

双孔干涉效应的量子描述

姚志欣[†] 钟建伟 毛邦宁 陈 钢 潘佰良

(浙江大学物理学系 杭州 310027)

(2006 年 9 月 15 日收到 2006 年 12 月 22 日收到修改稿)

将先前得到的光子一维态矢量函数具体应用于光学双孔干涉实验,得到了一个具有普遍意义的解析表达式,极大地拓宽了实验观察范围,完整地表示了光子在整个空间的概率分布.在给出光子态矢量函数归一化积分表达式的基础上,按照量子光学的基本观点,定量分析和讨论了光学双孔干涉实验的定义域以及干涉项空间平均值的量子行为.

关键词:光子,态矢量函数,概率分布,干涉

PACC: 1480A, 0365C, 4250

1. 引 言

双孔效应是光学干涉现象最为典型的表现,在这个实验中,两个分别具有电场强度矢量或简单称做光矢量 $E_1(t, r_1) = E_{10} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \varepsilon_1)$ 和 $E_2(t, r_2) = E_{20} \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2 - \varepsilon_2)$ 的平面单色偏振光波在空间任意点 r 处合成的光强一般并不等于它们各自在该点形成光强的和.在实际的测量时间 T 远大于光波周期 $\tau = \frac{2\pi}{\omega}$ 的条件下,可以用一个简单的公式表示总的光强空间分布的时间平均值:

$$\begin{aligned} \overline{I(T \gg \tau)} &\propto \overline{(\mathbf{E})^2} = \overline{(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2} \\ &= \overline{(\mathbf{E}_1)^2} + \overline{(\mathbf{E}_2)^2} + 2 \overline{\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2} \\ &\propto \overline{I_1} + \overline{I_2} + 2 \overline{I_{12}}, \end{aligned}$$

式中上划线符号表示充分长时间内的平均,即

$$\overline{I(T \gg \tau)} \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T I(t, r) dt,$$

因此

$$\begin{aligned} \overline{I_1(T \gg \tau)} &\propto \overline{(\mathbf{E}_1)^2} \\ &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\mathbf{E}_{10})^2 \\ &\quad \times \cos^2(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1 - \varepsilon_1) dt \\ &= \frac{(\mathbf{E}_{10})^2}{2}, \end{aligned}$$

仅仅是与其振幅的平方有关的常数,同理有

$$\begin{aligned} \overline{I_2(T \gg \tau)} &\propto \overline{(\mathbf{E}_2)^2} \\ &= \frac{(\mathbf{E}_{20})^2}{2}, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \overline{I_{12}(T \gg \tau)} &= 2 \sqrt{\overline{I_1} \overline{I_2}} \cos \delta \\ &\propto 2 \overline{(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2)} \\ &= \mathbf{E}_{10} \cdot \mathbf{E}_{20} \cos \delta, \end{aligned}$$

则被称作干涉项,其中 $\delta = \mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ 是这两个光矢量之间相位差的分布,故 $\cos \delta$ 表现为空间分布函数.为了简洁起见,当表示平均的上划线符号出现在相关公式的右边时,有关平均范围的圆括号 ($T \gg \tau$) 都已经略去,时间平均值自然与具体的时间 t 无关.一般说来,只要 $\overline{I_{12}(T \gg \tau)} \neq 0$, 就认为发生了干涉,否则就没有.例如在 $\mathbf{E}_{10} \perp \mathbf{E}_{20}$ 情况下总有 $\overline{I_{12}(T \gg \tau)} = 0$, 所以两束振动方向互相垂直的线偏振光之间不可能发生干涉.一个特殊然而十分重要的情况是这两个光矢量的振幅相等,因此它们的强度相等,亦即

$$|\mathbf{E}_{10}| = |\mathbf{E}_{20}| = |\mathbf{E}_0| \propto \sqrt{I_0},$$

这时有

$$\begin{aligned} \overline{I(T \gg \tau)} &= \overline{I_1} + \overline{I_2} + 2 \overline{I_{12}} \\ &= 2 \overline{I_0} (1 + \cos \delta) \\ &= 4 \overline{I_0} \cos^2 \frac{\delta}{2}, \end{aligned}$$

