

# 利用白噪声实现混沌系统 线性广义同步的研究\*

胡爱花<sup>†</sup> 徐振源

(江南大学理学院, 无锡 214122)

(2006 年 9 月 15 日收到, 2006 年 10 月 1 日收到修改稿)

给定一个混沌驱动系统和同步函数, 通过服从白噪声分布的单向耦合, 构造出混沌响应系统, 使之与驱动系统达到线性广义同步化. 研究发现, 利用满足一定条件的白噪声可以实现驱动-响应系统的线性广义同步. 以 Chua 电路为例进行了数值仿真, 其结果与理论计算相一致.

关键词: 混沌系统, 广义同步, 白噪声

PACC: 0545, 0540

## 1. 引 言

近年来, 混沌同步的应用领域从物理学迅速扩展到了生物学、化学、医学、电子学、信息科学和保密通信等领域<sup>[1-7]</sup>. 混沌同步主要有四类<sup>[8]</sup>: 完全同步、相同步、滞后同步以及广义同步. 其中, 广义同步尤为重要. 实验上发现的同步现象大部分都属于广义同步, 比如神经元的电活动之间就是广义同步; 另一方面理论上复杂系统具有的共性是斑图的涌现, 而斑图反映的是空间有关联的结构, 这种关联结构的动力学机理就是其基本单元之间的广义同步. 因此研究广义同步有着深刻的理论意义及潜在的应用价值.

噪声是无处不在的一种随机信号, 混沌系统在同步化过程中不可避免地会受到外部或内在噪声的影响. 于是噪声与同步化之间的关系成为了研究热点. 如文献<sup>[9-11]</sup>研究了由噪声引起混沌系统完全同步化的问题, 表明具有一定强度的噪声可以实现完全同步, 并提出, 噪声还可以增强两个弱耦合混沌系统的完全同步. 而对于噪声与广义同步关系的研究目前还很不完善.

给定一个混沌驱动系统, 通过服从白噪声分布的单向耦合, 构造出响应系统, 从而实现驱动-响应

系统的线性广义同步是本文研究的主要内容. 文献<sup>[12, 13]</sup>提出的构造方法都是基于以常系数为参数的耦合. 由于噪声所具有的特点, 选取服从噪声分布的耦合更具实际意义.

## 2. 线性广义同步化系统的构造

### 2.1. 广义同步化理论

考虑如下两个系统:

驱动系统  $X$

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

响应系统  $Y$

$$\dot{y} = g(y) + u(x, y), \quad (2)$$

其中, 状态变量  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ ,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbf{R}^m$ ; 函数  $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ ,  $g(y) = (g_1(y), g_2(y), \dots, g_m(y))^T$ ;  $u(x, y)$  代表耦合项.

定义 1 广义同步化<sup>[14]</sup>

已知两个动力系统  $X$  和  $Y$ , 如果存在流形  $M = \{(X, Y), Y = \Phi(X)\}$ , 它包含至少一个 Milnor 吸引子, 则称  $X$  和  $Y$  是广义同步化,  $\Phi$  是广义同步函数.

本文中, 我们将研究一种特殊的同步化形式——线性广义同步化, 即  $\Phi(x)$  取如下形式:

\* 国家自然科学基金(批准号: 10372054)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: aihuahu@126.com

$$\Phi(x) = Px + Q, \quad (3)$$

其中  $P \in R^{n \times n}$ ,  $Q \in R^{n \times 1}$ ,  $P, Q$  均为常数阵且  $P$  可逆.

如果系统 (1)(2) 达到线性广义同步, 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t) - Px(t) - Q\| = 0, \quad (4)$$

其中,  $\|\cdot\|$  代表欧几里德范数.

由于混沌系统对初始条件的敏感依赖性, 在不加任何控制项的前提下, 两个混沌系统很难达到同步化. 我们的目的是在给定一个混沌驱动系统  $X$  后, 构造出混沌响应系统  $Y$ , 使得 (4) 式成立, 从而实现混沌系统的线性广义同步化.

## 2.2. 响应系统构造方法

将已知的驱动系统 (1) 改写成更一般的形式:

$$\dot{x} = Ax + \varphi(x), \quad (5)$$

其中  $A \in R^{n \times n}$  是常数矩阵,  $\varphi(x)$  代表非线性函数矩阵.

假设 1  $\varphi(x) - \varphi(y) = M_{x,y}(x - y)$ ,  $M_{x,y}$  是一个依赖于  $x, y$  的有界矩阵. 事实上, 对于我们已知的很多混沌系统, 上述假设 1 都是成立的<sup>[15]</sup>.

