第 56 卷 第 7 期 2007 年 7 月
1000-3290/2007/56(07)/3688-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56,No.7,July,2007

一类环状非球谐振子势场中相对论粒子的束缚态解

张民仓　王振邦

(陕西师范大学物理学与信息技术学院,西安　710062)

(2006 年 11 月 16 日收到;2006 年 12 月 11 日收到修改稿)

提出了一种新的环状非球谐振子势，在标量势与矢量势相等的条件下,给出了其 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解. Klein-Gordon 方程的 θ 角向波函数以超几何函数表示,径向波函数可用合流超几何函数或广义拉盖尔多项式表示,能谱方程由径向波函数满足的束缚态边界条件得到. Dirac 方程的旋量波函数可用 Klein-Gordon 方程的解构造.

关键词：环状非球谐振子势，Klein-Gordon 方程，Dirac 方程，束缚态

PACC：0365

1. 引　　言

在强耦合条件下,势场中运动粒子的相对论效应变得十分重要.而在考虑到相对论效应时,处于势场中的运动粒子需要用 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程描述[1,2].在以前的研究中,人们已在标量势等于或大于矢量势的条件下，给出了不少典型势函数的 Klein-Gordon 方程或 Dirac 方程的束缚态解[3—15].这些势函数的大多数属于双原子分子势.

球谐振子模型是非相对论量子力学中可精确求解的模型,球谐振子势在许多领域有着广泛的应用. 但是在一些问题中,球谐振子模型过于简化,为此人们提出了一些非球谐振子模型,它们是由球谐振子势和其他形式的附加势构成. 这类势函数能够用来描述环状分子(如苯分子)的模型及变形核子之间的相互作用,在量子化学及核物理研究中有不少的应用. 近年来,粒子在非球谐振子势场中的相对论效应引起了物理学界的广泛兴趣,并已取得一些有意义的结果. 这些研究包括了典型非球谐振子势[16,17]，环状球谐振子势[18]，环状非球谐振子势[19—21]，双环状球谐振子势[22]，等等. 文献[23]讨论过一种环状非球谐振子势,在球坐标下其形式为

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 + \frac{\hbar^2\alpha}{2Mr^2} + \frac{\hbar^2\beta\cos^2\theta}{2Mr^2\sin^2\theta}, \quad (1)$$

并通过求解 Schrödinger 方程得到了其非相对论的能谱和束缚态波函数. 在以前的工作中[24]，我们研究了这一环状非球谐振子势的相对论效应,在标量势等于矢量势的条件下得到了其 Klein-Gordon 方程的束缚态解及束缚态波函数满足的能谱方程. 本文提出另一种新的环状非球谐振子势,其表示式为

$$V(r,\theta) = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2 + \frac{\hbar^2\eta}{2Mr^2} + \frac{\hbar^2\gamma\cos\theta}{2Mr^2\sin^2\theta}. \quad (2)$$

式中 M 和 ω 分别是粒子的静止质量和频率,η 和 γ 是无量纲的实参数. 与(1)式相比,新的环状非球谐振子势是以$\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}$替换了其中的$\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$.而与我们最近讨论过的 Makarov 势相比[25]，则是以谐振子势$\frac{1}{2}M\omega^2 r^2$替换了其中的库仑势$\frac{\mu}{r}$，以反平方势$\frac{\hbar^2\eta}{2Mr^2}$替换了其中的环状势$\frac{\beta}{r^2\sin^2\theta}$.本文是在标量势与矢量势相等的条件下,求解这一新的环状非球谐振子势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程,给出其满足的能谱方程和归一化的束缚态波函数.为计算简单,以下取 $\hbar = c = \omega = 1$.

