f_0(\xi)$ 的最简单形式为

$$f_0(\xi) = F(\xi, 0) = 1 - e^{-\xi}. \tag{15}$$

从(12)(14)式可以看出,当参量 q 从 0 变到 1 时, $F(\xi, q)$ 从 $f_0(\xi)$ 变为方程(9)的解 $\varphi(\xi) (\xi \geq 0)$.若变化过程足够光滑,则 $F(\xi, q)$ 可展开为 q 的 Maclaurin 级数.如果该级数在 $q = 1$ 点收敛,则有

$$\begin{aligned} f(\xi) &= F(\xi, q)|_{q=1} \\ &= F(\xi, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0} \\ &= f_0(\xi) + \sum_{m=1}^{+\infty} f_m(\xi), \end{aligned} \tag{16}$$

式中

$$f_m(\xi) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F(\xi, q)}{\partial q^m} \Big|_{q=0}, \tag{17}$$

称为 m 阶变形导数.

将方程(12)两边同时对 q 求导 m 次,然后同除以 $m!$ 且取 $q = 0$,可得如下关于 $f_m(\xi)$ 的 m 阶变形方程:

$$\begin{aligned} L[f_m(\xi) - \chi_m f_{m-1}(\xi)] &= h_1 e^{-\xi} R_m(\xi), \\ m &\geq 1, \end{aligned} \tag{18}$$

式中

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & (m \leq 1), \\ 1, & (m > 1), \end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} R_m(\xi) &= \frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} M[F(\xi, q)]}{\partial q^{m-1}} \Big|_{q=0} \\ &= f'_{m-1}(\xi) + \sum_{n=0}^{m-1} f_n f_{m-1-n}(\xi) \\ &\quad - (1 - \chi_m). \end{aligned} \tag{20}$$

值得说明的是,方程(18)是一“递推”型方程,即当求解 $f_m(\xi)$ 时,其他函数 $f_k(\xi) (k = 0, 1, 2, \dots, m-1)$ 已在前面解出.而且方程(18)是关于 $f_m(\xi)$ 的一阶线性微分方程,很容易求解.为便于看出这一点,下面分别列出 $m = 1$ 和 $m = 2$ 的情形:

$$L[f_1(\xi)] = h_1 e^{-\xi} [f'_0(\xi) + f_0(\xi)^2 - 1] \tag{21}$$

$$\begin{aligned} & [f_2(\xi) - f_1(\xi)] \\ & = h_1 e^{-\xi} [f_1'(\xi) + 2f_0(\xi)f_1(\xi)]. \end{aligned} \quad (22)$$

由于 $f_0(\xi)$ 已知, 则可从(21)式解出 $f_1(\xi)$, 再从(22)式解出 $f_2(\xi)$, ... 依次类推.

进一步, 发现 $R_m(\xi)$ 可表示为

$$R_m(\xi) = \sum_{n=1}^{2m+1} \alpha_{m,n} e^{-n\xi} \quad (m > 1), \quad (23)$$

式中 $\alpha_{m,n}$ 是未知系数. 把(23)式代入(18)式解得

$$\begin{aligned} f_m(\xi) = & -h_1 \sum_{n=1}^{2m+1} \frac{\alpha_{m,n} e^{-(n+1)\xi}}{n} \\ & + \chi_m f_{m-1}(\xi) + C_{1,m} e^{-\xi}. \end{aligned} \quad (24)$$

式中 $C_{1,m}$ 是积分常数. 由(13)式可得

$$f_m(0) = 0 \quad (m \geq 1). \quad (25)$$

用此式可确定 $C_{1,m}$.

对于 $\alpha_{m,n}$, 可把(24)(23)式代入(20)式, 然后令等式两端 $e^{-k\xi}$ ($k = 0, 1, \dots$) 项对应系数相等来确定. 这一过程借助计算机代数系统如 Maple 或 Mathematica 等非常容易完成.