在假设 1 成立条件下, 构造  $g(y)$  和  $u(x, y)$  如下:

$$\begin{aligned} g(y) &= PAP^{-1}(y - Q) + P\varphi(P^{-1}(y - Q)), \\ u(x, y) &= H[e(t)]\dot{W}(t), \end{aligned} \quad (6)$$

其中  $e(t)$  为驱动-响应系统间的误差向量, 即  $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T = y - Px - Q$ ; 称函数矩阵  $H[e(t)] = (h_1, h_2, \dots, h_l): R^n \rightarrow R^{n \times l}$  为噪声耦合强度函数, 当  $H(0) \equiv 0$  时满足线性增长条件和局部 Lipschitz 连续;  $W(t) = [W_1(t), W_2(t), \dots, W_l(t)]^T$  代表  $l$  维的布朗运动, 因此  $\dot{W}(t) = [\eta_1(t), \eta_2(t), \dots, \eta_l(t)]^T$  是  $l$  维的白噪声向量, 满足  $E[\eta_i(t)] = 0$ ,  $E[\eta_i(t)\eta_j(t')] = \delta_{ij}\delta(t - t')$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, l$ .

特别地, 令  $H[e(t)] = ke(t)$  ( $k$  为正常数),  $\dot{W}(t) = \eta(t)$ , 此时噪声耦合强度函数是线性的, 白噪声是一维的, 耦合强度  $k\eta(t)$  代表强度为  $k$  的白噪声. 这与实际情况相符, 因为在现实物理环境中, 系统的耦合强度往往会受到外部或内在噪声的干扰, 从而发生变化, 甚至有的耦合形式本身就服从某种噪声分布.

定理 1 若以下条件得到满足, 则响应系统 (6) 和驱动系统 (5) 将以概率 1 实现线性广义同步化:

1) 存在半正定对称矩阵  $R_i$ 、正定对称矩阵  $U$  和非负数  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, l$ ), 使得噪声耦合强度函数  $H[e(t)]$  满足

$$\begin{aligned} h_i^T(e)h_i(e) &\leq e^T R_i e, \\ e^T U h_i(e) &\geq s_i e^T e. \end{aligned} \quad (7)$$

2) 存在正数  $\epsilon$ , 满足  $\sum_{i=1}^l s_i^2 > \xi \mu_{\max}^2 / \mu_{\min}$ . 其中  $\mu_{\max}$  和  $\mu_{\min}$  分别代表矩阵  $U$  的最大和最小特征根;  $\xi$  为如下矩阵的最大特征根:

$$\begin{aligned} &\frac{(PAP^{-1})^T U + U(PAP^{-1})}{2} + \frac{\epsilon}{2} U^2 \\ &+ \frac{1}{2\epsilon} (PM_{x,y} P^{-1})(PM_{x,y} P^{-1}) \\ &+ \frac{\mu_{\max}}{2} \sum_{i=1}^l R_i. \end{aligned} \quad (8)$$

下面我们将基于随机微分方程性质证明定理 1, 证明过程类似于确定性系统中的 Lyapunov 方法.

引入如下函数:

$$V(e) = \frac{1}{2} \ln e^T U e = \ln \|U^{1/2} e\|, \quad (9)$$

其中  $U$  为正定对称矩阵.

沿着误差系统  $e = y - Px - Q$  解的轨线, 对 (9) 式采用 Itô 积分, 得到

$$\begin{aligned} V[e(t)] &= V[e(t_0)] + \int_{t_0}^t \{ DV[e(s)] \\ &\times \{ PAP^{-1} e(s) + P\varphi(P^{-1}(y(s) - Q)) \\ &- P\varphi(x(s)) \} \\ &+ \frac{1}{2} \text{trace} \{ H^T[e(s)] D^2 V[e(s)] \\ &\times H[e(s)] \} \} ds + M(t), \end{aligned} \quad (10)$$

其中, 函数  $V$  的导数为

$$\begin{aligned} DV(e) &= e^T U / \|U^{1/2} e\|^2, \\ D^2 V(e) &= U / \|U^{1/2} e\|^2 \\ &- \chi(U e e^T U) / \|U^{1/2} e\|^4, \end{aligned} \quad (11)$$

连续鞅  $M(t)$  为

$$\begin{aligned} M(t) &= \int_{t_0}^t DV[e(s)] H[e(s)] dW(s) \\ &= \int_{t_0}^t \frac{e^T(s) U H[e(s)]}{\|U^{1/2} e(s)\|^2} dW(s), \end{aligned} \quad (12)$$

满足  $M(t_0) = 0$ , 且二阶变差为  $[M(t), M(t)] =$

$$\int_{t_0}^t \frac{\{ e^T(s) U H[e(s)] \}^2}{\|U^{1/2} e(s)\|^4} ds.$$

根据不等式组 (7) 和向量基本不等式, 可得存

在常数  $\nu > 0$ , 对于所有  $t \geq t_0$  [ $M(t), M(t)$ ]  $\leq \nu(t - t_0)$  成立. 则由强大数定律可得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = 0 \quad (13)$$

成立.