2. Klein-Gordon 方程的束缚态解

具有标量势 $S(\boldsymbol{r})$ 与矢量势 $V(\boldsymbol{r})$ 的 Klein-Gordon 方程为

$$\{\boldsymbol{p}^2 + [M + S(\boldsymbol{r})]^2$$

$$-[E-V(\boldsymbol{r})]^2\}\psi(\boldsymbol{r})=0, \tag{3}$$

式中 $\boldsymbol{p}$ 是动量算符，E 为粒子的能量. 在标量势等于矢量势的条件下把(2)式代入(3)式，可得

$$\left[\boldsymbol{p}^2-(E^2-M^2)+(E+M)\times\left(Mr^2+\frac{\eta}{Mr^2}+\frac{\gamma\cos\theta}{Mr^2\sin^2\theta}\right)\right]\psi(\boldsymbol{r})=0. \tag{4}$$

在球坐标系下，使得

$$\psi(\boldsymbol{r})=r^{-1}u(r)H(\theta)\exp(\mathrm{i}m\phi)\quad(m=0,\pm1,\pm2,\cdots). \tag{5}$$

把(5)式代入方程(4)并分离变量，可得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)H(\theta)+\left[\lambda-\frac{m^2+\left(\frac{M+E}{M}\right)\gamma\cos\theta}{\sin^2\theta}\right]H(\theta)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}u(r)+\left[(E^2-M^2)-(M+E)Mr^2-\frac{\left(\lambda+\frac{M+E}{M}\eta\right)}{r^2}\right]u(r)=0. \tag{7}$$

方程(6)和方程(7)为相等的标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的 θ 角向方程和径向方程，λ 为分离常数. 对于 θ 角向方程(6)，作变量替换

$$x=\frac{1}{2}(1+\cos\theta)=\cos^2\frac{\theta}{2}, \tag{8}$$

则方程(6)变为

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)+\left[\lambda x(1-x)-\frac{1}{4}\left(m^2-\frac{(M+E)\gamma}{M}\right)-\frac{(M+E)}{2M}\gamma x\right]H(x)=0. \tag{9}$$

定义 p,q 为两个正的参数，且分别满足关系

$$p=\frac{1}{2}\left|m^2-\frac{(M+E)\gamma}{M}\right|^{1/2},\quad q=\frac{1}{2}\left|m^2+\frac{(M+E)\gamma}{M}\right|^{1/2}, \tag{10}$$

则方程(9)可以变为

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x(1-x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}H(x)+[\lambda x(1-x)-p^2-(q^2-p^2)x]H(x)=0. \tag{11}$$

方程(11)的一般解可表示为

$$H(x)=x^p(1-x)^q g(x). \tag{12}$$

把(12)式代入方程(11)，可得

$$x(1-x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}g(x)+[(2p+1)-(2p+2q+2)x]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g(x)-[(p+q)(p+q+1)-\lambda]g(x)=0. \tag{13}$$

方程(13)为一超几何方程，其解可用超几何函数表示为

$$g(x)=F(i,j,k,x), \tag{14}$$

其中

$$i=p+q-l,\quad j=p+q+1+l,\quad k=2p+1. \tag{15}$$

$$\lambda=l(l+1). \tag{16}$$

为使得方程(13)的解满足束缚态边界条件，超几何函数必须中断为一个多项式，即要求

$$i=p+q-l=-n',\ (n'=0,1,2,\cdots) \tag{17}$$

或

$$j=p+q+1+l=-n',\ (n'=0,1,2,\cdots). \tag{18}$$

虽然超几何函数对于交换参数 i 和 j 是不变的，但根据 p,q 是正数的定义，只有(17)式满足要求，并且 l 和 $p+q$ 之间的差 $l-(p+q)$ 必为零或正整数. 最后得到 Klein-Gordon 方程的 θ 角向方程的归一化解为

$$H_{n'}(x)=N_{n'}x^p(1-x)^q\times F(-n',p+q+1+l,2p+1,x). \tag{19}$$

$N_{n'}$ 为归一化常数，利用以下两个熟知的关系式[26]：

$$j_n(\alpha,\gamma,x)=F(-n,\alpha+n,\gamma,x),$$

$$\int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma}j_n(\alpha,\gamma,x)j_k(\alpha,\gamma,x)\mathrm{d}x=\frac{\Gamma^2(\gamma)\Gamma(\alpha+n-\gamma+1)}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\gamma+n)}\frac{n!}{(\alpha+2n)}\delta_{nk}, \tag{20}$$

及角向波函数的正交归一化条件

$$\int_{-1}^1[H_n(x)]^2\mathrm{d}x=1, \tag{21}$$

可以求出

$$N_{n'}=\frac{1}{(2p)!}\times\sqrt{\frac{(2p+2q+n')!(2p+n')!(2p+2q+2n'+1)}{2n'!(2q+n')!}}. \tag{22}$$