从而得到

[†] E-mail: Yaozx@zju.edu.cn

$$\overline{I_{\min}(T \gg \tau)} = 0$$

$$\overline{I_{\max}(T \gg \tau)} = 4 \overline{I_0^{(1)}}$$

早在 1930 年,备受尊敬的物理学大师 Dirac 在其后来脍炙人口的《量子力学原理》中就曾重点关注过这一现象.他说:“按照光束的强度与其中可能的光子数目相关联的假定, …如果两个分量发生了干涉,我们就得要求一个分量中的光子与另一个分量中的光子发生干涉.某些情况下这两个光子相互湮没,另外一些情况下它们则必须产生四个光子.这与能量守恒相矛盾.”据此,Dirac 做出了他的著名论断:“每一个光子只与它自己发生干涉.从来不会出现两个不同光子之间的干涉^[2].”由此引发了长达四分之三个世纪的争论,至今尚未平息,光学双孔干涉也逐渐演化成两台独立的激光器之间的干涉^[3].我们认为,对这个问题最为合理的解决方案是进一步考察干涉项 $\overline{I_{12}(T \gg \tau)} = 2 \overline{I_0 \cos \delta}$ 的空间平均行为,亦即 $\overline{I_{12}(T \gg \tau, V \rightarrow \infty)} = 2 \overline{I_0 \cos \delta}$ 的具体情况.等式左边的第 2 条上划线表示对整个空间取体积平均,并具体表现为等式右边余弦形式的空间分布函数 $\cos \delta = \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)]$ 的空间平均值,即

$$\overline{\cos \delta (V \rightarrow \infty)}$$

$$= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) + (\epsilon_1 - \epsilon_2)] dV,$$

该平均值自然与空间的具体位置 \mathbf{r} 无关,常数 $\overline{I_0(T \gg \tau)} \propto |E_0|^2$ 的定义不变.长期以来,我们一直信奉 Hecht 的判断:“根据能量守恒原理,我们期望 I 的空间平均值保持不变,并等于 $(I_1 + I_2)$ 的平均值,因此 I_{12} 的空间平均值必须等于零^[1].”然而,当我们认真考察这个期望时,我们惊讶地发现,在包括教科书的所有文献资料中,竟然找不到 Hecht 所说的期望在数学上的严格证明.通过下文严谨的逻辑论证,我们认为根据能量守恒原理,在经典物理的理论框架内,是不可能解决这个期望问题的,只有根据量子物理的基本原理,才能得出正确的判断.按照 Dirac 的说法,光束的强度与其中可能的光子数目存在某种关联,但前者(光束的强度)是经典物理概念,而后者(光子数目)则属于量子物理范畴,两者之间只是有所关联,并不能等同.又因为其中可能的光子数目应该理解为光子的概率密度,所以宏观的能量守恒也不等同于微观的概率密度在整个空间的积分等于 1.正如下文所述,在发生干涉的情况下,光子概率密度在整个空间的积分并不等于 1,而是表现

为 1 与某个干涉函数的和,该干涉函数的值一般并不等于零,是量子现象的特殊表现,随着具体问题的尺度由微观向宏观发展,该干涉函数的值无限逼近零,与宏观的能量守恒原理没有矛盾.

本文利用我们最近得到的光子态矢量函数^[4,5],按照量子光学的基本理论,定量描述光学双孔干涉现象.比照经典光学理论,不仅给出了更为普遍的干涉图像,而且还可以解析表达干涉项的空间平均值.从下面的演绎中我们将发现,全部双孔干涉现象以及干涉项空间平均值的行为,都必须受到量子力学基本原理的规范,特别是 Heisenberg 不确定性原理的约束.