另外, 由假设 1 和向量基本不等式, 任意  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\begin{aligned} & e^T U [P\varphi(P^{-1}(y(s) - Q)) \\ & - P\varphi(x(s))] \\ & \leq e^T \left[ \frac{\varepsilon}{2} U^2 + \frac{1}{2\varepsilon} (PM_{x,y} P^{-1})^T \right. \\ & \left. \times (PM_{x,y} P^{-1}) \right] e. \end{aligned} \quad (14)$$

令矩阵  $T = PM_{x,y} P^{-1}$ , 将不等式组 (7) 和不等式 (14) 代入式 (10) 得到

$$\begin{aligned} \frac{U[e(t)]}{t} & \leq \frac{U[e(t_0)]}{t} + \frac{1}{t} \int_{t_0}^t e^T(s) \\ & \times \left[ \frac{(PAP^{-1})^T U + U(PAP^{-1})}{2} \right. \\ & \left. + \frac{\varepsilon}{2} U^2 + \frac{1}{2\varepsilon} T^T T + \frac{\mu_{\max}}{2} \sum_{i=1}^l R_i \right] \\ & \times \frac{e(s)}{\|U^{1/2} e(s)\|^2} ds \\ & - \frac{1}{t} \int_{t_0}^t \frac{\sum_{i=1}^l \{e^T(s) U h_i[e(s)]\}^2}{\|U^{1/2} e(s)\|^4} ds + \frac{M(t)}{t} \\ & \leq \frac{U[e(t_0)]}{t} + \frac{t - t_0}{t} \\ & \times \left( \frac{\xi}{\mu_{\min}} - \sum_{i=1}^l \frac{s_i^2}{\mu_{\max}^2} \right) + \frac{M(t)}{t}, \end{aligned} \quad (15)$$

其中  $\mu_{\max}, \mu_{\min}$  和  $\xi$  定义同定理 1.

根据 (13) 式,  $t \geq t_0$ , 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{U[e(t)]}{t} \leq - \sum_{i=1}^l \frac{s_i^2}{\mu_{\max}^2} + \frac{\xi}{\mu_{\min}}, \quad (16)$$

成立.

因此, 可以得到

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|e(t)\|}{t} \leq - \sum_{i=1}^l \frac{s_i^2}{\mu_{\max}^2} + \frac{\xi}{\mu_{\min}} \quad (17)$$

成立. 那么, 如果  $\sum_{i=1}^l s_i^2 > \xi \mu_{\max}^2 / \mu_{\min}$ , 则误差向量的范数  $\|e(t)\|$  将以概率 1 指数收敛于 0, 定理 1 成立.

不失一般性, 可选择  $U$  为单位矩阵  $I$ , 令  $\varepsilon = 1$ ,  $H[e(t)]$  为线性情形, 即  $h_i(e) = k_i e$ , 那么  $\mu_{\min} =$

$\mu_{\max} = 1, R_i = k_i^2 I$ , 则驱动-响应系统以概率 1 线性广义同步的条件为

$$\sum_{i=1}^l s_i^2 > 2\hat{\xi}, \quad (18)$$

其中,  $\hat{\xi}$  是矩阵  $[(PAP^{-1})^T + PAP^{-1} + I + T^T T] / 2$  的最大特征根.

### 3. 数值仿真

以 Chua 电路<sup>[16]</sup>作为驱动系统  $X$ , 有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha(-x_1 + x_2 - f(x_1)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2, \end{cases} \quad (19)$$

其中  $f(x_1) = bx_1 + \frac{1}{2}(a - b)(|x_1 + 1| - |x_1 - 1|)$ ,  $\alpha, \beta, a, b$  均为系统参数.

当  $\alpha = 10.0, \beta = 14.87, a = -1.27, b = -0.68$  时, Chua 电路有双卷波混沌吸引子.

由 (19) 式, 可得

$$A = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix},$$

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} -\alpha f(x_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在文献 [17] 中, 陈关荣等已经证明如下结论成立

$$f(x_1) - f(y_1) = k_{x,y}(x_1 - y_1), \quad (20)$$

其中  $a \leq k_{x,y} \leq b$ .

