

# 凝聚体中亮孤子和暗孤子的交替演化\*

何章明<sup>1)</sup> 王登龙<sup>1)†</sup>

1) 湘潭大学物理系和低维材料及其应用技术教育部重点实验室, 湘潭 411105)

2) 南京航空航天大学理学院, 南京 210016)

(2006 年 10 月 12 日收到, 2006 年 10 月 20 日收到修改稿)

利用 Darboux 变换法, 解析地研究了局限于恒定不变外部势阱中的玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性动力学性质. 结果发现凝聚体中的粒子之间的相互作用强度对其非线性动力学特征有重要的影响. 当玻色子之间的相互排斥作用相当强时, 凝聚体中只会存在亮孤子; 而玻色子之间的相互排斥作用相当弱(小于临界值)时, 凝聚体中会出现亮孤子和暗孤子交替演化.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, Darboux 变换, 孤子

PACC: 0530J, 0290, 1110L

## 1. 引 言

实验观察玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)中的暗孤子<sup>[1,2]</sup>、亮孤子<sup>[3,4]</sup>和四波混沌<sup>[5]</sup>等一系列非线性现象的成功促进了非线性原子光学的快速发展, 也进一步引起了人们对玻色-爱因斯坦凝聚体进行更广泛的研究<sup>[6-8]</sup>. 研究表明, BEC 局限在谐振外部势阱中, 粒子之间为排斥作用会产生暗孤子<sup>[1,2]</sup>; 而粒子之间为吸引作用时则出现亮孤子<sup>[3,4]</sup>. 然而 BEC 处于双曲函数的外部势阱时, 即使粒子之间为吸引作用也能够形成暗孤子, 粒子之间为排斥作用也能出现亮孤子<sup>[9]</sup>. 若处于谐振外部势阱的 BEC 粒子之间的相互作用相当弱时, 孤子在传播过程中传播速度会变慢且波形变宽<sup>[10]</sup>; 当粒子之间的排斥相互作用随时间呈周期性变化时 BEC 中的亮孤子具有动力学稳定性<sup>[11]</sup>. 人们期望 BEC 中的孤子能如光纤中的光孤子一样能稳定地传播, 那么 BEC 这一新的物质波的具体应用就为期不远了. 因此, 人们致力于寻求 BEC 中孤立子能够稳定传播的条件. 实现这种稳定的可能性之一是 BEC 局限于不同的外部势阱中. 值得一提的是 Lye<sup>[12]</sup>等人在 2005 年论证了处于任意形式的外部势阱中的玻色子都可以形成 BEC, 且不同的外部势阱中的 BEC 将出现新的性质. 在此,

我们研究局限于恒定不变外部势阱的玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性动力学行为.

## 2. BEC 处于一个恒定不变的外部势阱中的解析解

众所周知, 烟状(cigar-shaped)BEC 的动力学行为可以通过下列无量纲化之后的 Gross-Pitaevskii (GP)方程来描述<sup>[13-15]</sup>,

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = - \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - 2g |\psi(x, t)|^2 \psi(x, t) - V(x) \psi(x, t), \quad (1)$$

其中  $\psi(x, t)$  是凝聚体的波函数,  $g$  为玻色子之间相互作用,  $V(x)$  代表 BEC 所处的外部势阱. 与文献<sup>[15]</sup>一样, 令  $V(x) = E$  ( $E$  是任意恒定的常数). 设方程(1)的试探解为

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{g}} \exp(i\sqrt{2}x + iEt). \quad (2)$$

利用 AKNS(Ablowitz-Kaup-Newell-Segur)方法, 就可得出方程(1)的 lax 对. 根据(1)式, 我们构造如下 lax 对

$$\Phi = U\Phi, \Phi = V\Phi, \Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T, \quad (3)$$

其中  $U = \lambda J + P$ ,  $V = 2i\lambda^2 J + 2i\lambda P + M$ .  $\lambda$  是谱参数, 且  $U, V$  满足