最终可得方程(9)的 M_1 阶近似解析解

$$\varphi(\xi) = f(\xi) \approx \tilde{f}(\xi) = \sum_{m=0}^{M_1} f_m(\xi) \quad (\xi \geq 0). \quad (26)$$

2.2.2. $\xi \leq 0$ 的情形

此时构造下面零阶形变方程:

$$(1-q)[\mathcal{A}(\xi, q) - g_0(\xi)] = qh_2 e^{\xi} M[\mathcal{A}(\xi, q)], \quad (27)$$

其中, $q \in [0, 1]$, 为重要可变参数; h_2 是非零辅助参数; $g_0(\xi) = G(\xi, 0)$ 为已知函数(后面给出); $\mathcal{A}(\xi, q)$ 满足

$$\mathcal{A}(0, q) = 0, \mathcal{A}(-\infty, q) = -1. \quad (28)$$

由 SE 可知, 满足限制条件(28)的 $g_0(\xi)$ 的最简单形式为

$$g_0(\xi) = \mathcal{A}(\xi, 0) = -1 + e^{\xi}. \quad (29)$$

从(27)式和 N 的定义((13)式)可以看出, 当参数 q 从 0 变到 1 时, $\mathcal{A}(\xi, q)$ 从 $g_0(\xi)$ 变为方程(9)的解 $\varphi(\xi)$ ($\xi \leq 0$). 若变化过程足够光滑, 则 $\mathcal{A}(\xi, q)$ 可展开为 q 的 Maclaurin 级数. 如果该级数在 $q = 1$ 点收敛, 则有

$$\begin{aligned} g(\xi) = & \mathcal{A}(\xi, q)|_{q=1} \\ = & \mathcal{A}(\xi, 0) + \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \mathcal{A}(\xi, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \end{aligned}$$

$$= g_0(\xi) + \sum_{m=1}^{+\infty} g_m(\xi), \quad (30)$$

式中

$$g_m(\xi) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \mathcal{A}(\xi, q)}{\partial q^m} \right|_{q=0} \quad (31)$$

为 m 阶变形导数.

将方程(27)两边同时对 q 求导 m 次, 然后同除以 $m!$ 且取 $q = 0$, 可得如下关于 $g_m(\xi)$ 的 m 阶变形方程:

$$[\mathcal{A} g_m(\xi) - \chi_m g_{m-1}(\xi)] = h_2 e^{\xi} S_m(\xi), \quad m \geq 1, \quad (32)$$

式中

$$\begin{aligned} S_m(\xi) = & \frac{1}{(m-1)!} \left. \frac{\partial^{m-1} M[\mathcal{A}(\xi, q)]}{\partial q^{m-1}} \right|_{q=0} \\ = & g_{m-1}'(\xi) + \sum_{n=0}^{m-1} g_n g_{m-1-n}(\xi) - (1 - \chi_m) \end{aligned} \quad (33)$$

式中 χ_m 由(19)式给出. 利用方程(32)可由 $g_0(\xi)$ 逐一“递推”得出 $g_m(\xi)$ ($m = 1, 2, \dots$), 此处不赘述.

进一步, 发现 $S_m(\xi)$ 可表示为

$$S_m(\xi) = \sum_{n=1}^{2m+1} \beta_{m,n} e^{n\xi} \quad (m \geq 1), \quad (34)$$

式中 $\beta_{m,n}$ 是未知系数. 把(34)式代入(32)式解得

$$\begin{aligned} g_m(\xi) = & h_2 \sum_{n=1}^{2m+1} \frac{\beta_{m,n} e^{(n+1)\xi}}{n} \\ & + \chi_m g_{m-1}(\xi) + C_{2,m} e^{\xi}. \end{aligned} \quad (35)$$

式中 $C_{2,m}$ 是积分常数. 由(28)式可得

$$g_m(0) = 0 \quad (m \geq 1). \quad (36)$$

用此式可确定 $C_{2,m}$.

对于 $\beta_{m,n}$, 可把(35)(34)式代入(33)式, 然后令等式两端 $e^{k\xi}$ ($k = 0, 1, \dots$) 项对应系数相等来确定. 这一过程可借助计算机代数系统轻松完成.