为求得 Klein-Gordon 方程的径向方程(7)的解，引入变量 $\rho=\varepsilon r$，则径向方程(7)可变为

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2}u(\rho)+\left[A-\rho^2-\frac{L(L+1)}{\rho^2}\right]u(\rho)=0, \tag{23}$$

其中

$$\varepsilon=[(M+E)M]^{1/4},$$

$$A = (E - M)\sqrt{\frac{E+M}{M}},$$
$$L(L+1) = l(l+1) + \frac{M+E}{M}\eta. \tag{24}$$

考虑到径向波函数在 $\rho \to 0$ 及 $\rho \to \infty$ 时的渐进行为，方程(23)在物理上可接受的解设为

$$u(\rho) = \rho^{L+1} e^{-\frac{\rho^2}{2}} f(\rho), \tag{25}$$

把(25)式代入方程(23)可得

$$\frac{d^2}{d\rho^2} f(\rho) + \left[\frac{2(L+1)}{\rho} - 2\rho\right] \times \frac{d}{d\rho} f(\rho) + [A - 2L - 3] f(\rho) = 0. \tag{26}$$

作变换 $\xi = \rho^2$，方程(26)变为

$$\xi \frac{d^2}{d\xi^2} f(\xi) + \left(L + \frac{3}{2} - \xi\right)\frac{d}{d\xi} f(\xi) - \frac{1}{4}(2L + 3 - A) f(\xi) = 0. \tag{27}$$

方程(27)为一合流超几何方程，其解可用合流超几何函数表示为

$$f(\xi) = F\left(\frac{2L+3-A}{4}, L + \frac{3}{2}, \xi\right). \tag{28}$$

当 $\xi \to \infty$ 时，合流超几何函数

$$F\left(\frac{2L+3-A}{4}, L + \frac{3}{2}, \xi\right)$$

趋于 $\exp(\xi)$. 由(25)式可以看出，在 $\rho \to \infty$ 时，$u(\rho)$ 以 $\exp(\rho^2/2)$ 的行为指数地发散，因此合流超几何函数必须中断为一多项式. 即要求

$$\frac{1}{4}(2L + 3 - A) = -n_r, (n_r = 0, 1, 2, \cdots), \tag{29}$$

式中 n_r 为径向量子数. 由(24)式及(29)式可以得到束缚态满足的能谱方程为

$$(E - M)\sqrt{E + M} = \sqrt{M}(4n_r + 2L + 3), \tag{30}$$

$$L = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{M+E}{M}\eta + \left(l + \frac{1}{2}\right)^2}. \tag{31}$$

相应的，径向束缚态波函数为

$$u(r) \sim (\varepsilon r)^{L+1} \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2 r^2\right) \times F\left(-n_r, L + \frac{3}{2}, \varepsilon^2 r^2\right). \tag{32}$$

利用合流超几何函数 $F(-n, \mu+1, x)$ 和广义拉盖尔函数 $L_n^\mu(x)$ 之间的关系

$$L_n^\mu(x) = \frac{\Gamma(n + \mu + 1)}{n!\,\Gamma(\mu + 1)} F(-n, \mu + 1, x), \tag{33}$$

归一化的径向波函数 $u(r)$ 可表示为

$$u_{n_r L}(r) = N_{n_r L}(\varepsilon r)^{L+1} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2 r^2\right) L_{n_r}^\mu(\varepsilon^2 r^2), \quad \left(\mu = L + \frac{1}{2}\right). \tag{34}$$

由径向波函数的归一化条件

$$\int_0^\infty [R_n(r)]^2 r^2 dr = 1, \quad [R_n(r) = r^{-1} u_n(r)] \tag{35}$$

及公式

$$\int_0^\infty x^\mu e^{-x} L_n^\mu(x) L_k^\mu(x) dx = \frac{\Gamma(n + \mu + 1)}{n!}\delta_{nk}, \tag{36}$$

可得归一化常数 $N_{n_r L}$ 为

$$N_{n_r L} = \sqrt{\frac{2\varepsilon n_r!}{\Gamma\left(n_r + L + \frac{3}{2}\right)}}. \tag{37}$$

于是，Klein-Gordon 方程的归一化束缚态波函数为

$$\psi(\boldsymbol{r}) = N_{n_r L} N_{n'} r^{-1} (\varepsilon r)^{L+1} \times \exp\left(-\frac{1}{2}\varepsilon^2 r^2\right) L_{n_r}^\mu(\varepsilon^2 r^2) \times \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2p}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2q} \times F\left(-n', p + q + 1 + l, 2p + 1, \cos^2\frac{\theta}{2}\right) \times \exp(im\phi). (m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \tag{38}$$

归一化常数 $N_{n'}$，$N_{n_r L}$ 分别由(22)和(37)式给出.

