

基于模糊模型的不同结构的混沌系统同步^{*}

杨东升^{1)†} 张化光¹⁾ 李爱平¹⁾ 孟子怡¹⁾

1) 东北大学信息科学与工程学院, 沈阳 110004)

2) 东北大学教育部暨辽宁省流程工业综合自动化重点实验室, 沈阳 110004)

(2006 年 9 月 15 日收到, 2006 年 10 月 17 日收到修改稿)

针对不同结构的混沌系统广义同步问题, 提出了基于 T-S 模糊模型的 H_∞ 控制方法, 利用 Lyapunov 方法和线性矩阵不等式技术, 给出了误差闭环系统稳定的充分条件. 仿真结果表明了方法的有效性.

关键词: H_∞ 控制, 广义同步, 混沌系统, 模糊控制

PACC: 0545

1. 引言

自从 1990 年 Pecora 和 Carroll^[1,2] 提出了混沌同步的原理, 并在电路中得以实现以来, 作为保密通讯的关键技术, 混沌同步技术已经得到了广泛的发展. 目前人们已经提出了各种各样的混沌同步方法, 如脉冲混沌同步方法、自适应混沌同步方法、变结构混沌同步方法和激活同步等方法^[3-7]. 上述文献讨论的多是两个参数相同的非线性系统的完全同步. 而在实际实验中发现存在四种不同的混沌同步类型, 它们分别是: 完全同步、相同步、滞后同步及广义同步. 文献 [8-10] 研究了不同结构混沌系统的同步问题, 实现了两个不同结构混沌系统的同步控制. 但是他们只是研究了某些具体混沌系统的同步问题, 并且事先需要已知混沌系统的参数, 这限制了他们在实际系统中的应用.

1995 年, Rulkov 等^[11] 推广了混沌同步的概念, 称之为广义同步. 广义混沌同步问题是在自相似结构同步问题的基础上发展起来的, 它研究的是具有不同结构, 不同初始状态的两个混沌系统的状态同步问题. 完全同步可看作是广义同步的特例. 由于完全同步发射的加密信号是变量信号, 而广义同步发射的加密信号是函数信号, 因此广义同步保密通信要比一般意义下的混沌同步保密通信具有更强的抗破译能力, 进而广义同步比完全同步的应用领域更

为广泛.

基于 T-S 模型的模糊控制已被证明是复杂非线性系统的有效控制方法, 能够对非线性系统实现很好的逼近. 而 H_∞ 性能下的系统控制器设计能够保证在模型不确定或存在其他外界扰动的条件下, 使系统仍能保持预期的性能. 也就是说模型的摄动和模型的不确定性不影响系统的稳定性和其他动态性能. 这样设计的控制器更符合实际应用情况. 本文针对不确定模型的混沌系统, 提出了基于 T-S 模糊模型的广义同步的 H_∞ 性能控制同步方法, 所提到方法与文献 [8-10] 相比, 具有更广泛的应用范围, 且同步控制器结构简单, 适用于大多数混沌系统的同步控制.

2. 主要结果

广义混沌同步问题研究的是具有不同结构、不同初始状态的两个混沌系统的状态同步问题. 对于 T-S 模糊模型表示的混沌系统, 结构的不同表现在它们的前件变量不同, 以及后件参数不同.

考虑由 T-S 模型模糊描述的混沌驱动系统, 第 i 条规则可进行如下描述:

R_i : 如果 $z_1(t)$ 是 M_{i1} 与 $z_g(t)$ 是 M_{ig} , 则

$$\dot{x}_d(t) = A_i x_d(t),$$

其中 $x_d \in R^n$ 是驱动系统的状态向量; $z(t) = (z_1(t), \dots, z_g(t))^T$ 是前件变量; $M_j (j = 1, \dots, r_g)$ 是

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60325311, 60534010, 60572070, 60521003)和教育部长江学者及创新团队计划资助的课题.

[†] E-mail: ds_yang@126.com

模糊集, l 是模糊规则的数量; A_i 是适当维数的矩阵, $i = 1 \dots l$.