因此我们可以得到

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \varphi(y) & = \begin{bmatrix} -\alpha f(x_1) + \alpha f(y_1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} -\alpha k_{x,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} (x - y) \\ & = M_{x,y}(x - y), \end{aligned} \quad (21)$$

假设 1 成立.

$$\text{定义 } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

为简单起见, 选取  $\dot{W}(t) = \eta(t)$  (此时  $l = 1$ ),  $H[e(t)] = (h_1) = (\rho e_1, \rho e_2, \rho e_3)^T$ ; 其中  $\rho$  为正常

数  $e_1 = y_1 - x_1, e_2 = y_2 + x_2, e_3 = y_3 - x_3$ . 根据 2.2 节 构造响应系统  $y$  如下：

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = \alpha(-y_1 - y_2 - f(y_1)) \\ \quad + \rho\eta(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_2 = -y_1 - y_2 - y_3 \\ \quad + \rho\eta(y_2 + x_2), \\ \dot{y}_3 = \beta y_2 + \rho\eta(y_3 - x_3). \end{cases} \quad (22)$$

令  $\rho = 13$ , 系统初始值分别为  $x(0) = (0.1, 0.1, 0.1), y(0) = (0.2, 0.2, 0.2)$ ; 经计算发现

$\hat{\xi} < 71.5687$  (18) 式成立. 应用 Euler-Maruyama 数值计算方法<sup>[18]</sup>, 得到仿真结果如图 1 所示.

从图 1 可以看出所构造出的响应系统 (22) 和驱动系统 (19) 较好地实现了线性广义同步. 值得说明的是, 2.2 节所提出的方法不仅仅适用于 Chua 电路, 对于常见的混沌系统, 如 Lorenz 系统、Chen 系统<sup>[19]</sup>, 该方法同样适用; 而对于切换混沌系统<sup>[20, 21]</sup>, 只要存在满足假设 1 的矩阵  $M_{x,y}$ , 也可以利用白噪声达到线性广义同步.