最终得方程(9)当 $\xi \leq 0$ 时的 M_2 阶近似解析解

$$\varphi(\xi) = g(\xi) \approx \tilde{g}(\xi) = \sum_{m=0}^{M_2} g_m(\xi) \quad (\xi \leq 0). \quad (37)$$

3. 解的有效性检查

在实际计算中, 用前述方法所得解为某阶的截断解, 一般是方程(9)的一近似解析解. 为了解该解的近似程度, 最直接的方法是与精确解作比较, 文献[25-26]中即采用这种方法. 但很多情况下, 给定各参数时, 要找到对应的精确解比较困难. 本文用下述

方法来验证解的有效性. 记

$$\epsilon(\xi) = \begin{cases} \tilde{f}' + \tilde{f}^2 - 1, & (\xi \geq 0), \\ \tilde{g}' + \tilde{g}^2 - 1, & (\xi \leq 0). \end{cases} \quad (38)$$

与(9)式对比可知,若 $\max|\epsilon(\xi)|$ 越小,则(26)和(37)式所表示解近似程度越高,即 $\tilde{f}(\xi) (\xi \geq 0)$ 或 $\tilde{g}(\xi) (\xi \leq 0)$ 越接近原方程(9)的精确解 $\varphi(\xi)$. 故通过观察 $\epsilon(\xi)$ 的图形,可直观了解所得近似解的准确程度.

在前面计算过程中,有重要参数 h_1 和 h_2 , 一般可通过调节其值以保证级数(16)与(30)收敛. 为简单计,这里取 $h_2 = h_1 = h$. 任给一点 ξ_0 , 则前述方法给出 $\varphi(\xi)$ 在该点的值 $\varphi(\xi_0)$ 是 h 的幂级数. 通过观察 $\varphi(\xi_0) \sim h$ 的图像(称作 h 曲线),便可以选择合适的 h 值以保证级数收敛. 图 1 为 $M_1 = M_2 = 15$ 时的 $\tilde{f}(0.01), \tilde{f}(0.5), \tilde{f}(1.0), \tilde{g}(-0.01), \tilde{g}(-0.5), \tilde{g}(-1.0) \sim h$ 曲线图. 可看出,大约在 $-2.4 < h < -0.5$ 范围内级数(16)和(30)收敛. 图 2 和图 3 分别为 $M_1 = M_2 = 15, h = -1.5$ 时 $\varphi(\xi)$ 与 $\epsilon(\xi)$ 的图像. 图 2 表明所得解为 Burgers 方程扭结形孤立波的近似解. 从图 3 可看出,此时 $\max|\epsilon(\xi)| \sim 10^{-7}$, 表明 HAM 给出的近似解析解非常接近原方程的精确解.

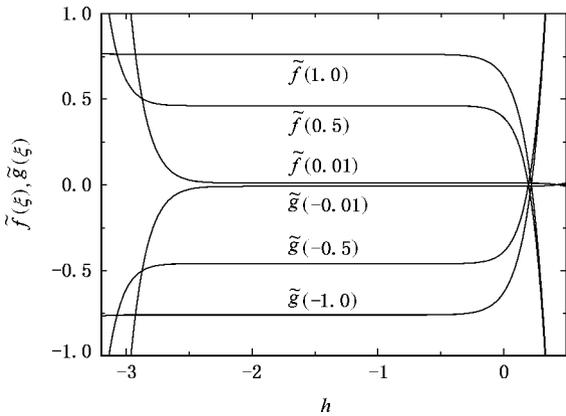


图 1 $\tilde{f}(\xi)$ 和 $\tilde{g}(\xi)$ 在不同点的 h 曲线图

4. 方法的扩展

前面用同伦分析法给出了方程(9)的近似解析解,进一步可得 Burgers 方程(1)的近似解析解. 通过 $\epsilon(\xi)$ 的图像可以看出,同伦分析法给出的解精度很高,说明同伦分析法在求解非线性演化方程孤立波解时仍然十分有效. 但我们在实践中发现,对一些非线性演化方程,上述方法不能直接应用或应用起来