采用单点模糊化, 模糊推理和加权平均, 则驱动系统可以表示成如下形式:

$$\dot{x}_d(t) = \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) A_i x_d(t), \quad (1)$$

其中 $\mu_i(z(t)) = \frac{m_i(z(t))}{\sum_{i=1}^l m_i(z(t))}$, $\mu_i(z(t)) \geq 0$, $\sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) = 1$, $m_i(z(t)) = \prod_{j=1}^g M_{ij}$, $\sum_{i=1}^l m_i(z(t)) > 0$, $m_i(z(t)) > 0, i = 1 \dots l$.

响应系统的第 i 条规则可进行如下描述:

R_i : 如果 $\hat{z}_1(t)$ 是 F_{i1} 与 $\dots \hat{z}_g(t)$ 是 F_{ig} . 则

$$\dot{x}_r(t) = \hat{A}_i x_r(t) + u(t),$$

其中 $x_r \in R^n$ 是驱动系统的状态向量, $\hat{z}(t) = [\hat{z}_1(t) \dots \hat{z}_g(t)]^T$ 是前件变量; $F_{ij} (i = 1 \dots l, j = 1 \dots g)$ 是模糊集; l 是模糊规则的数量; $u(t)$ 是控制输入矢量.

这里假设驱动系统和响应系统具有相同的规则数, 但是它们的结构是不同的, 即 $A_i \neq \hat{A}_i$. 控制目标是为响应系统设计一个控制器 $u(t)$, 使得由驱动系统和响应系统构成的误差闭环系统达到稳定.

与驱动系统相似, 响应系统的模糊全局描述可以写成如下形式:

$$\dot{x}_r(t) = \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) \hat{A}_i x_r(t) + u(t). \quad (2)$$

定义驱动系统和响应系统的同步误差:

$$e = x_d - x_r, \quad (3)$$

上式意味着当时间 $t \rightarrow \infty$ 时, 如果同步误差 $e(t) \rightarrow 0$, 则驱动系统与响应系统实现同步.

根据 (1) 式和 (2) 式, 误差系统可以写成:

$$\dot{e}(t) = \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) A_i x_d(t) - \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) \hat{A}_i x_r(t) - u(t). \quad (4)$$

本文的目的是设计一个同步控制器镇定误差动态系统 (4). 控制器选取如下形式:

$$u(t) = u_d(t) + u_r(t), \quad (5)$$

控制器 $u_d(t)$ 的第 i 条规则可进行如下描述:

R_i : 如果 $z_1(t)$ 是 M_{i1} 与 $\dots z_g(t)$ 是 M_{ig} . 则

$$u_d(t) = K_i x_d(t), i = 1 \dots l.$$

则驱动部分控制器 $u_d(t)$ 可表示为

$$u_d(t) = \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) K_i x_d(t), i = 1 \dots l. \quad (6)$$

控制器 $u_r(t)$ 第 i 条规则可进行如下描述:

R_i : 如果 $\hat{z}_1(t)$ 是 M_{i1} 与 $\dots \hat{z}_g(t)$ 是 M_{ig} . 则

$$u_r(t) = -H_i x_r(t), i = 1 \dots l.$$

则响应部分控制器 $u_r(t)$ 可表示为

$$u_r(t) = - \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) H_i x_r(t), \quad i = 1 \dots l. \quad (7)$$

结合 (4) 式—(7) 式, 误差系统 (4) 可以写成如下形式:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) A_i x_d(t) - \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) \hat{A}_i x_r(t) - u(t) \\ &= \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) A_i x_d(t) - \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) \hat{A}_i x_r(t) \\ &\quad - \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) K_i x_d(t) + \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) H_i x_r(t) \\ &= \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) (A_i - K_i) x_d(t) - \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) (\hat{A}_i - H_i) x_r(t) \\ &= \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) (A_i - K_i) e(t) + \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) (\hat{A}_i - H_i) e(t) \\ &\quad + \omega(t), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\omega(t) = \sum_{i=1}^l \mu_i(z(t)) (A_i - K_i) x_d(t) - \sum_{i=1}^l h_i(\hat{z}(t)) (\hat{A}_i - H_i) x_d(t)$.