\* 国家自然科学基金(批准号:10674113), 教育部新世纪人才基金(批准号:NCEF-06-0707), 江苏省博士后科研基金(批准号:0601043B), 湖南省自然科学基金(批准号:06JJ50006), 湖南省教育厅项目(批准号:04A058)和湘潭大学跨学科交叉研究项目资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: dllwang@xtu.edu.cn

$$U_t - V_x + [U, V] = 0.$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{g}Q \\ -\sqrt{g}\bar{Q} & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} ig|Q|^2 & i\sqrt{g}Q_x \\ i\sqrt{g}\bar{Q}_x & -ig|Q|^2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

这里,  $Q = \psi \exp(-iEt)$ . 从而方程(1)的 Darboux 变换为

$$p_1 = p + \mathcal{X}(\lambda + \bar{\lambda}) \frac{\bar{\sigma}}{1 + |\sigma|^2}, \quad (5)$$

其中  $\sigma = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  是方程(3)在  $\lambda = \lambda_0$  条件下的解,  $p$  是  $\text{lax}$  对的解. 把(2)式和由(3)式求得的  $\sigma$  代入(5)式中可得到(1)式的孤子解为

$$\psi = \left[ \sqrt{\frac{1}{g}} \exp(iEt) + 2 \frac{(a^2 - 1) \cos \varphi + ia \sqrt{a^2 - 1} \sin \varphi}{a^2 \cosh \theta - a \sqrt{a^2 - 1} \sinh \theta - \cos \varphi} - 2 \right] \times \exp(i\sqrt{2}x), \quad (6)$$

其中  $\theta = 2\sqrt{a^2 - 1}(x - 2\sqrt{2}t)$ ,  $\varphi = 4\sqrt{a^2 - 1}$ ,  $a$  是任意实数.

### 3. 数值模拟 BEC 的孤子行为

当凝聚体中粒子之间的相互排斥作用相当强时, 通过数值模拟(6)式得出其非线性解如图1所示. 可以看出, 当玻色子之间的排斥作用比较强( $g=1$ )的时候, 凝聚体中只有亮孤子存在, 且亮孤子的幅度随时间呈周期性的变化. 图2示出了凝聚体受到粒子之间弱排斥作用( $g=0.05$ )所具有的非线性现象. 由图2可知, 凝聚体出现亮、暗孤子随着时间交替演化.

Burger<sup>[1]</sup>等首次在烟状的玻色子之间为相互排斥作用的<sup>87</sup>Rb原子 BEC 中观察的暗孤子随着时间的增加分裂为两个和两个以上的暗孤子; Carr 等<sup>[16]</sup>论述了孤子的分裂会导致最开始那个孤子中原子数目的减少. 这在 BEC 的应用方面是人们不愿意看到的现象. 通过数值计算方程(6)发现: 当 BEC 处于恒定的外部势阱时, 即使玻色子之间的相互排斥作用减少, 孤子并不会分裂而是产生新的孤子, 出现亮、暗孤子的相互演化. 这主要由于恒定的外部势阱所引起的. 为此, 选取凝聚体随时间而变化不会出现孤子的凝聚体基底点( $x = -4$ )处作为参考点, 在图3

