第 56 卷 第 7 期 2007 年 7 月
1000-3290/2007/56(07)/3727-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.7,July,2007
©2007 Chin.Phys.Soc.

完全非弹性蹦球的动力学行为*

姜泽辉† 郑瑞华 赵海发 吴 晶

(哈尔滨工业大学物理系,哈尔滨 150001)

(2005 年 11 月 29 日收到;2006 年 11 月 16 日收到修改稿)

对振动台面上的完全非弹性球的蹦跳行为进行了初步分析.受约化振动加速度的控制,球的运动可以表现出一系列倍周期分岔过程.对几种典型的倍周期运动及分岔情况进行了讨论.

关键词:蹦球,倍周期分岔,混沌,颗粒物质

PACC:0457,4660D,1130N

1.引 言

一个落在水平台面上的小球,在连续蹦跳若干次之后会静止下来.这是因为球与台面之间发生非弹性碰撞(碰撞恢复系数 e 介于 0 与 1 之间),致使球的动能不断衰减.但是,如果台面沿竖直方向做简谐振动,球的蹦跳运动将变得难以描述.通过碰撞小球可以获得或失去动能,导致球的能量可能连续累加,也可能以某种稳定的方式进行运动.研究表明,这一简单系统可以表现出复杂的混沌行为[1—14].

蹦球(bouncing ball)的运动是通过倍周期分岔进入混沌的.倍周期分岔过程受 e 和约化振动加速度 Γ 的控制,$\Gamma=(2\pi f)^2A/g$(f 和 A 分别为台面的振动频率和振幅,g 为重力加速度).当台面的振动频率与小球的蹦跳频率接近时,通过调节 A 或 f,可以得到小球的二倍周期运动,四倍周期运动……,直至混沌.这种倍周期分岔过程的分岔点近似符合费根保姆数[1,5,9,13](Feigenbaum constant,4.667…).虽然蹦球的运动可以通过牛顿定律确定,但方程的解析求解却较为困难,其复杂行为至今仍在讨论[15—17].

蹦球问题受到关注,与近年振动颗粒物质动力学行为的研究有关.尤其对于振动"颗粒气"(vibrated granular gases),颗粒的浓度较稀,可以将其看作由许多蹦球构成的系统.通过对蹦球行为的研究可以了解"颗粒气"的某些特性[14,17,18].对于振动颗粒床(granular beds),颗粒浓度较大,密堆积在一起,颗粒之间存在着频繁的非弹性碰撞.这导致颗粒能很快地消耗掉外界输入的动能.正如一包沙子落到地板上不会被反弹起来一样,颗粒床和台面(容器底)之间的碰撞可以看成是完全非弹性的.因此,可以通过完全非弹性蹦球($e=0$)来模仿振动颗粒床的整体运动[19—24].

完全非弹性蹦球的行为与一般的非弹性蹦球有很大差别.由于球与台面之间是完全非弹性碰撞,在某些时间段内球完全可以静止在台面上.而对一般的非弹性蹦球,虽然有时能够以很小的幅度在台面上连续蹦跳,但不可能完全静止在台面上[17,25].目前,对于完全非弹性蹦球动力学行为的了解仍不十分全面.已经证明,在 Γ 较小($\Gamma\leqslant7$)时,随着 Γ 的增加,完全非弹性蹦球的运动会出现二倍周期和四倍周期分岔[19—24].最近,Mehta 和 Luck[25,26] 在大 Γ 近似下($\Gamma\gg1$),通过建立近似映射方程分析了完全非弹性蹦球分岔序列的标度特性.认为蹦球的倍周期级联分岔(period-doubling cascade)会被突然打断,因为球最终会落入吸收区(完全非弹性碰撞造成).从而造成球的运动最终是周期性的,不存在混沌运动.

最近,我们在振动颗粒床中发现,颗粒对容器底的冲击力是倍周期分岔的[27—29].分岔序列为二倍周期,四倍周期,混沌,三倍周期,六倍周期,混沌,四倍周期,八倍周期,混沌等.分岔过程仅受 Γ 的控制.对于起初的二倍周期和四倍周期分岔,可以通过完

* 国家自然科学基金(批准号:10674035)和哈尔滨工业大学跨学科交叉性研究基金(批准号:HIT.MD2002.32)资助的课题.