3. Dirac 方程的束缚态解

具有标量势 $S(\boldsymbol{r})$ 与矢量势 $V(\boldsymbol{r})$ 的 Dirac 方程为

$$[\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{p} + \beta(M + S(\boldsymbol{r}))]\psi(\boldsymbol{r}) = [E - V(\boldsymbol{r})]\psi(\boldsymbol{r}), \tag{39}$$

其中

$$\boldsymbol{p} = -i\hbar\nabla, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ \boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{40}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}$ 为 Pauli 自旋矩阵. 在 Pauli-Dirac 表象中，使得

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} \varphi(\boldsymbol{r}) \\ \chi(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix}, \tag{41}$$

于是有

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi(\boldsymbol{r}) = [E - V(\boldsymbol{r}) - M - S(\boldsymbol{r})]\varphi(\boldsymbol{r}),$$
$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\varphi(\boldsymbol{r}) = [E - V(\boldsymbol{r}) + M + S(\boldsymbol{r})]\chi(\boldsymbol{r}). \tag{42}$$

当标量势 $S(\boldsymbol{r})$与矢量势 $V(\boldsymbol{r})$相等时，方程(42)变为

$$\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\chi(\boldsymbol{r}) = [E - M - 2V(\boldsymbol{r})]\varphi(\boldsymbol{r}),$$
$$\chi(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+M}\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{43}$$

把(2)式代入方程(43)，可得

$$\left[p^2 - (E^2 - M^2) + (E + M)\times\left(Mr^2 + \frac{\eta}{Mr^2} + \frac{\gamma\cos\theta}{Mr^2\sin^2\theta}\right)\right]\varphi(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{44}$$

由于 Dirac 方程的上分量 $\varphi(\boldsymbol{r})$满足的方程(44)与方程(4)相同，因而可用同样的方法求解. 相应的，Dirac 方程的束缚态波函数满足的能谱方程为

$$(E - M)\sqrt{E + M} = \sqrt{M}(4n_r + 2L + 3). \tag{45}$$

Dirac 方程的旋量波函数为(未归一化)

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix}\varphi(\boldsymbol{r})\\ \chi(\boldsymbol{r})\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}}{E+M}\end{pmatrix} r^{-1}u_{n_rL}(r)\times H_{n'}(\theta)\exp(\mathrm{i}m\phi). \tag{46}$$

4. 讨　　论

本文提出了一种新的环状非球谐振子势，并在标量势与矢量势相等条件下，获得了其 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的束缚态解. Klein-Gordon 方程的角向分量和径向分量分别满足超几何方程和合流超几何方程，其解可以用超几何函数，合流超几何函数或广义拉盖尔多项式表示，束缚态的能谱方程则由径向波函数的束缚态边界条件得到. 对于 Dirac 方程，采用了二分量的波函数退耦，退耦后的 Dirac 方程的上分量 $\varphi(\boldsymbol{r})$满足的方程与 Klein-Gordon 方程相同，因而具有同样的能谱方程，并且能够用 Klein-Gordon 方程的解构造出 Dirac 方程的旋量波函数. 各种环状非球谐振子势的主要差别在于其环状势的不同，具有不同环状势的环状非球谐振子势的 θ 角向分量一般满足不同形式的微分方程. 本文提出的环状非球谐振子势的 θ 角向分量满足的是超几何方程，而已有讨论过的多属缔合勒让德方程. 环状势的变化并不改变其径向分量满足的微分方程，因而各种环状非球谐振子势都具有相同形式的能谱方程. 由(2)式可以看出，当 $\gamma = 0$ 时，环状非球谐振子势退化为通常的非球谐振子势，$\eta = 0$ 时，环状非球谐振子势退化为环状球谐振子势. 当 $\gamma = \eta = 0$ 时，环状非球谐振子势退化为球谐振子势. 因而在标量势与矢量势相等的条件下，对于非球谐振子势，环状球谐振子势及球谐振子势的 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的讨论都可以作为环状非球谐振子势的特殊情况.

