第 56 卷 第 7 期 2007 年 7 月
1000-3290/2007/56(07)/3723-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.7,July,2007
©2007 Chin.Phys.Soc.

带有整体磁单极子的 Barriola-Vilenkin 黑洞时空中静质量不为零的粒子的量子隧穿辐射*

孟庆苗† 苏九清 蒋继建

(菏泽学院物理系,菏泽 274015)

(2006 年 8 月 7 日收到;2006 年 12 月 10 日收到修改稿)

利用量子隧穿方法研究了带有整体磁单极子的 Barriola-Vilenkin 黑洞时空中静质量不为零的粒子的隧穿辐射,计算出量子隧穿辐射谱与 Bekenstein-Hawking 熵变有关,且与无质量粒子的出射率具有相同函数形式,所得结果满足幺正性原理.

关键词:Barriola-Vilenkin 黑洞,Painlevé 坐标,能量守恒,量子隧穿辐射

PACC:0420,9760L

1. 引 言

1975 年,Hawking 在时空背景不变的前提下,证明了黑洞具有热辐射,且辐射谱为纯热谱[1]. Hawking 辐射表明,黑洞在向外辐射的过程中不包含任何信息,这将危及到量子力学的幺正性. 2000 年 Parikh 和 Wilczek 考虑辐射粒子的自引力作用,将黑洞的 Hawking 辐射理解成一种量子隧穿,提出了一种计算黑洞 Hawking 辐射修正谱的半经典方法[2]. 用该方法计算无质量的粒子穿过 Schwarzschild 黑洞和 R-N 黑洞的出射修正谱,得到了辐射谱偏离纯热谱满足幺正原理的结论. 随后的一些工作[3—12]都说明了该方法的有效性. 文献[13—15]把工作推广到一般轴对称黑洞,得到了与 Parikh 结论完全相符的结果. 最近,任军、赵峥等人又将工作推广到带有拓扑缺陷的黑洞[16—18],张靖仪、赵峥研究了无拓扑缺陷黑洞时空中静止质量不为零的粒子穿过事件视界的出射率[19],均得到了预期的结果. 为使研究结果更具有普遍意义,本文进一步研究了静止质量不为零的粒子穿过带有拓扑缺陷的 Barriola-Vilenkin 黑洞事件视界的出射率. 由于 Barriola-Vilenkin 黑洞时空中存在整体磁单极子,黑洞的质量不等于它的质量参数,这带来了一些特殊的问题,与没有拓扑缺陷时比较,黑洞的熵和黑洞周围时空中沿测地线运动的粒子能量都多了一个因子$(1-8\pi\eta^2)$. 经过计算,我们成功地得到了粒子的隧穿率与粒子出射前后黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵差有关,辐射谱偏离纯热谱,满足幺正原理.

2. Painlevé 坐标变换下的 Barriola-Vilenkin 时空

在自然单位制中,Barriola-Vilenkin 黑洞外部时空度规为[20,21]

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\frac{(1-8\pi\eta^2)(r-r_\mathrm{H})}{r}\mathrm{d}t_\mathrm{s}^2\\&+\frac{r}{(1-8\pi\eta^2)(r-r_\mathrm{H})}\mathrm{d}r^2\\&+r^2(\mathrm{d}\theta^2+\sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2),\end{aligned}\tag{1}$$

式中 t_s 为 Barriola-Vilenkin 时空中的时间坐标,$r_\mathrm{H}=\dfrac{2M}{1-8\pi\eta^2}$为黑洞的事件视界,$\eta$ 为对称性破缺的能量尺度. 从(1)式度规表达式中不难看出,在事件视界处有坐标奇性. 为了研究粒子在黑洞事件视界处的量子隧穿辐射,必须消除视界坐标处的奇性,因此作 Painlevé 坐标变换[22]

$$t_\mathrm{s}=t+f(r).\tag{2}$$

(2)式的微分形式为

* 菏泽学院科学研究基金(批准号:XY06WL01)资助的课题.