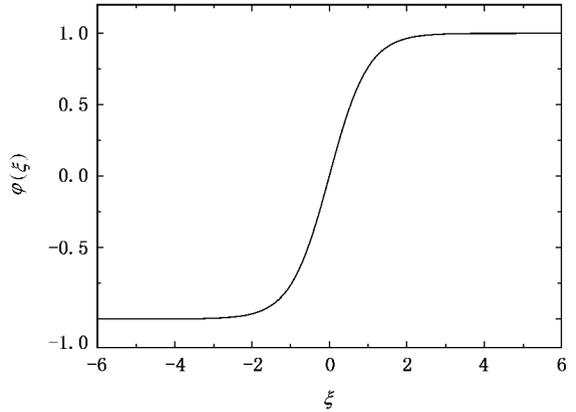


图 2 $h = -1.5$ 时 $\varphi(\xi) \sim \xi$ 图

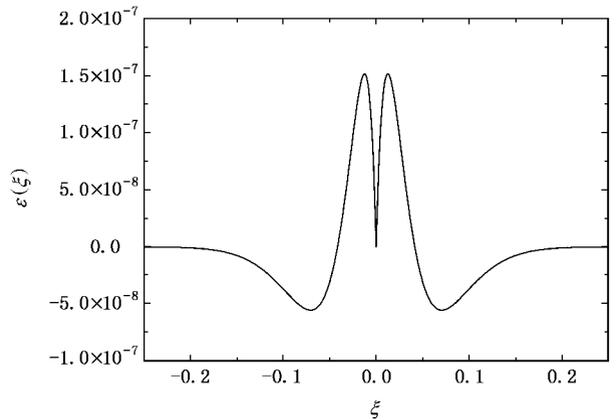


图 3 $h = -1.5$ 时 $\epsilon(\xi) \sim \xi$ 图

非常繁琐. 如对著名的 KP 方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right] + 3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (39)$$

虽然该方程存在孤立波解,但前面介绍的同伦分析法不能直接求解它的孤立波解. 下面对此方法进行一定的扩展,使其可以用于求解更多的非线性演化方程. 这里以 KP 方程为例来说明,推广到其他非线性演化方程也是很直接的.

考虑方程(39)的行波解. 作变换 $u(x, y, t) = U(\xi)$ 其中 $\xi = K_1 x + K_2 y - \Omega t$ (K_1, K_2) 为波矢量, Ω 是角频率,均待定.(需注意:这里的 ξ 与(2)式中的 ξ 不一样!)此时方程(39)变为

$$\left[-\Omega U_\xi + 6K_1 U U_\xi + K_1^3 U_{\xi\xi\xi} \right]_\xi + 3 \frac{K_2^2}{K_1} U_{\xi\xi} = 0. \quad (40)$$

设(40)式具有如下形式的解:

$$U = A_0 + A_1 \varphi + A_2 \varphi^2, \quad (41)$$

式中 A_0, A_1, A_2 为待定常数. 把(41)式代入(40)式, 并借助(9)式中第一式化简所得方程, 使得方程中只含 φ 的幂次项. 最后令 $\varphi^i (i = 0, 1, 2, \dots)$ 项的系数为零, 得到一包含所有待定常数的非线性代数方程组. 求解此代数方程组可确定前面所有待定常数, 从而得到方程(39)的解.

按上述方法并借助计算机代数系统 Mathematica, 最终解得

$$A_0 = \frac{K_1 \Omega + 8K_1^4 - 3K_2^2}{6K_1^2}, A_1 = 0, A_2 = -2K_1^2. \tag{42}$$

这里 K_1, K_2, Ω 为任意非零常数. 故方程(39)有解

$$u(x, y, t) = \frac{K_1 \Omega + 8K_1^4 - 3K_2^2}{6K_1^2} - 2K_1^2 \varphi(K_1 x + K_2 y - \Omega t). \tag{43}$$

(43)式表明若 $\varphi(\xi)$ 是方程(9)的解, 则(43)式就是方程(39)的解. 若将函数 $\varphi(\xi)$ 截断到 M 阶 ($M_1 = M_2 = M$) 则有

$$u(x, y, t) = U(\xi) \approx \tilde{U}(\xi) = \frac{K_1 \Omega + 8K_1^4 - 3K_2^2}{6K_1^2} - \begin{cases} 2K_1^2 \left[\sum_{m=0}^M f_m(\xi) \right]^2, & (\xi \geq 0), \\ 2K_1^2 \left[\sum_{m=0}^M g_m(\xi) \right]^2, & (\xi \leq 0). \end{cases}$$