对同步误差系统 (8) 定义如下 H_∞ 性能指标:

$$\int_0^{t_f} (2e^T(t) e(t)) dt \leq \gamma^2 \int_0^{t_f} \omega^T(t) \omega(t) dt, \quad (9)$$

其中 $\gamma^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$, γ_1 和 γ_2 是干扰抑制水平, t_f 是终止时间.

定理 1 考虑同步误差系统 (8), 对于给定的常数 $\gamma_1 > 0$ 和 $\gamma_2 > 0$, 如果下列线性矩阵不等式组

$$\begin{bmatrix} P A_i + A_i^T P - X_i^T - X_i + I & 0.5 P \\ 0.5 P & -\gamma_i^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

且

$$\begin{bmatrix} P A_i + A_i^T P - X_i^T - X_i + I & 0.5 P \\ 0.5 P & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (11)$$

存在正定对称矩阵 $P > 0$, 适维矩阵 X_i 和 $Y_i (i = 1, 2, \dots, l)$, 则当取 $K_i = P^{-1} X_i, H_i = X^{-1} Y_i$ 时, 存在控制器 $u(t) = u_d(t) + u_r(t)$ 使得误差系统 (8) 满足如下 H_∞ 性能:

$$\int_0^{t_f} e^T(t) e(t) dt < \frac{1}{2} \left\{ e^T(0) P e(0) + \frac{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}{2} \int_0^{t_f} \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) dt \right\}, \quad (12)$$

其中 I 为适当维数的单位矩阵.

证明 选取具有如下形式的李雅普诺夫函数:

$$V(t) = e^T(t) P e(t), \quad (13)$$

其中 $P > 0$. 则 (13) 式沿着同步误差系统 (8) 的轨迹求导可得,

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= e^T(t) P \dot{e}(t) + e^T(t) P \dot{e}(t) \\ &= e^T(t) (\Xi + \Pi)^T P e(t) + e^T(t) P (\Xi + \Pi) e(t) \\ &\quad + \tilde{w}^T(t) P \dot{e}(t) + e^T(t) P \tilde{w}(t) \\ &= \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} (\Xi + \Pi)^T P + P(\Xi + \Pi) & P \\ & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Xi^T P + P \Xi + \Pi^T P + P \Pi & P \\ & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix}, \quad (14) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \Xi &= \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}(t)) (A_i - K_i), \\ \Pi &= \sum_{i=1}^r h_i(\hat{\mathbf{z}}(t)) (\hat{A}_i - H_i), \end{aligned}$$

由 (12) 式, 定义

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{t_f} [2e^T(t) e(t) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) + \dot{V}(t)] dt - \int_0^{t_f} \dot{V}(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} [2e^T(t) e(t) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t) + \dot{V}(t)] dt - V(t_f) + V(0) \\ &\leq \int_0^{t_f} \left\{ \sum_{i=1}^r \mu_i(\mathbf{x}(t)) \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & 0.5P \\ 0.5P & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^r h_i(\hat{\mathbf{z}}(t)) \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Theta & 0.5P \\ 0.5P & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e(t) \\ \tilde{w}(t) \end{bmatrix} \right\} dt + V(0). \quad (15) \end{aligned}$$

其中

$$\Omega = (A_i - K_i)^T P + P(A_i - K_i) + I,$$

$$\Theta = (\hat{A}_i - H_i)^T P + P(\hat{A}_i - H_i) + I.$$

若矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \Omega & 0.5P \\ 0.5P & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix} < 0 \text{ 且 } \begin{bmatrix} \Theta & 0.5P \\ 0.5P & -\gamma_2^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

成立时, 有 $J = \int_0^{t_f} (2e^T(t) e(t) - (\gamma_1^2 + \gamma_2^2) \tilde{w}^T(t) \tilde{w}(t)) dt \leq V(0)$, 由 Schur 引理, 上述不等式等价于

$$\begin{aligned} &(A_i - K_i)^T P + P(A_i - K_i) \\ &+ I + \frac{1}{4\gamma_1^2} P^T P < 0, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(\hat{A}_i - H_i)^T P + P(\hat{A}_i - H_i) \\ &+ I + \frac{1}{4\gamma_2^2} P^T P < 0, \quad (17) \end{aligned}$$

令 $X_i = P K_i, Y_i = P H_i$, 定理 1 得证. 证明完毕.