† E-mail:mengqingmiao@yahoo.com.cn

$$\mathrm{d}t_{\mathrm{s}} = \mathrm{d}t + f'(r)\mathrm{d}r, \tag{3}$$

其中 $f'(r) = \frac{\mathrm{d}f(r)}{\mathrm{d}r}$，令

$$g(r) = \frac{2M}{r} + 8\pi\eta^2, \tag{4}$$

则线元(1)式可化为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-[1-g(r)]\mathrm{d}t^2 \\ &-2[1-g(r)]f'(r)\mathrm{d}t\mathrm{d}r \\ &+\left\{\frac{1}{1-g(r)}-[1-g(r)]f'^2(r)\right\}\mathrm{d}r^2 \\ &+r^2\mathrm{d}\Omega^2,\end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\mathrm{d}\Omega^2 = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\mathrm{d}\varphi^2$. 为在等时面的径向使用 Schrödinger 方程和 WKB 近似，度规在径向必须是欧氏平直的，考虑到某一时空片上的三维空间超曲面是径向欧氏化的，则可令

$$\frac{1}{1-g(r)} - [1-g(r)]f'^2(r) = 1. \tag{6}$$

将(4)式和(6)式代入(5)式，可得到 Painlevé 坐标系下的 Barriola-Vilenkin 黑洞的时空线元

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 = &-\left(1-8\pi\eta^2-\frac{2M}{r}\right)\mathrm{d}t^2 \\ &+2\sqrt{\frac{2M}{r}+8\pi\eta^2}\mathrm{d}t\mathrm{d}r+\mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\Omega^2.\end{aligned} \tag{7}$$

容易看出，黑洞视界处的坐标奇异性已被消除. 在(7)式中取 t 为常数，则度规将变成三维欧氏度规. 在取定 Painlevé 坐标系的情况下，时空中存在类时 Killing 矢量，因而时空稳态. 这些特征对于研究黑洞的量子隧穿辐射提供了优越的条件.

由(7)式容易求得类光测地线方程为

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2M}{r}+8\pi\eta^2}, \tag{8}$$

式中正号对应出射粒子，负号对应入射粒子.

3. 事件视界处静止质量不为零的粒子的量子隧穿辐射

3.1. 相速度和群速度

在量子力学中，人们普遍认为粒子作隧穿是一个瞬时过程，对于有静止质量的粒子，为了简便，可将其看成是球面德布罗意波(德布罗意 S 波). 由于 Painlevé-Barriola-Vilenkin 时空是稳定的，且时空片是欧氏的，因而 Schrödinger 方程成立，我们可以用平直时空中非相对论的方法来处理，按照 WKB 法其近似波动方程为

$$\psi(r,t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\int_{r_i-\varepsilon}^{r}P_r\mathrm{d}r-\omega t\right)}, \tag{9}$$

式中 $r_i-\varepsilon$ 表征粒子的初始位置，P_r 为与 r 对应的正则动量，ω 对应着辐射正能粒子的能量. 取某一特定的相位 ϕ_0 进行研究，令

$$\int_{r_i-\varepsilon}^{r}P_r\mathrm{d}r - \omega t = \phi_0, \tag{10}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \dot{r} = \frac{\omega}{k}, \tag{11}$$

式中 k 为德布罗意波的波数，$\dot{r}$ 为相速度，其群速度为

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}r_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}, \tag{12}$$

式中 r_{c} 表示粒子位置，$\mathrm{d}r_{\mathrm{c}}$ 表示粒子的位移，德布罗意波的群速度 v_{g} 和相速度 v_{p} 的关系为

$$\dot{r} = v_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}v_{\mathrm{g}}. \tag{13}$$

根据 Parikh 的量子隧穿模型，粒子进入势垒和穿出势垒是两个同时事件，按照朗道坐标钟同步理论，在一个作了 3+1 分解的时空，同时发生在异地的两事件的坐标时之差为[23]

$$\Delta T = -\int\frac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i, (i=1,2,3). \tag{14}$$

如果时空度规满足如下关系[24]：

$$\frac{\partial}{\partial x^j}\left(-\frac{g_{0i}}{g_{00}}\right) = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{g_{0j}}{g_{00}}\right), (i,j=1,2,3), \tag{15}$$

则(14)式对应的积分将与路径无关，因而是可以定义坐标钟同时的. 显然在 Painlevé 坐标系下的线元(7)满足方程(15). 即线元(7)满足对钟条件，这一点对下面的研究是非常重要的. 作隧穿辐射的粒子进入势垒和穿出势垒这两个同时事件的坐标时之差为

$$\mathrm{d}t = -\frac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i = -\frac{g_{01}}{g_{00}}\mathrm{d}r_{\mathrm{c}}, (\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\varphi = 0), \tag{16}$$

由(16)式可求出其群速度为

$$v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}r_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}t} = -\frac{g_{00}}{g_{01}}, \tag{17}$$