($\xi = K_1 x + K_2 y - \Omega t$). (44)

$f_m(\xi)$ 和 $g_m(\xi)$ 在前面由同伦分析法给出. (44)式为方程(39)的一个近似解析解. 图4显示了取参数 $M = 15, K_1 = 0.2, K_2 = 0.1, \Omega = 2, h = -1$ 时的近似解. 可看出, 该解为 KP 方程钟形孤立子的近似解析解. 为验证该解的有效性, 把 $U(\xi) = \tilde{U}(\xi)$ 代入方程(40)左端, 并记其值为 $\delta(\xi)$. 则 $\max |\delta(\xi)|$ 越小, 说明所得解越接近于方程(40)的精确解. 图5为 $M = 15, K_1 = 0.2, K_2 = 0.1, \Omega = 2, h = -1$ 时 $\delta(\xi)$ 的图像. 从图5可以看出, $\max |\delta(\xi)| \sim 10^{-7}$, 说明用以上方法所得 KP 方程的近似解非常接近其精确解.

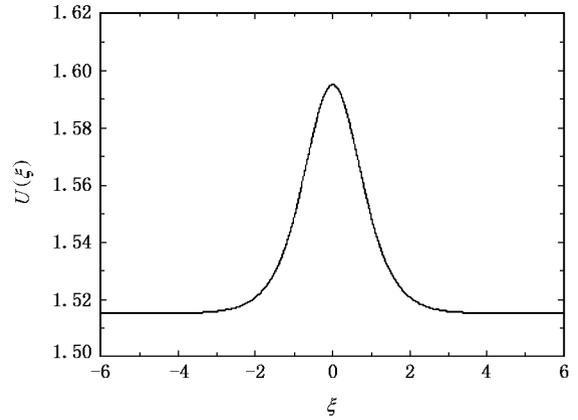


图4 $K_1 = 0.2, K_2 = 0.1, \Omega = 2, M = 15, h = -1$ 时的 $U(\xi) \sim \xi$ 图

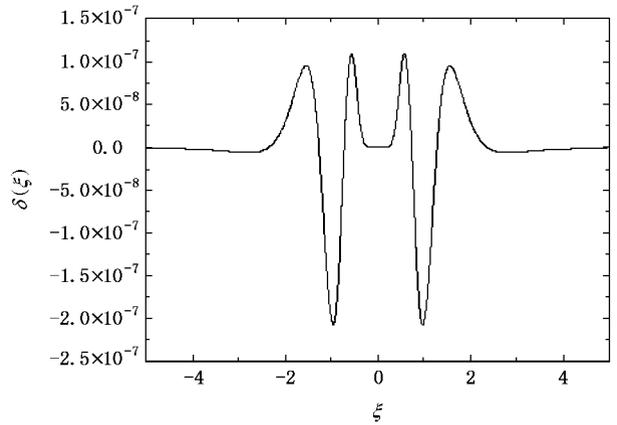


图5 $K_1 = 0.2, K_2 = 0.1, \Omega = 2, M = 15, h = -1$ 时的 $\delta(\xi) \sim \xi$ 图

5. 结 论

利用同伦分析法求解了 Burgers 方程, 得到了其扭结形孤立波的近似解析解, 该解与原方程的精确解吻合的非常好. 结果说明, 同伦分析法可用来求解非线性演化方程的孤立波解. 同时, 我们也对所用方法进行了一定的扩展. 经过扩展后的方法能够求解更多非线性演化方程的高精度近似解析解. 相信, 在非线性演化方程的求解过程中及各类非线性问题研究领域内, 同伦分析法会发挥其重要的作用.