† E-mail:zehuijiang@yahoo.com

全非弹性蹦球模型给出解释[19—24]，但对其后的分岔过程，文献中讨论的较少. 在论文[27—29]中，我们利用完全非弹性蹦球模型对后面的高阶分岔过程进行了讨论，但有关完全非弹性蹦球的内容只是结论性的，较为简略. 本文将做适当的展开讨论，并对颗粒床实验[25—27]中涉及到的几种典型倍周期分岔情况给出说明.

2. 模 型

假定蹦球仅在竖直方向上运动，而且碰撞对台面的运动不产生影响（台面的质量远大于蹦球的质量）. 台面沿竖直方向做简谐运动，其位移为

$$x(t) = A\sin(\omega t), \tag{1}$$

其中，$\omega = 2\pi f$. A 和 f 分别为台面的振幅和振动频率. 假设在 $t = 0$ 时刻，小球静止在台面上并随台面一起运动. 在 $t_0 = \sin^{-1}(1/\Gamma)$ 时刻，台面的加速度为 $-g$（向上为正方向）. 此时，小球受到的支撑力为零，从而被抛起. 小球的起跳速度为此刻台面的速度 $\dot{x}(t_0) = A\omega\cos(\omega t_0)$. 之后，小球的运动轨迹由下式决定：

$$s(t) = A\omega\cos(\omega t_0)(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2. \tag{2}$$

受重力的作用，小球在空中自由飞行一段时间后，会再次落到台面上. 此刻，小球可以停留在台面上，也可以立即跳起. 如果此时起跳条件 $\ddot{x}(t) \leqslant -g$ 得到满足，小球将立刻被抛起（起跳速度为此刻台面的速度 $\dot{x}(t)$）. 如果此时 $\ddot{x}(t) > -g$，小球将'粘附'在台面上随同台面一起运动，等待下一个振动周期内的起跳机会. 相应地，台面的位相可以划分为发射区[25, 26]（$\ddot{x}(t) \leqslant -g$）和吸收区（$\ddot{x}(t) > -g$）. 小球落入发射区就立刻跳起，落入吸收区就与台面一起运动，对以前的运动状态失去'记忆'，直到遇到下一个振动周期内的发射区，再次跳起并重复以前的运动. 这导致小球可以产生倍周期运动.

对一定的 Γ 值，小球在落入吸收区之前，可以连续与台面碰撞（在发射区）若干次. 第 k 次碰撞的时刻 t_k 可由小球和台面的相对位移为零这一条件来确定，

$$A\sin(\omega t_{k-1}) + A\omega\cos(\omega t_{k-1})(t_k - t_{k-1}) - \frac{1}{2}g(t_k - t_{k-1})^2 = A\sin(\omega t_k), \tag{3}$$

其中，t_{k-1} 为上次碰撞的时刻. 由这一递推关系即可计算从 t_0 起小球每次碰撞的时刻和运动轨迹. 图 1 给出了 Γ 由小增大时小球的运动轨迹. 图中，时间被振动周期 $T(=1/f)$ 约化，位移被振幅 A 约化. 很明显，小球的运动是倍周期的. 这里，倍周期指的是，小球完成一次重复运动所需的时间是台面振动周期的整数倍. 例如，图 1(b) 中，$\Gamma = 4.0$ 时，小球被抛起并在空中自由飞行一段时间 Δt_1（$\Delta t_1 > T$）后，再次与台面碰撞（在发射区）并被抛起. 再飞行一段时间 Δt_2（$\Delta t_2 < T$）后，直接落入吸收区，之后随台面一起运动（运动时间为 $\Delta t'$）. 在下一个振动周期，又遇到发射区，再次被抛起并重复前面的运动. 这样，小球完成一次重复运动所需的时间为 $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t' = 2T$，即为二倍周期运动. 其他几种情况类同.