由(7)式(13)式(17)式可得

$$v_{\mathrm{p}} = \dot{r} = \frac{\left(1-\frac{2M}{r}-8\pi\eta^2\right)}{2\sqrt{\frac{2M}{r}+8\pi\eta^2}}. \tag{18}$$

当黑洞辐射一个能量为 ω 的正能量粒子后，考虑粒子自引力的影响时，方程(18)应改写为

$$\dot{r} = \frac{\left[1-\frac{2(M-\omega)}{r}-8\pi\eta^2\right]}{2\sqrt{\frac{2(M-\omega)}{r}+8\pi\eta^2}}. \tag{19}$$

3.2. 隧穿概率

在半经典极限下，按 WKB 法，粒子贯穿势垒的概率 Γ 与作用量虚部 S 的关系为[25]

$$\Gamma \sim e^{-2\mathrm{Im}S}, \tag{20}$$

其中作用量虚部为

$$\mathrm{Im}S = \mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f} P_r \mathrm{d}r = \mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f}\int_0^{P_r} \mathrm{d}P_r' \mathrm{d}r, \tag{21}$$

式中 P_r 为与 r 对应的正则动量，r_i 和 r_f 分别对应粒子出射前后瞬间所在的位置．为了计算(21)式的积分，利用 Hamilton 方程将对 $\mathrm{d}P_r$ 的积分换成对 $\mathrm{d}H$ 的积分，由

$$\dot{r} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}P_r} = \frac{\mathrm{d}(E-\omega)}{\mathrm{d}P_r} = -\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}P_r}, \tag{22}$$

得

$$\mathrm{d}P_r = -\frac{\mathrm{d}\omega}{\dot{r}}, \tag{23}$$

式中 E 表示物质系统的总能量，$E-\omega$ 表示黑洞在出射一个粒子后的能量，粒子出射过程能量守恒，即总能量为一恒量．将(23)式代入(21)式得

$$\mathrm{Im}S = -\mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f}\int_0^{\omega} \frac{\mathrm{d}\omega'}{\dot{r}}\mathrm{d}r. \tag{24}$$

将(19)式代入(24)式得

$$\mathrm{Im}S = -\mathrm{Im}\int_{r_i}^{r_f}\int_0^{\omega} \frac{2\sqrt{\frac{2(M-\omega')}{r}+8\pi\eta^2}}{\left(1-\frac{2(M-\omega')}{r}-8\pi\eta^2\right)}\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}r. \tag{25}$$

交换积分顺序，我们发现被积函数在 $r=\frac{2(M-\omega')}{1-8\pi\eta^2}$ 处发散．对上述积分进行正规化处理，将 r 复化成复平面，此时 $r=\frac{2(M-\omega')}{1-8\pi\eta^2}$ 为一个单极点，为了使正能解随时间衰减，选积分围线沿上半复平面，并完成对 r 的积分得

$$\mathrm{Im}S = \int_0^{\omega} \frac{4\pi(M-\omega')}{(1-8\pi\eta^2)^2}\mathrm{d}\omega'. \tag{26}$$

完成对 ω' 的积分得

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}S &= \frac{4\pi M\omega}{(1-8\pi\eta^2)^2}\left(1-\frac{\omega}{2M}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\Delta S_{\mathrm{B\text{-}H}},\end{aligned} \tag{27}$$

式中 $\Delta S_{\mathrm{B\text{-}H}}$ 表示粒子出射前后黑洞的 Bekenstein-Hawking 熵变．将(27)式代入(20)式可求得静质量不为零的粒子在黑洞视界处的出射率

$$\begin{aligned}\Gamma \sim e^{-2\mathrm{Im}S} &= e^{-\frac{8\pi M\omega}{(1-8\pi\eta^2)^2}\left(1-\frac{\omega}{2M}\right)}\\ &= e^{\Delta S_{\mathrm{B\text{-}H}}}.\end{aligned} \tag{28}$$

显然量子隧穿辐射谱不再是严格的纯热谱．出射谱满足量子力学中的幺正性原理，且与文献[26]得到的无质量粒子的出射谱具有相同的函数形式．当 $\eta=0$ 时，Barriola-Vilenkin 黑洞退回到 Schwarzschild 黑洞，由(28)式得

$$\Gamma \sim e^{-2\mathrm{Im}S} = e^{-8\pi\omega\left(M-\frac{\omega}{2}\right)} = e^{\Delta S_{\mathrm{B\text{-}H}}}. \tag{29}$$