2. 实验布置和理论描述

实验布置和教科书介绍的相同.在图 1 所示的右手直角坐标系 (x, y, z) 中,坐标系原点 $(0, 0, 0)$ 取在双孔的中心位置,小孔 1 的坐标 $(0, -\frac{d}{2}, 0)$, 小孔 2 的坐标 $(0, \frac{d}{2}, 0)$, 故双孔的间距等于 d ; 空间任意点 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 与双孔的距离分别是 $r_1(x, y + d/2, z)$ 和 $r_2(x, y - d/2, z)$; 屏幕和光源在图中都没有显示.

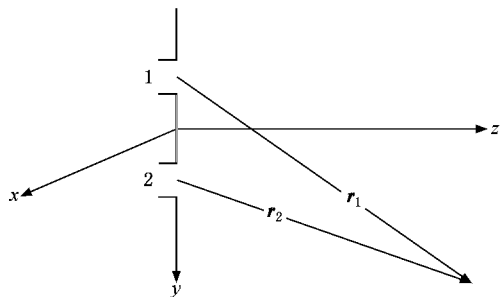


图 1 双孔干涉实验示意图

文献 4,5 已经给出了一般光束中光子一维态矢量函数的表达式

$$|A(t, z)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sigma_+^{(1)} e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \sigma_-^{(1)} e^{i\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right] e^{-i(\omega t - kz)}, \quad (1)$$

并且表明处于该量子状态的光子具有能量本征值 $E = \hbar\omega$, 动量本征值 $p_z = \hbar k$ 和角动量期望值 $\overline{S_z} = \hbar[(\sigma_+^{(1)})^2 - (\sigma_-^{(1)})^2]$, $\rho_+^{(1)}$ 和 $\rho_-^{(1)}$, α 和 β 分别是其中左旋光子和右旋光子的概率幅和相位.(1)式满足归一化条件:

$$\langle A(t, z) | A(t, z) \rangle = [(\sigma_+^{(1)})^2] + [(\sigma_-^{(1)})^2] = 1. \quad (2)$$

如果并不限定光子动量 $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ 的方向必须与坐标系的 z 轴相一致, 那么(1)式中的 κz 应该改写为更为普遍的矢量内积形式 $\kappa z \rightarrow \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, 于是

$$|A(t, \mathbf{r})\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\sigma_+^{(1)} e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \sigma_-^{(1)} e^{i\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \quad (3)$$

因此坐标原点分别取在小孔 1 和小孔 2 位置处光子的两个一维态矢量函数就可以分别写为

$$|A_1(t, \mathbf{r}_1)\rangle = \frac{1}{2} \left[\sigma_+^{(1)} e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \sigma_-^{(1)} e^{i\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1)}, \quad (4a)$$

$$|A_2(t, \mathbf{r}_2)\rangle = \frac{1}{2} \left[\sigma_+^{(1)} e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \sigma_-^{(1)} e^{i\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right] e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2)}, \quad (4b)$$

(4a) 和 (4b) 式表示处于这 2 个量子状态的光子具有完全相同的量子特征, 不仅是完全相同的能量本征值 $E = \hbar\omega$, 动量本征值 $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, 角动量期望值 $S_k = \hbar[(\sigma_+^{(1)})^2 - (\sigma_-^{(1)})^2]$, 还包括其中各自左旋光子的概率幅 $\sigma_+^{(1)}$ 和相位 α , 各自右旋光子的概率幅 $\sigma_-^{(1)}$ 和相位 β . 在这种情况下通过双孔的光子, 将发生完全的干涉, 由于通过小孔 1 和小孔 2 的光子, 原则上是不可区分的, 所以符合 Dirac“每一个光子只与它自己发生干涉”的论断. 但是如果通过小孔 1 和小孔 2 的光子属于不同的量子状态, 那么它们之间将不可能发生完全的干涉, 甚至完全不能发生干涉, 详尽的论证将做后续报道. (4a) 和 (4b) 式中光子动量的方向取自坐标系原点, 即双孔中心出发的矢径方向 $\mathbf{k} = \kappa \frac{\mathbf{r}}{r}$. 注意(4a) 和 (4b) 式中的归一化数值系数 $\frac{1}{2}$ 不同于(3)式中的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 其根据是几何布置的完全对称性, 认为在双孔干涉实验里, 这 2 个态矢量函数各自贡献归一化概率的一半, 即

$$\begin{aligned} |A_1(t, \mathbf{r}_1)\rangle &\parallel |A_1(t, \mathbf{r}_1)\rangle \\ &= |A_2(t, \mathbf{r}_2)\rangle \parallel |A_2(t, \mathbf{r}_2)\rangle \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (5)$$