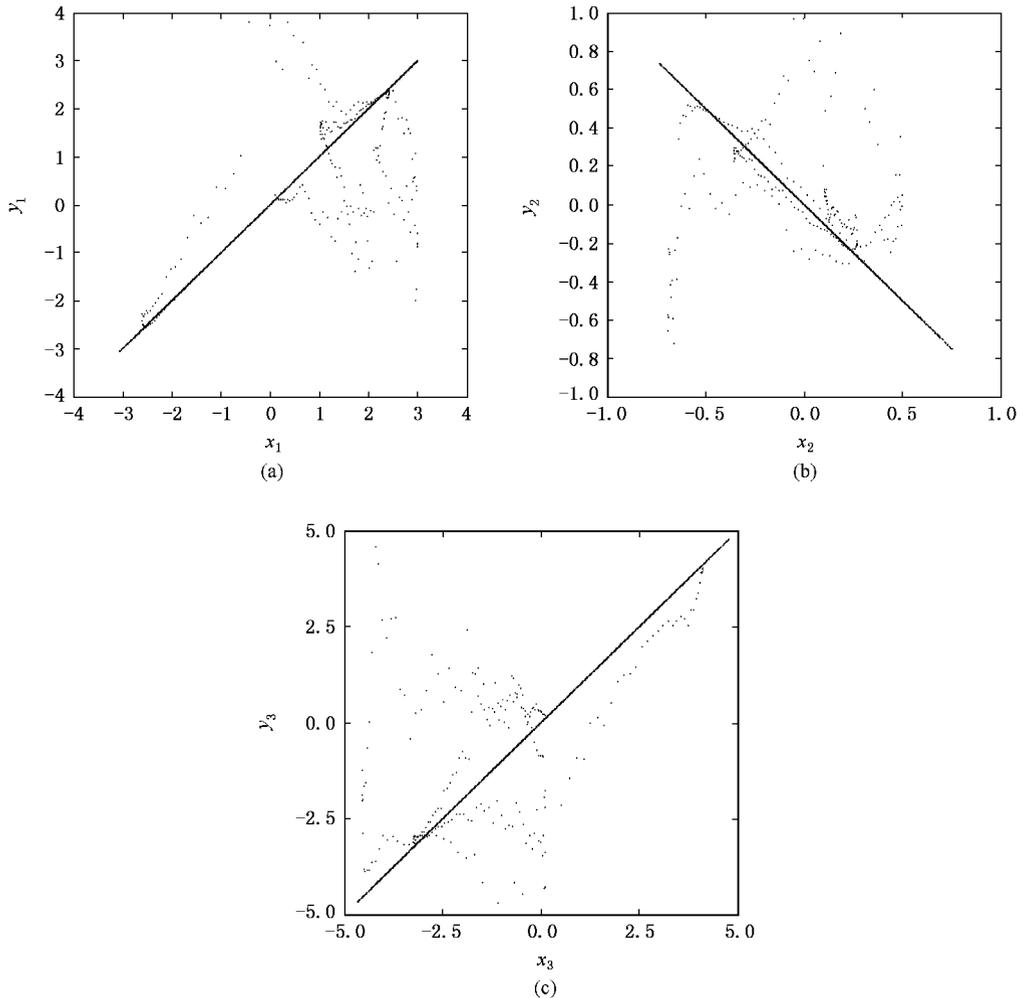


图 1  $x_i$  和  $y_i$  的关系图 ( $i = 1, 2, 3$ )

### 4. 结 论

通过服从白噪声分布的单向耦合, 实现了混沌驱动-响应系统的线性广义同步化. 基于随机微分方

程性质的理论推导详细地说明了噪声耦合强度函数所需满足的条件, 并给出了数值仿真. 文中提出的构造方法不但适用范围广, 并且比选取以常系数为参数的耦合方法更符合实际.

本文仅研究了两个混沌系统的线性广义同步情

形,对于噪声与非线性广义同步、噪声与网络同步之间的关系有待进一步研究.

- [ 1 ] Mu J , Tao C , Du G H 2003 *Chin. Phys.* **12** 0381
- [ 2 ] Li J F , Li N , Lin H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1694 ( in Chinese )  
[ 李建芬、李 农、林 辉 2004 物理学报 **53** 1694 ]
- [ 3 ] Lu J G , Xi Y G 2005 *Chin. Phys.* **14** 0274
- [ 4 ] Yu L H , Fang J C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4012 ( in Chinese )  
[ 于灵慧、房建成 2005 物理学报 **54** 4012 ]
- [ 5 ] Li G H , Xu D M , Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 0706 ( in Chinese )  
[ 李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 0706 ]
- [ 6 ] Zhang J S , Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2121 ( in Chinese )  
[ 张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2121 ]
- [ 7 ] Wu L , Zhu S Q 2003 *Chin. Phys.* **12** 0300
- [ 8 ] Brown R , Kocarev L A 2000 *Chaos* **10** 344
- [ 9 ] Zhou C S , Jürgen K 2003 *Chaos* **13** 401
- [ 10 ] Raúl T , Claudio R M , Emilio H G , Oreste P 2001 *Chaos* **11** 665
- [ 11 ] Lin W , Chen G R 2006 *Chaos* **16** 013134
- [ 12 ] Lu J G , Xi Y G 2003 *Chaos , Solitons & Fractals* **17** 825
- [ 13 ] Yang X S , Duan C K 1998 *Chaos , Solitons & Fractals* **9** 1703
- [ 14 ] Abarbanel H D I , Rulkov N F , Sushchik M M 1996 *Phys. Rev. E* **53** 4528
- [ 15 ] Jiang G P , Tang K S 2002 *Int. J. Bif. Chaos* **12** 2239
- [ 16 ] Chua L O 1994 *J. Cir. Sys. Comp.* **4** 117
- [ 17 ] Jiang G P , Zheng W X , Chen G R 2004 *Chaos , Solitons & Fractals* **20** 267
- [ 18 ] Evelyn B 2000 *J. Comp. Appl. Math.* **125** 297
- [ 19 ] Lü J H , Chen G R , Cheng D Z , Celikovskiy S 2002 *Int. J. Bif. Chaos* **12** 2917
- [ 20 ] Lü J H , Yu X H , Chen G R 2003 *IEEE Trans. Cir. Sys.* **150** 198
- [ 21 ] Lü J H , Chen G R , Yu X H , Leung H 2004 *IEEE Trans. Cir. Sys.* **151** 2476

## Linear generalized synchronization of chaotic systems by using white noise<sup>\*</sup>

Hu Ai-Hua<sup>†</sup> Xu Zhen-Yuan

( School of Science , Southern Yangtze University , Wuxi 214122 , China )

( Received 15 September 2006 ; revised manuscript received 1 October 2006 )

### Abstract

Given a chaotic drive system and the synchronization function , a response system was developed to implement linear generalized synchronization ( GS ) to the drive system. The method proposed here mainly utilizes the unidirectional coupling determined by white noise distribution. It is analytically proved that GS could be realized by using the white noise that satisfies certain conditions. In addition , the Chua 's circuit was taken for illustration and verification.

**Keywords** : chaotic system , generalized synchronization , white noise

**PACC** : 0545 , 0540

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10372054 ).

<sup>†</sup> E-mail : aihuahu@126.com