(29)式为 Schwarzschild 黑洞的量子隧穿出射率，此结果与已知结果一致[2]．

4. 结　论

计算结果表明，粒子在黑洞视界处隧穿辐射谱不再是严格的纯热谱，粒子的出射率与黑洞熵变的指数成正比，隧穿率满足量子力学中的幺正性原理，得到的静止质量不为零的粒子在黑洞视界处的出射率与无质量粒子的出射率具有完全相同的函数形式．

谨向张靖仪教授赵峥教授表示衷心的感谢．

[1] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199

[2] Parikh M K, Wilczek F 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5042

[3] Hemming S, Keski-Vakkuri E 2001 *Phys. Rev.* D **64** 044006

[4] Medved A J M 2002 *Phys. Rev.* D **66** 124009

[5] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Mod. Phys. Lett.* A **20** 1673

[6] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Nucl. Phys.* B **725** 173

[7] Han Y W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5018 (in Chinese) [韩亦文 2005 物理学报 **54** 5018]

[8] Li H L, Jiang Q Q, Yang S Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 539 (in Chinese) [李慧玲、蒋青权、杨树政 2006 物理学报 **55** 539]

[9] Jiang Q Q, Yang S Z, Li H L 2005 *Chin. Phys.* **14** 1736

[10] Ren J, Zhao Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 292

[11] Jiang Q Q, Yang S Z, Wu S Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2523

[12] Zhang J Y, Zhao Z 2005 *Phys. Lett.* B **618** 14

[13] Jiang Q Q, Yang S Z, Chen D Y 2006 *Chin. Phys.* **15** 1709

[14] Jiang Q Q, Wu S Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4428 (in Chinese) [蒋青权、吴双清 2006 物理学报 **55** 4428]

[15] Yang S Z, Jiang Q Q, Li H L 2005 *Chin. Phys.* **14** 2411

[16] Ren J, Zhao Z, Gao C J 2006 *G. R. G.* **28** 387

[17] Cao J L, Ren J, Yang B, Zhao Z 2006 *J. Beijing Normal Univ.* (Nature Science) **42** 276 (in Chinese) [曹江陵、任 军、杨 波、赵 峥 2006 北京师范大学学报(自然科学版) **42** 276]

[18] Chen D Y, Jiang Q Q, Li H L, Yang S Z 2006 *Chin. Phys.* **15** 1425

[19] Zhang J Y, Zhao Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3796 (in Chinese) [张静仪、赵 峥 2006 物理学报 **55** 3796]

[20] Barriola M, Vilenkin A 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 341

[21] Li G Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 3673 (in Chinese) [李固强 2004 物理学报 **53** 3673]

[22] Painlevé P, Hebd C R 1921 *Seances Acad. Sci.* **173** 677

[23] Landan L D, Lifshitz E M 1975 *The Classical Theory of Field* (London: Pergamon Press)

[24] Zhang H S, Zhao Z 2001 *J. Beijing Normal Univ.* (Nature Science) **37** 471 (in Chinese) [张宏升、赵 峥 2001 北京师范大学学报(自然科学版) **37** 471]

[25] Kraus P, Keski-Vakkuri E 1997 *Nucl. Phys.* B **491** 219

[26] Liu M Q, Yang S Z 2005 *J. Yunnan Univ.* (Nature Science) **27** 471 (in Chinese) [刘门全、杨树政 2005 云南大学学报(自然科学版) **27** 471]

Massive particle quantum tunneling radiation of Barriola-Vilenkin black hole with global monopole*

Meng Qing-Miao† Su Jiu-Qing Jiang Ji-Jian

(*Department of Physics, Heze University, Heze* 274015, *China*)

(Received 7 August 2006; revised manuscript received 10 December 2006)

Abstract

The quantum tunneling framework is adopted to investigate tunneling radiation of Barriola-Vilenkin black hole with a global monopole. We obtain a conclusion that the emission rate of massive particles is related with the change of Bekenstein-Hawking entropy. The emission rates of massless and massive particles take the same functional form. It is consistent with the underlying unitary theory.

Keywords: Barriola-Vilenkin black hole, Painlevé coordinates, energy conservation, quantum tunneling radiation

PACC: 0420, 9760L

* Project supported by the Science Foundation of Heze University (Grant No. XY06WL01).

† E-mail: mengqingmiao@yahoo.com.cn