按照量子力学的态叠加原理, 设想在相应于双孔干涉实验的 Hilbert 空间 (t, \mathbf{r}) 处, 总的光子态矢量函数是这 2 个态矢量函数的线性叠加, 即

$$\begin{aligned} |A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle &= |A_1(t, \mathbf{r}_1)\rangle + |A_2(t, \mathbf{r}_2)\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left[\sigma_+^{(1)} e^{i\alpha} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} + \sigma_-^{(1)} e^{i\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\times e^{-i\omega t} (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2}). \quad (6)$$

根据 Born 关于量子力学态函数的概率解释, 在真实空间 \mathbf{r} 处光子的概率分布 $P(\mathbf{r})$, 应该等于光子态矢量函数 $|A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle$ 与其 Hermitian 伴随矩阵

$\langle A_{12}(t, \mathbf{r})| \equiv |A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle^\dagger = \overline{|A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle}^*$ 的标量积^[6], 其中波纹号 \sim 表示矩阵的转置, 星号 $*$ 表示复数取共轭.

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &= \langle A_{12}(t, \mathbf{r})| |A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle \\ &= \frac{1}{2} (e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} + e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2}) \langle e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} + e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_2} \rangle \\ &= \frac{1}{2} [2 + e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} + e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}] \\ &= 1 + \cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]. \end{aligned} \quad (7a)$$

公式(7a)就是我们凭借光子态矢量函数和量子力学基本理论给出的光学双孔干涉实验中光子在整个空间的概率分布.

3. 分析和讨论

为了和经典理论的结果进行比较, 利用上述 $\mathbf{r}_1(x, y + d/2, z), \mathbf{r}_2(x, y - d/2, z)$ 和 $\mathbf{k} = \kappa \frac{\mathbf{r}}{r}$ 的坐标表示, 波数与波长的关系 $\kappa = \frac{2\pi}{\lambda}$, 以及归一化条件(2)式(7a)式进一步改写为

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &= 2\cos^2 \left[\frac{\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{2} \right] \\ &= 2\cos^2 \left[\frac{1}{2} \kappa \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{j} \right] \\ &= 2\cos^2 \left[\frac{1}{2} \frac{2\pi}{\lambda} \frac{(xi + yj + zk)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot d\mathbf{j} \right] \\ &= 2\cos^2 \left[\frac{\pi dy}{\lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right]. \end{aligned} \quad (7b)$$

经典光学根据由双孔出发两条光线的光程差计算, 得到的干涉图像通常限定在双孔正前方、平行于双孔连线的狭窄范围内, 即 $x \approx 0$, 屏幕与双孔的距离远大于双孔的间距, 即 $d \ll z$, 以及很小的观察视角, 即 $\tan\theta = \frac{y_{\max}}{z} \ll 1$ 等条件下, 获得光强干涉条纹的近似分布^[1]:

$$I = 2I_0 \cos^2 \left(\frac{\pi y d}{\lambda z} \right), \quad (8)$$

其中 $I_0/2$ 是每个小孔的辐照度. 两相比照即可发现若在(8)式中取 $I_0 = 1$, 则是(7b)式在 $x \approx 0, y_{\max} \ll z$ 条件下的特例(8)式表示的仅仅是一个远离双孔

且很短的窄条上光强的干涉条纹(7b)式表示的则是整个空间光子的概率分布,极大地扩展了干涉条纹的观察范围:不仅是远场,而且包括了近场;不仅是 y 方向狭窄的视角,而且包括了 $x-y$ 方向全方位的视角。