3. 仿真分析

考虑一个 Lorenz 系统 (见图 1(a))

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = \beta x_1 - x_1 x_3 + x_2, \\ \dot{x}_3 = x_1 x_2 - \gamma x_3, \end{cases}$$

其中 α, β 和 γ 是系统的参数, 当 $\alpha = 10, \beta = 28, \gamma = 8/3$ 时系统是混沌的. 假设 $x \in [-d, d]$, 且 $d > 0$, 则系统的模糊形式可以表达如下:

R_1 : 如果 x_1 是 M_1 , 则 $\dot{x}_d(t) = A_1 x_d(t)$;

R_2 : 如果 x_1 是 M_2 , 则 $\dot{x}_d(t) = A_2 x_d(t)$.

取隶属函数如下:

$$\mu_1(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x_1}{d} \right),$$

$$\mu_2(\mathbf{x}(t)) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x_1}{d} \right),$$

从 Lorenz 系统的相图可知 $|x_1| \leq 15$, 进而可取 $d = 15$, 同时

$$A_1 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & -20 \\ 0 & 20 & -8/3 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 28 & -1 & 20 \\ 0 & -20 & -8/3 \end{bmatrix},$$

考虑一个 Rössler 系统 (见图 1(b))

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = (\hat{x}_2 - \hat{x}_1), \\ \dot{\hat{x}}_2 = \hat{x}_1 + \alpha \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_3 = \alpha - \hat{x}_3(\hat{x}_1 - \beta), \end{cases}$$

其中 α 和 β 是系统的参数,当 $\alpha = 0.34, \beta = 0.4$ 时系统的是混沌系统.假设 $\hat{x} \in [-d, d]$ 且 $d > 0$,则以 Rössler 系统作为响应系统的模糊形式可以表达如下:

R_1 如果 x_{r1} 是 M_1 .则 $\dot{x}_r(t) = \hat{A}_1 x_r(t) + u(t)$;

R_2 如果 x_{r1} 是 M_2 .则 $\dot{x}_r(t) = \hat{A}_2 x_r(t) + u(t)$.

取隶属函数:

$$h_1(\hat{x}) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{c - \hat{x}_1}{d} \right),$$

$$h_2(\hat{x}) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c - \hat{x}_1}{d} \right).$$

从 Rössler 系统的相图可知 $|\hat{x}_1| \leq 10$,进而可取 $d = 10, c = 4.5$ 同时

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.34 & 0 \\ 0.4 & 0 & -10 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.34 & 0 \\ 0.4 & 0 & 10 \end{bmatrix},$$

根据定理 1 取 $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$,可得如下正定矩阵 P 和控制增益矩阵 K_1, K_2 和 H_1, H_2 ,使得模糊驱动系统和响应系统同步,即响应系统的状态跟踪上驱动系统的状态,如图 2—4 所示.

$$P = \begin{bmatrix} 0.0095 & 0.0042 & -0.0001 \\ 0.0042 & 0.0123 & -0.0000 \\ -0.0001 & -0.0000 & 0.0118 \end{bmatrix},$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 43.5845 & 29.2671 & 2.5300 \\ 29.2671 & 63.8164 & 0.4673 \\ 3.6120 & -0.9146 & 57.2752 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 43.5845 & 29.1433 & -2.9593 \\ 28.9685 & 63.8164 & -0.4723 \\ -3.9233 & 0.7499 & 57.2652 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 47.7281 & 17.3487 & -0.4820 \\ 16.7423 & 60.9297 & 0.0688 \\ -0.6613 & 0.2128 & 53.4794 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 47.7341 & 17.3411 & -0.4737 \\ 16.734 & 60.9317 & 0.0555 \\ -0.5678 & 0.1705 & 64.4309 \end{bmatrix},$$