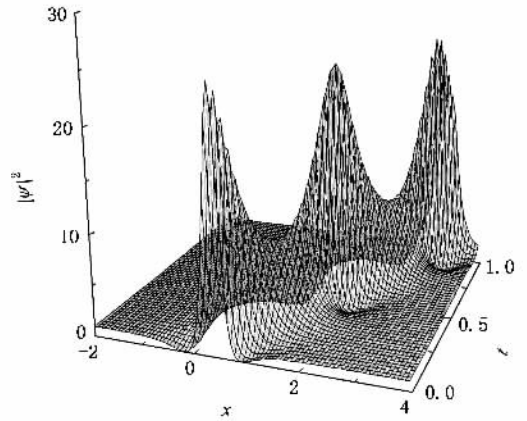


图1 玻色子之间的相互排斥作用较强( $g=1$ )时凝聚体中亮孤子的动力学行为 其余参数是  $a=2, E=0.5$

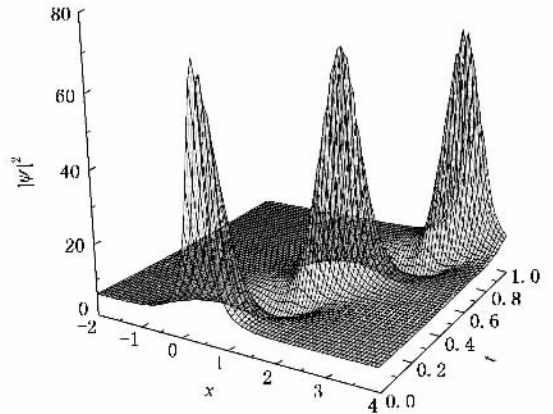


图2 玻色子相互排斥作用较弱( $g=0.05$ )时凝聚体中的非线性现象 其余参数同图1一致

和图4中分别绘出玻色子之间的相互排斥作用和不同恒定常数的外部势阱对基底概率密度的影响. 由图3可得出: 即使 BEC 处于一个恒定不变的外部势阱( $E=0.5$ ), 当玻色子之间的相互作用与外部势阱相差不甚远时, 基底中玻色子的概率密度会随时间变化产生一个周期性的振荡. 而且随着玻色子之间的排斥作用变小, 基底中玻色子的概率密度的振荡周期保持不变, 但幅度增加. 这说明粒子间的排斥作用减少时, 形成孤子的玻色子和基底中的玻色子交换的数量在增加. 由图4可知, BEC 处于恒定较大值的外部势阱中, 其基底中玻色子的概率密度振荡的周期就越小. 因此, 在玻色子之间的相互作用(排斥作用)和恒定常数的外部势阱的共同影响下, 基底中玻色子的概率密度产生了一个周期性的振荡, 它的振荡振幅与玻色子相互作用强度有关, 它的振荡频率与恒定不变的外部势阱大小有关. 当粒子之间的

相互作用相当强时,形成孤子的玻色子和基底中的玻色子交换数目对整个孤立子的贡献相当微弱,因而当粒子之间的相互作用相当强时,只能发现凝聚体出现亮孤子(即图1中出现的现象);而当粒子之间的相互作用较弱时,形成孤子的玻色子和基底中的玻色子交换数目对整个孤立子的贡献就显得相当重要.此时,凝聚体中会出现亮、暗孤子之间交替的演化.

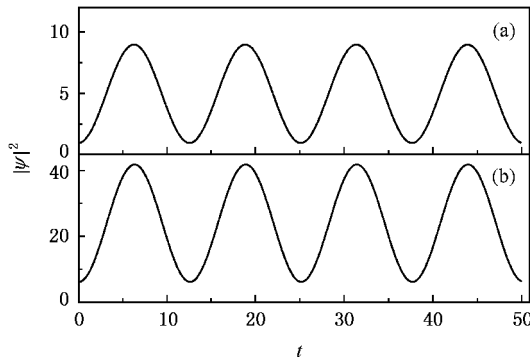


图3  $x = -4$  处玻色子之间的相互排斥作用为 (a)  $g = 1$ ; (b)  $g = 0.05$  时概率密度随时间演化 其余参数与图1一致

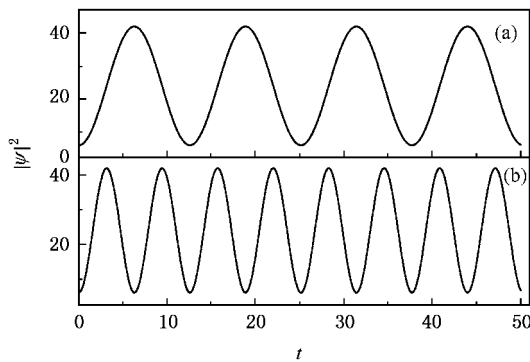


图4  $x = -4$  处玻色子的相互排斥作用弱 ( $g = 0.5$ ) 时概率密度随时间演化 (a)  $E = 0.5$  (b)  $E = 1.0$ . 其余参数与图1一致