我们认为,上述量子表达式的作用决不仅是从数量方面扩大了经典表达式的观察范围,更为重要的是从本质方面提供了有关干涉现象新的理念。为此,需要将该表达式中的干涉项 $\cos[\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]$ 进一步展开,由于 $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \kappa \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{j}d = \kappa d \cos \xi$, 故光子的空间概率分布可以改写为

$$P(\mathbf{r}) = 1 + \cos(\kappa d \cos \xi), \quad (9)$$

其中 κd 是与具体实验有关的常数,即波数 κ 与双孔间距 d 的乘积, $\cos \xi = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{j}}{r}$ 是矢径 \mathbf{r} 与 y 轴正向之间夹角 ξ 的方向余弦。(9)式清楚地表明,角度 ξ 是反映双孔干涉效应唯一的几何变量。换句话说,光子在整个空间的概率分布仅与方位角 ξ 有关,而与位置 \mathbf{r} 或路径 $|\mathbf{r}_1|$ 和 $|\mathbf{r}_2|$ 无关!按照经典光学的传统观念,这样的推论是很难理解的,因为经典光学考察的是两个真实的光矢量在位置 \mathbf{r} 处的叠加,最重要的依据是这两束光各自在经历路径(光程) $|\mathbf{r}_1|$ 和 $|\mathbf{r}_2|$ 后的相位差。但是按照量子力学的基本观点,这样的推论却是自然而然的,因为在量子力学理论体系中,根本就不存在光子的所谓位置以及具体路径的概念^[6]。在双孔干涉实验中,光子态矢量函数 $|A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle$ 的定义域是抽象的 Hilbert 空间,在真实空间的任何具体的 \mathbf{r} 位置,复数形式的态矢量函数是没有物理定义的,只是根据 Born 关于量子力学态函数的概率解释,实数形式的分布函数 $P(\mathbf{r}) = |A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle \langle A_{12}(t, \mathbf{r})|$ 才表示光子在真实空间 \mathbf{r} 处出现的概率。我们不必要、而且实际上也不可能考察个别光子的行为,即该光子究竟是从哪个小孔通过的,到达屏幕上的什么位置。就具体观察到的干涉图像而言,条纹的空间分布仅与方位角 ξ 有关,而与位置 \mathbf{r} 无关的推论,初听起来似乎令人感到惊讶,但是只要回顾一下熟悉的双孔实验,就容易判断它的正确性是毋庸置疑的。设想前后移动观察屏幕,显而易见的事实将是屏幕上干涉条纹的间隔将按比例放大或缩小,而每根干涉条纹相对于双孔中心的张角则保持不变。

4. 态矢量函数归一化的积分表示和干涉项的空间平均

首先讨论一下公式(2)关于态矢量函数归一化的准确表述。这是因为通常所谓 $\langle A(t, \mathbf{r}) | A(t, \mathbf{r}) \rangle = 1$ 指在整个空间找到光子的概率等于 1 的说法是不够准确和规范的。严格地说, $P(\mathbf{r}) = |A(t, \mathbf{r})\rangle \langle A(t, \mathbf{r})| = 1$ 所表示的只是光子的概率分布在空间是均匀的,因为这时 $P(\mathbf{r})$ 的取值与 \mathbf{r} 的具体位置无关,均匀分布就是没有干涉。如果令所观察空间的有效体积等于 V ,那么在其中任何单位体积内找到光子的概率,即光子的概率分布密度就是

$$\begin{aligned} \frac{P(\mathbf{r})}{V} &= \frac{\langle A(t, \mathbf{r}) | A(t, \mathbf{r}) \rangle}{V} \\ &= \frac{1}{V}, \end{aligned}$$

所以在空间 \mathbf{r} 处附近的体积元 dv 内找到光子的概率就是

$$\begin{aligned} \frac{P(\mathbf{r})}{V} dv &= \frac{\langle A(t, \mathbf{r}) | A(t, \mathbf{r}) \rangle}{V} dv \\ &= \frac{1}{V} dv, \end{aligned}$$