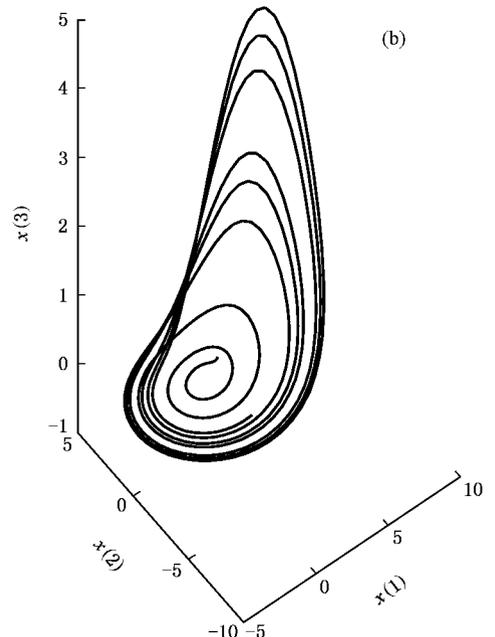
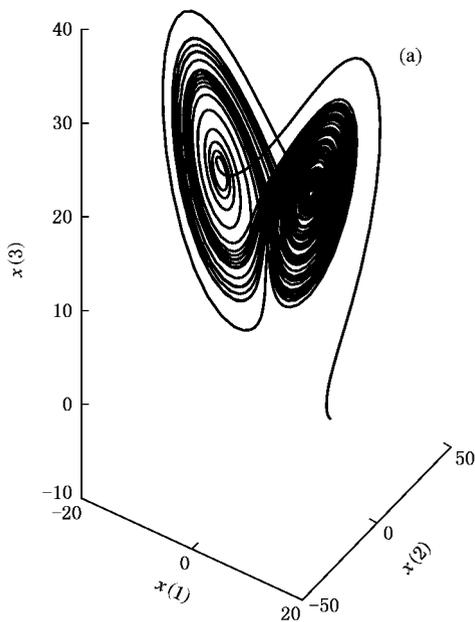


图 1 Lorenz 系统 (a) 和 Rössler 系统 (b) 的相图



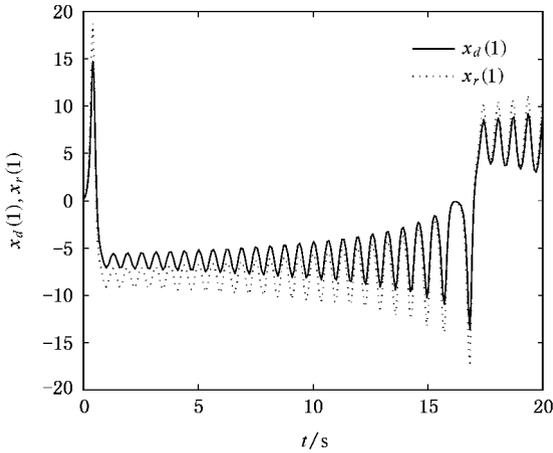
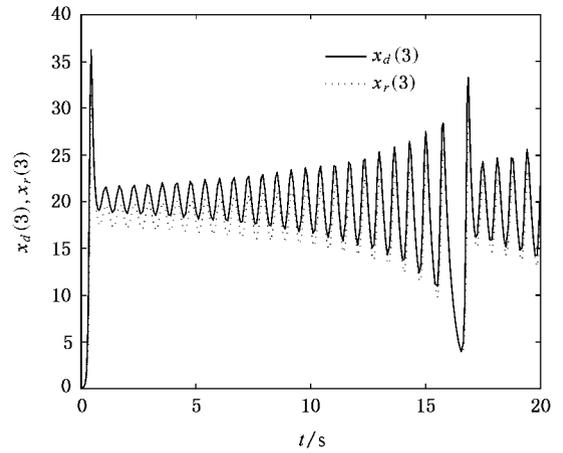
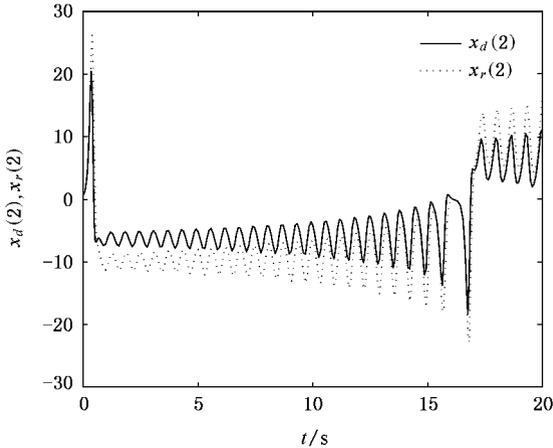
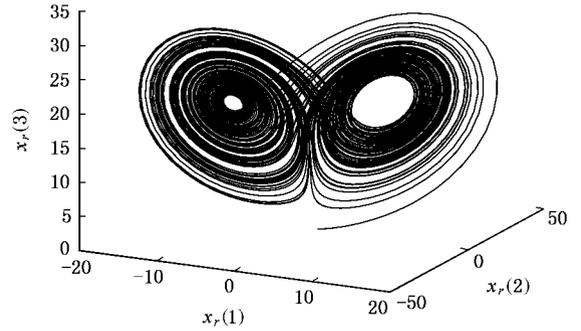
图2 驱动系统状态 $x_d(1)$ 和响应系统状态 $x_r(1)$ 图4 驱动系统状态 $x_d(3)$ 和响应系统状态 $x_r(3)$ 图3 驱动系统状态 $x_d(2)$ 和响应系统状态 $x_r(2)$ 