此外,数值模拟  $t = 1/4$  时暗孤子谷底处 ( $x \approx 1.1$ ) 和基底 ( $x = -4$ ) 两处的粒子的概率密度随  $g$  的变化情况(如图5所示).当  $|\psi|_{x=1.1}^2 < |\psi|_{x=-4}^2$  时,说明凝聚体中会存在暗孤子;当  $|\psi|_{x=1.1}^2 > |\psi|_{x=-4}^2$  时,凝聚体中有亮孤子存在.在此基础上,我们给出了外部势阱强度  $E$  与粒子相互作用强度  $g$  的临界值如图6.从图中可以得到,外部势阱的强度  $E$  发生变化时,粒子相互作用强度  $g$  的临界值也随之改变.当  $E$  从零开始增大时,  $g$  的临界值也随之变大.但是当  $E$  增大到一定值后,  $g$  的临界值反而随之变

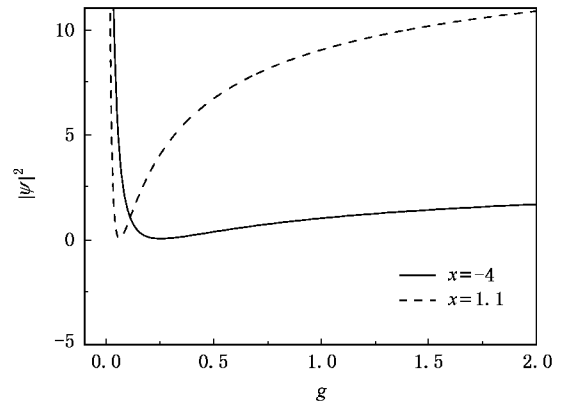


图5 在  $E = 1/2, t = 1/4$  时,  $x = -4$  和  $x = 1.1$  处的粒子的概率密度随  $g$  的变化关系

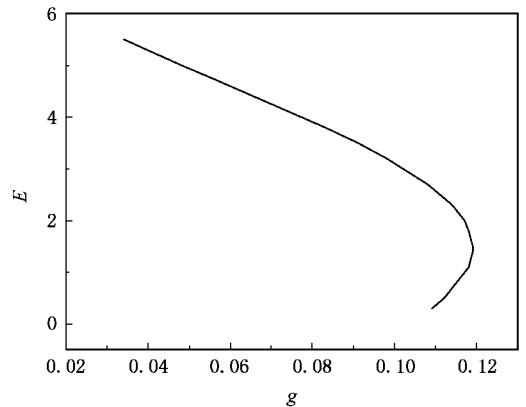


图6 在  $t = 1/4$  时,  $g$  的临界值随  $E$  的变化关系

小.这是因为随着  $E$  的改变,亮孤子和暗孤子存在的周期也发生了改变.

### 4. 结 论

总之,我们利用 Darboux 变换法解析地求出了处于恒定外部势阱中一维玻色-爱因斯坦凝聚体的精确解.数字计算发现,当粒子之间的相互作用相当强时,凝聚体中只会出现亮孤子的动力学稳定性;改变玻色子之间的相互作用强度,凝聚体中的亮孤子并不会出现孤子的分裂现象;当玻色子之间相互作用小于临界值时,凝聚体中产生了亮、暗孤子之间的交替演化现象.这种交替演化现象是由于玻色子之间的相互作用和 BEC 所处的外部恒定势阱所决定的.由于粒子之间的相互作用强度和外部势阱强度的共同影响使得基底中玻色子的概率密度产生了一个周期性的振荡(这说明形成孤子中的玻色子和基

底中的玻色子发生了交换), 振荡振幅与玻色子之间相互作用强度有关, 振荡频率与恒定常数的外部势阱有关, 当振幅达到一定值时, 即孤子与基底交换的

粒子总数达到一定值时, 就会出现亮、暗孤子之间的相互演化.