所谓归一化则是在整个空间找到光子的概率等于 1,表示为该光子概率分布密度对整个空间的积分:

$$\begin{aligned} &\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V P(\mathbf{r}) \lambda dv \\ &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V |A(t, \mathbf{r})\rangle \langle A(t, \mathbf{r})| dv \\ &= 1. \end{aligned}$$

当 $P(\mathbf{r}) = |A(t, \mathbf{r})\rangle \langle A(t, \mathbf{r})| = 1$ 时,该积分公式的正确性是显而易见的,这就是没有干涉情况下态矢量函数归一化的规范表述。因为仅仅相差体积常数 V ,所以习惯上往往并不严格区分光子的概率分布 $P(\mathbf{r})$ 和光子的概率分布密度 $P(\mathbf{r})/V$ 。但是当光子的概率分布(9)式

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) &= |A_{12}(t, \mathbf{r})\rangle \langle A_{12}(t, \mathbf{r})| \\ &= 1 + \cos(\kappa d \cos \xi) \end{aligned}$$

表现为空间的分布函数时,亦即发生干涉的情况下,其对整个空间的加权 $\left(\frac{1}{V}\right)$ 积分(空间平均)是否等于 1,却取决于其中干涉项 $\cos(\kappa d \cos \xi)$ 的空间平均是否等于 0,因为这时

$$\begin{aligned}
 \overline{P(\mathbf{r})} &\equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V P(\mathbf{r}) \mathrm{d}V \\
 &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V [1 + \cos(\kappa d \cos \xi)] \mathrm{d}V \\
 &= \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \left[\int_V 1 \mathrm{d}V + \int_V \cos(\kappa d \cos \xi) \mathrm{d}V \right] \\
 &= 1 + \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \cos(\kappa d \cos \xi) \mathrm{d}V. \quad (10)
 \end{aligned}$$

定义干涉项的空间平均值 $\overline{P_{\text{int}}(\mathbf{r})} = \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V}$

$\int_V \cos(\kappa d \cos \xi) \mathrm{d}V \equiv P_{\text{int}}(\kappa d)$, 这是一个仅与实验常数 κd 有关的定积分. 我们发现进一步的讨论选用球极坐标是方便的, 这时 $\mathrm{d}V = r^2 \sin \theta \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi$, 而矢径 r 相对于 y 轴之间夹角 ξ 的方向余弦则表示为 $\cos \xi = \sin \theta \sin \varphi$, 于是干涉项的空间平均值表示为

$$\begin{aligned}
 P_{\text{int}}(\kappa d) &\equiv \lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V \cos(\kappa d \cos \xi) \mathrm{d}V \\
 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^\pi \sin \theta \mathrm{d}\theta \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} \cos(\kappa d \sin \theta \sin \varphi) \mathrm{d}\varphi \\
 &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \cos(\kappa d \sin \theta \sin \varphi) \mathrm{d}\varphi. \quad (11)
 \end{aligned}$$

我们先是通过数值积分获得了 $P_{\text{int}}(\kappa d)$ 随实验常数 κd 从 0 开始增长变化的规律性认识, 它表现为从 1 开始并围绕数值 0 的周期性衰减振荡. 在此基础上经过努力, 得到了定积分 (11) 式的解析表达

$P_{\text{int}}(\kappa d) = \frac{\sin \kappa d}{\kappa d}$ (附录) 呈现为经典光学中典型的干涉函数 (interference function)^[7] 形式. 故在发生干涉条件下光子态矢量函数的归一化解析表示为

$$\overline{P(\mathbf{r})} = 1 + P_{\text{int}}(\kappa d) = 1 + \frac{\sin \kappa d}{\kappa d}, \quad (12)$$

其变化曲线如图 2 所示.

通常光学双孔干涉实验装置中的双孔间隔 d 约为 0.1—1 mm^[8], 如果取常见的红光波长 $\lambda = 0.628 \mu\text{m}$, 则有 $\kappa d = \frac{2\pi d}{\lambda} \approx 1000\text{—}10000$, 很容易得到光子态矢量函数归一化的精确度, 也就是光子概率分布密度空间积分值偏离 1 的差值 $\overline{P(\mathbf{r})} - 1 = \overline{P_{\text{int}}(\mathbf{r})} = P_{\text{int}}(\kappa d) = \frac{\sin \kappa d}{\kappa d}$, 取决于 κd 的具体数值, 它的绝对值分别小于 0.001 和 0.0001.