图5 响应系统的三维相图

4. 结 论

论文采用了基于 H_∞ 控制方法实现了具有不同结构的两个混沌系统同步控制. 首先用 T-S 模糊来

描述混沌系统. 在此基础上设计了一个模糊误差控制器, 驱动两个结构不同的混沌系统达到同步. 所设计的控制器结构简单, 且该方法适用于很多混沌系统的同步控制. 本文给出了两个混沌系统实现同步的判据. 仿真试验表明了方法的有效性.

- [1] Pecora L M, Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
 [2] Pecora L M, Carroll T L 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374
 [3] Sun J T 2004 *Math. Comp. Simul.* **6** 669
 [4] Kim K H, Park C W, Kim E, Park M 2005 *Phys. Lett. A* **334** 295
 [5] Liu F C, Wang J, Shi M 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2707 (in Chinese) [刘福才、王娟、石森 2002 物理学报 **51** 2707]
 [6] Zhang H, Ma X K, Yang Y, Xu C D 2005 *Chin. Phys.* **14** 86

- [7] Li F, Hu A H, Xu Z Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 507
 [8] Li F, Hu A H, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 590 (in Chinese) [李芳、胡爱花、徐振源 2002 物理学报 **55** 590]
 [9] Gao T G, Chen Z Q, Yuan Z Z 2005 *Chin. Phys.* **14** 2421
 [10] Li J F, Lin H, Li N 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3992 (in Chinese) [李建芬、林辉、李农 2006 物理学报 **55** 3992]
 [11] Sanchez E N, Perez J P, Martinez M, Chen G 2002 *Latin Amer. Appl. Res* **32** 111

- [12] Yang T , Chua. L O 1999 *Int. J. Bifurcation Chaos* **9** 215 53 4528
[13] Abarbanel. H D I , Rulkov N F , Sushchik M M 1996 *Phys. Rev. E*

Generalized synchronization of two non-identical chaotic systems based on fuzzy model^{*}

Yang Dong-Sheng^{1,2)†} Zhang Hua-Guang¹⁾ Li Ai-Ping¹⁾ Meng Zi-Yi¹⁾

¹ *School of Information Science and Engineering , Northeastern University , Shenyang 110004 , China*

² *Key Laboratory of Process Industry Automation of Ministry of Education , Northeastern University , Shenyang 110004 , China*

(Received 15 September 2006 ; revised manuscript received 17 October 2006)

Abstract

This paper deals with the problem of generalized synchronization via T-S fuzzy models for two non-identical chaotic systems. A H_∞ control method based on T-S fuzzy model is presented. A sufficient condition for synchronization of two non-identical systems is obtained based on Lyapunov functional method and matrix inequality techniques. Finally, an example is provided to demonstrate the effectiveness of the proposed method.

Keywords : H_∞ control , generalized synchronization , chaotic system , fuzzy control

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60325311 , 60534010 , 60572070 , 60521003) and the Program for changjiang Scholars and Innovative Research Team in University , China.

[†] E-mail : ds_yang@126.com