- [ 1 ] Burger S , Bongs K , Dettmer S , Ertmer W , Sengstock K 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 5198
- [ 2 ] Denschlag J , Simsarian J E , Feder D L , Clark C W , Collins L A , Deng L , Hagley E W , Helmerson K , Reinhardt W P , Rolston S L , Schneider B I , Phillips W D 2000 *Science* **287** 97
- [ 3 ] Strecker K E , Partridge G B , Truscott A G , Hulet R G 2002 *Nature* **417** 150
- [ 4 ] Khaykovich L , Schreck F , Ferrari G , Bourdel T , Cubizolles J , Carr L D , Castin Y , Salomon C 2002 *Science* **296** 1290
- [ 5 ] Deng L , Hagley E J W , Trippenbach M , Band Y , Julienne P S , Simsarian J E , Helmerson K , Rolston S L , Phillips W D 1999 *Nature* . **398** 218
- [ 6 ] Yu X C , Ye Y T , Cheng L 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 551 ( in Chinese ) [ 余学才、叶玉堂、程琳 2006 物理学报 **55** 551 ]
- [ 7 ] Wang G F , Fu L B , Zhao H , Liu J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5003 ( in Chinese ) [ 王冠芳、傅立斌、赵鸿、刘杰 2005 物理学报 **54** 5003 ]
- [ 8 ] Qian F , Huang H B , Qi G X , Shen C K 2006 *Chin. Phys.* **15** 1577
- [ 9 ] Wang S J , Jia C L , Zhao D , Luo H G , An J H 2003 *Phys. Rev. A* **68** 015601
- [ 10 ] Ao S M , Yan J R 2006 *Chin. Phys.* **15** 0296
- [ 11 ] Liang Z X , Zhang Z D , Liu W M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 050402
- [ 12 ] Lye J E , Fallani L , Modugno M , Wiersma D S , Fort C , Inguscio M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 070401
- [ 13 ] Brazhnyi V A , Konotop V V 2004 *Mod. Phys. Lett. B* **18** 627
- [ 14 ] Huang G X , Velarde M G , Makarov V A 2001 *Phys. Rev. A* **64** 013617
- [ 15 ] Rapedius K , Withaut D , Korsch H J 2006 *Phys. Rev. A* **73** 033608
- [ 16 ] Carr L D , Castin Y 2002 *Phys. Rev. A* **66** 063602

## Evolution between bright and dark soliton of condensates<sup>\*</sup>

He Zhang-Ming<sup>1)</sup> Wang Deng-Long<sup>1,2)†</sup>

<sup>1)</sup> *Physics Department and Key Laboratory of Low Dimensional Materials & Application Technology of Ministry of Education, Xiangtan University, Xiangtan 411105, China*

<sup>2)</sup> *College of Science, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China*

( Received 12 October 2006 ; revised manuscript received 20 October 2006 )

### Abstract

By using Darboux transformation method, we study analytically the nonlinear dynamics properties of Bose-Einstein condensates trapped in an stable external potential. It is shown that the strength of inter-atomic interaction condensate has an important effect on its nonlinear dynamics properties. When atom-atom repulsive interaction of condensate is strong enough, there only exhibits bright soliton. While the inter-atomic repulsive interaction is less than a critical value, the alternative evolution phenomenon between bright and dark soliton appears.

**Keywords** : Bose-Einstein condensates, Darboux transformation, soliton

**PACC** : 0530J, 0290, 1110L

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10674113 ), the Program of New Century Talents Foundation from the Ministry of Education of China ( Grant No. NCEF-06-0707 ), the Postdoctoral Science Foundation of Jiangsu Province, China ( Grant No. 0601043B ), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China ( Grant No. 06JJ50006 ), the Scientific Research Foundation Bureau of Hunan Province, China ( Grant No. 04A058 ) and the Cross-science Foundation of Xiangtan University.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: idlwang@xtu.edu.cn