公式 (12) 本身对实验常数 κd 的取值并没有限

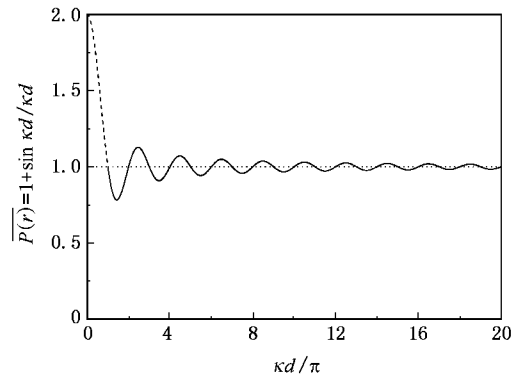


图 2 双孔干涉实验中光子概率分布密度的空间积分值随 κd 取值的变化曲线

制, 但是从逻辑和物理的角度, 却只能限定在 $\kappa d \geq \pi$ 的区域, 即图 2 曲线中的实线部分, 而 $\kappa d < \pi$ 的虚线部分则被排除在定义域的范围之外. 这是因为: 第一, 根据字面上的含义, $d=0$ 意味“双孔”不存在, 所以 $\kappa d=0$ 应该被排除在 κd 的定义域范围之外, 尽管这时 $\overline{P(\mathbf{r})} = 1 + P_{\text{int}}(\kappa d=0) = 2$, 但它对公式 (12) 的合理应用并无影响; 第二, 根据量子力学的 Heisenberg 不确定性原理, 在由该原理导出的多种形式 Heisenberg 不确定性关系式中, 一种常见的形式是关于坐标不确定性 Δy 与动量不确定性 Δp_y 的乘积 $\Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2}$ ^[9,10]. 在由图 1 所表示的双孔实验坐标系中, 如果取坐标的不确定性 $\Delta y = d$ 为双孔的间隔, 取动量的不确定性 $\Delta p_y = p = \kappa \hbar = \frac{\kappa \hbar}{2\pi}$ 为单个光子的动量, 那么就有 $\Delta y \Delta p_y = d \frac{\kappa \hbar}{2\pi}$, 直接代入上述 Heisenberg 不确定性关系式, 即为 $\kappa d \geq \pi$, 因此所有小于 π 的 κd 取值也应该被排除在定义域范围之外, 即图 2 的虚线部分, 尽管这时总有 $P_{\text{int}}(\kappa d < \pi) > 1$, 但它同样不影响公式 (12) 的合理应用. 或许我们可以采用较为通俗的语言进行不那么严密的解释: 即从量子力学的观点出发, 根据 Heisenberg 的不确定性原理, 当 $\kappa d < \pi$ 时, 对于动量 $p = \kappa \hbar$ 的光子, 这样的“双孔”原则上是不可分辨的, 这时不能应用公式 (12), 所以 $\kappa d < \pi$ 应该被排除在 κd 的定义域范围之外. 第三, 在所有 $\kappa d \geq \pi$ 的定义域范围之内, 双孔干涉实验中光子态矢量函数的归一化, 也就是光子概率分布在空间的加权平均值 $\overline{P(\mathbf{r})} = 1 + P_{\text{int}}(\kappa d \geq \pi) = 1 + \frac{\sin \kappa d}{\kappa d}$ 并非绝对等于 1, 而是从 $P_{\text{int}}(\kappa d = \pi) = 1$ 开始并围绕 1 的振荡起伏, 其与 1 之间

的差值 $P_{\text{int}}(\kappa d \geq \pi) = \overline{P(\mathbf{r})} - 1 = \frac{\sin \kappa d}{\kappa d}$ 恰好就是干涉函数, 并且随着 κd 的无限增长而趋于零.