[1] Wang R C，Wang C Y 1988 *Phys*. *Rev*. D **38** 348

[2] Zeng J Y 2000 *Quantum Mechanics* Vol Ⅱ 3rd (Beijing：Science Press) (in Chinese) [曾谨言 2000 量子力学 (卷Ⅱ)第三版(北京 科学出版社)]

[3] Dominguez-Adame F 1989 *Phys*. *Lett*. A **136** 175

[4] Hu S Z，Su R K 1991 *Acta Phys*. *Sin*. **40** 1201 (in Chinese) [胡嗣柱、苏汝铿 1991 物理学报 **40** 1201]

[5] Guo J Y，Meng J，Xu F X 2003 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **20** 602

[6] Hou C F，Li Y ，Zhou Z X 1999 *Acta Phys*. *Sin*. **48** 1999 (in Chinese) [侯春风、李　炎、周忠祥 1999 物理学报 **48** 1999]

[7] Chen G 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1651 (in Chinese) [陈　刚 2001 物理学报 **50** 1651]

[8] Zhang M C，Wang Z B 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 525 (in Chinese) [张民仓、王振邦 2006 物理学报 **55** 525]

[9] Chen G 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 680 (in Chinese) [陈　刚 2004 物理学报 **53** 680]

[10] Chen G 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 684 (in Chinese) [陈　刚 2004 物理学报 **53** 684]

[11] Gou J Y 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1453 (in Chinese) [郭建友 2002 物理学报 **51** 1453]

[12] Qiang W C 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 571

[13] Qiang W C 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 575

[14] Sharma L K，Fiase J 2004 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **21** 1983

[15] Zhang M C ，Wang Z B 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 521 (in Chinese) [张民仓、王振邦 2006 物理学报 **55** 521]

[16] Chen G，Chen Z D，Lou Z M 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 279

[17] Li N，Ju G X ，Ren Z Z 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2520 (in Chinese) [李　宁、鞠国兴、任中洲 2005 物理学报 **54** 2520]

[18] Qiang W C 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 136

[19] Lu F L, Chen C Y 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1652 (in Chinese) [陆法林、陈昌远 2004 物理学报 **53** 1652]

[20] Zhang X A, Chen K, Duan Z L 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 42

[21] Gou J Y, Han J C, Wang R D 2006 *Phys*. *Lett*. A **353** 378

[22] Lu F L, Chen C Y, Sun D S 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 463

[23] Dong S H, Sun G H, Lozada-Cassou M 2005 *Phys*. *Lett*. A **340** 94

[24] Zhang M C, Wang Z B 2005 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **22** 2994

[25] Zhang M C, Wang Z B 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 6229 (in Chinese) [张民仓、王振邦 2006 物理学报 **55** 6229]

[26] Wang Z X, Guo D R 2000 *Introduction to Special Function* (Beijing: Peking Univ. Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 2000 特殊函数概论 北京 北京大学出版社)]

Bound state solutions of relativistic particles in a new ring-shaped non-harmonic oscillator potential

Zhang Min-Cang Wang Zhen-Bang

(*School of Physics and Information Technology*, *Shaanxi Normal University*, *Xi'an* 710062, *China*)

(Received 16 November 2006; revised manuscript received 11 December 2006)

Abstract

In this paper, a new ring-shaped non-harmonic oscillator potential is proposed. Under the condition of equal scalar and vector potentials, the exact bound solutions and energy equations of both the Klein-Gordon equation and Dirac equation for this oscillator potential are obtained. It is shown that the angular wave functions of Klein-Gordon equation are given by the hypergeometric functions and the radial wave functions are expressed in terms of the confluent hypergeometric functions or general Laguerre polynomial. The spinner wave functions of the Dirac equation are constructed with the of the Klein-Gordon equation.

Keywords: ring-shaped non-harmonic oscillator potential, Klein-Gordon equation, Dirac equation, bound state

PACC: 0365