[1] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169
 [2] Wang M L, Zhou Y B, Li Z B 1996 *Phys. Lett. A* **216** 67
 [3] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Sci. in China Ser. A* **30** 1103 (in Chinese) 张桂成, 李志斌, 段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]
 [4] Lü K P, Shi Y R, Duan W S, Zhao J B 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) 吕克璞, 石玉仁, 段文山, 赵金保 2001 物理学报 **50** 2074]
 [5] Shi Y R, Lü K P, Duan W S, Hong X R, Zhao J B, Yang H J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 267 (in Chinese) 石玉仁, 吕克璞, 段文

- 山、洪学仁、赵金保、杨红娟 2003 物理学报 **52** 267]
- [6] Huang D J , Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese)
[黄定江、张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]
- [7] Zhu J M 2005 *Chin. Phys.* **14** 1290
- [8] Yan C T 1996 *Phys. Lett. A* **224** 77
- [9] Liu S K , Fu Z T , Liu S D , Zhao Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2068
(in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2001 物理学报 **50** 2068]
- [10] Liu S K , Fu Z T , Liu S D , Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 10 (in Chinese) [刘式适、傅遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10]
- [11] Liu S D , Fu Z T , Liu S K , Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718
(in Chinese) [刘式达、傅遵涛、刘式适、赵 强 2002 物理学报 **51** 718]
- [12] Shi Y R , Guo P , Lü K P , Duan W S 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3265 (in Chinese) [石玉仁、郭 鹏、吕克璞、段文山 2004 物理学报 **53** 3265]
- [13] Zhao X Q , Zhi H Y , Zhang H Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2202
- [14] Zhu J M , Ma Z Y , Fang J P , Zheng C L , Zhang J F 2005 *Chin. Phys.* **13** 798
- [15] Liao S J , Chen C , Xu H 2006 *Beyond Perturbation : Introduction to the Homotopy Analysis Method* (Beijing Science Press) (in Chinese)
[廖世俊、陈 晨、徐 航 2006 超越摄动 : 同伦分析方法导论 (北京 科学出版社)]
- [16] Liao S J 2003 *Int. J. Non-Linear Mech.* **38** 1173
- [17] Liao S J , Pop I 2004 *Int. J. Non-Linear Mech.* **39** 271
- [18] Liao S J 2004 *Appl. Math. Comput.* **147** 499
- [19] Liao S J 2002 *Int. J. Non-Linear Mech.* **37** 1
- [20] Ayub M , Rasheed A , Hayat T 2003 *Int. J. Eng. Sci.* **41** 2091
- [21] Liao S J 2003 *J. Fluid Mech.* **488** 189
- [22] Liao S J , Cheung K F 2003 *J. Eng. Math.* **45** 105
- [23] Liao S J 2003 *Appl. Math. Comput.* **144** 495
- [24] Liao S J 2003 *Appl. Math. Comput.* **142** 1
- [25] Wang C , Wu Y Y , Wu W 2004 *Wave Motion* **41** 329
- [26] Shi Y R , Xu X J , Wu Z X , Wang Y H , Yang H J , Duan W S , Lü K P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1555 (in Chinese) [石玉仁、许新建、吴枝喜、汪映海、杨红娟、段文山、吴克璞 2006 物理学报 **55** 1555]

Solving solitary wave solutions of nonlinear evolution equations with the homotopy analysis method^{*}

Yang Hong-Juan¹⁾ Shi Yu-Ren^{1)†} Duan Wen-Shan¹⁾ Lü Ke-Pu¹⁾

¹⁾ College of Physics and Electronic Engineering , Northwest Normal University , Lanzhou 730070 , China)

²⁾ Institute of Theoretical Physics , Lanzhou University , Lanzhou 730000 , China)

(Received 14 September 2006 ; revised manuscript received 19 September 2006)

Abstract

We solved the Burgers equation by using the homotopy analysis method (HAM) and obtained its approximate kink solitary wave solutions. The solutions agree very well with the exact solutions. The results indicate that the HAM is valid for finding the solitary wave solutions of a class of nonlinear evolution equations. We also made some efforts to extend the HAM. As an example , we got the bell-like solitary wave solutions of KP equation by this approach. Our extended method can be used to find the approximate solitary wave solutions for more nonlinear evolution equations in an easy way.

Keywords : Burgers equation , homotopy analysis method , KP equation , solitary wave solution

PACC : 0340K , 0290

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10247008).

[†] Corresponding author. E-mail : shiy@nwnu.edu.cn