附录 定积分 $P_{\text{int}}(\kappa d) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos(\kappa d \sin \theta \sin \varphi) d\varphi$ 的解析

1) 取 Taylor 级数

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \text{ 中的}$$

$$x = \kappa d \sin \theta \sin \varphi,$$

代入积分式后, 套用积分递推公式, 完成对 φ 角的定积分:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(\kappa d \sin \theta \sin \varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\kappa d \sin \theta)^{2n}}{(2n)!} \sin^{2n} \varphi \right] d\varphi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\kappa d \sin \theta)^{2n}}{(2n)!} \prod_{m=1}^n \frac{(2m-1)}{(2m)} 2\pi. \end{aligned}$$

2) 由积分递推公式直接完成 $\sin^{2n+1} \theta$ 对 θ 角的定积分

$$\int_0^\pi \sin^{2n+1} \theta d\theta = \prod_{l=1}^n \frac{(2l)}{2l+1} 2.$$

3) 将 1) 2) 中的双重连乘积合并, 简化

$$\prod_{m=1}^n \frac{(2m-1)}{(2m)} \prod_{l=1}^n \frac{(2l)}{2l+1} \equiv \frac{1}{2n+1}.$$

4) 将上述 1)–3) 代入积分式, 整理归并后恰好就是干涉函数

$$\begin{aligned} P_{\text{int}}(\kappa d) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} \cos(\kappa d \sin \theta \sin \varphi) d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\kappa d)^{2n}}{(2n)!} 2\pi 2 \frac{1}{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\kappa d)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{\kappa d} \\ &= \frac{\sin \kappa d}{\kappa d}. \end{aligned}$$

- [1] Hecht E 2002 *Optics* (San Francisco: Addison Wesley) p386—388, p396
- [2] Dirac P A M 1958 *The Principles of Quantum Mechanics*, Fourth Edition (London: Oxford University Press) p9
- [3] Pfleeger P L, Mendel L 1967 *Phys. Rev.* **159** 1084
- [4] Yao Z X, Zhong J W, Pan B L, Chen G 2005 *Chin. Opt. Lett.* **3** S134
- [5] Yao Z X, Pan B L, Chen G, Zhong J W 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2158 (in Chinese) [姚志欣、潘佰良、陈钢、钟建伟 2006 物理学报 **55** 2158]
- [6] Schiff L I 1968 *Quantum Mechanics* (New York: McGraw-Hill Book Company) p151, p5—7

- [7] Born M, Wolf E 1999 *Principles of Optics* (England: Cambridge University Press) p450
- [8] Zhao K H, Zhong X H 1996 *Optics* (Beijing: Peking University Press) p174 (in Chinese) [赵凯华、钟锡华 1996 光学 (北京: 北京大学出版社) 第 174 页]
- [9] Zhou S X 1962 *Quantum Mechanics* (Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers) p129 (in Chinese) [周世勋 1962 量子力学 (上海: 上海科学技术出版社) 第 129 页]
- [10] Su R K 2002 *Quantum Mechanics* (Beijing: Higher Education Press) p112 (in Chinese) [苏汝铿 2002 量子力学 (北京: 高等教育出版社) 第 112 页]

Quantum description of interference effect with two holes

Yao Zhi-Xin[†] Zhong Jian-Wei Mao Bang-Ning Chen Gang Pan Bai-Liang

(*Department of Physics, Zhejiang University, Hangzhou 310027, China*)

(Received 15 September 2006 ; revised manuscript received 22 December 2006)

Abstract

By using one-dimensional photon state-vector function obtained previously , a general analytic expression is deduced for the optical two-hole interference experiment , which not only greatly enlarges the range of the observable , but also completely represents the probability distribution for a photon in the whole space. On the basis of the basic rules of quantum optics , we quantitatively analyze and discuss the domain of definition of the experiment , and the quantum behavior of the interference item on the average of space .

Keywords : photon , state-vector function , probability distribution , interference

PACC : 1480A , 0365C , 4250

[†] E-mail : Yaozx@zju.edu.cn