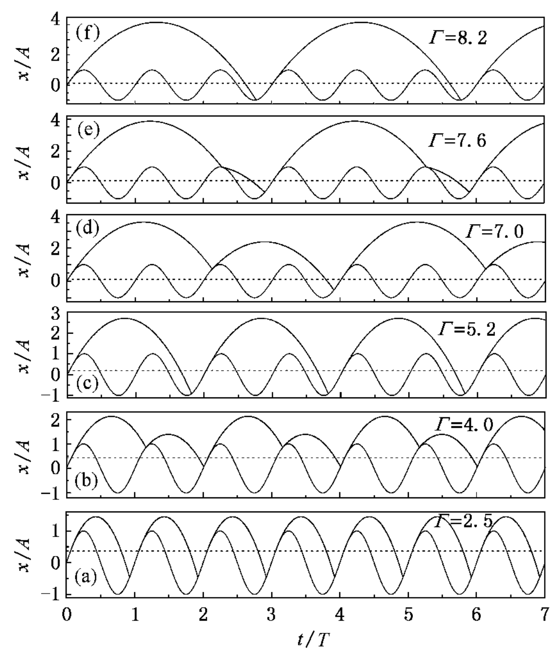

图 1 不同 Γ 值时，小球的倍周期运动（由下至上，小球的运动是一倍周期，二倍周期（两跳），二倍周期（一跳），四倍周期（两跳），三倍周期（两跳），三倍周期（一跳）. 正弦曲线表示台面的位移. 虚线表示 $x(t_0)$ 的位置，它将台面的振动相位分为吸收区（虚线以下）和发射区（虚线以上））

为了反映蹦球的倍周期分岔过程，这里着重计算小球的'着陆'速度 u 和在空中的自由飞行时间 $t_k - t_{k-1}$. 由于小球与台面之间是完全非弹性碰撞，碰撞之后二者的速度相同（相对速度为零），因此碰撞时小球的入射速度（或'着陆'速度）决定碰撞强度，而碰撞强度（冲击力）是实验上较容易测定的物理量. 小球相对台面的'着陆'速度由下式确定：

$$u = A\omega\cos\omega t_k - (A\omega\cos\omega t_{k-1} - g(t_k - t_{k-1})). \tag{4}$$

图 2 给出了 u 随 Γ 的变化情况，其中 u 已被 gT 约化. 由该图可以看出，倍周期分岔发生在约化速度取整数的地方. 对应的分岔点，依次取值为 $\Gamma_2 = 3.72$，$\Gamma_4 = 6.59$，$\Gamma_6 = 9.63$，$\Gamma_8 = 12.72$，$\Gamma_{10} = 15.83$，$\Gamma_{12} = 18.96$. 下标表示倍周期数. 从这些点起 u 将被赋予两个值，也就是经过连续两跳完成一次倍周期运动. 可以证明（见下文），这组分岔点可以用公式表示为

$$\Gamma_{2n} = \sqrt{4 + n^2\pi^2}, \tag{5}$$

其中，$n = 1,2,3,\cdots$. 另一组临界点为，$\Gamma'_2 = 4.60$，$\Gamma'_3 = 7.79$，$\Gamma'_4 = 10.95$，$\Gamma'_5 = 14.10$，$\Gamma'_6 = 17.25$. 在这些点上，小球的‘着陆’速度为零，并且由两跳的倍周期运动过渡到一跳的倍周期运动（例如，图 1(b) 和 (c)；(e) 和 (f)）.

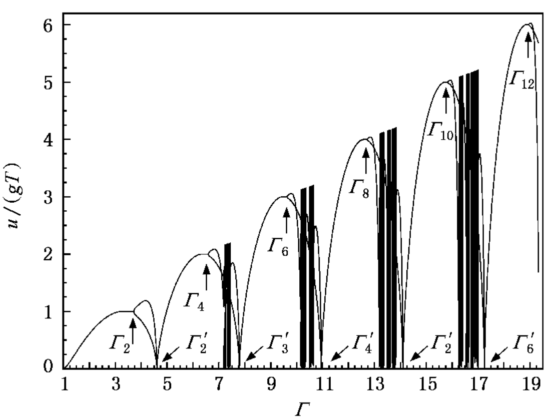

图 2　小球‘着陆’速度的分岔图（u 已被 gT 约化）

计算表明，分岔过程只受 Γ 的控制. 也就是，在不同频率下，逐渐增加振幅所得的分岔序列（及分岔点对应的 Γ 值）是相同的. 由图 2 可以看出，经二倍周期和四倍周期分岔之后，蹦球很快进入一个倍周期轨道密集区. 在这个区域内，倍周期运动对 Γ 依赖关系比较敏感，每一种倍周期运动的存在范围都比较窄. 继续增大 Γ，会突然进入一个两跳的三倍周期运动（如图 1(e)），然后是六倍周期运动，并迅速进入另一周期轨道密集区. 之后又是新的倍周期分岔序列. 由密集区进入两跳的倍周期运动的临界点分别为 $\Gamma_3 = 7.44$，$\Gamma_4 = 10.66$，$\Gamma_5 = 13.84$，$\Gamma_6 = 17.01$（图 2 中未标出）. 对于二倍周期和四倍周期之后的分岔过程，在以前的计算[17—22] 中没有明确标示出来.

图 3 给出了第一个倍周期运动密集区的放大图. 在这个区域内存在着自相似结构，同时可以看

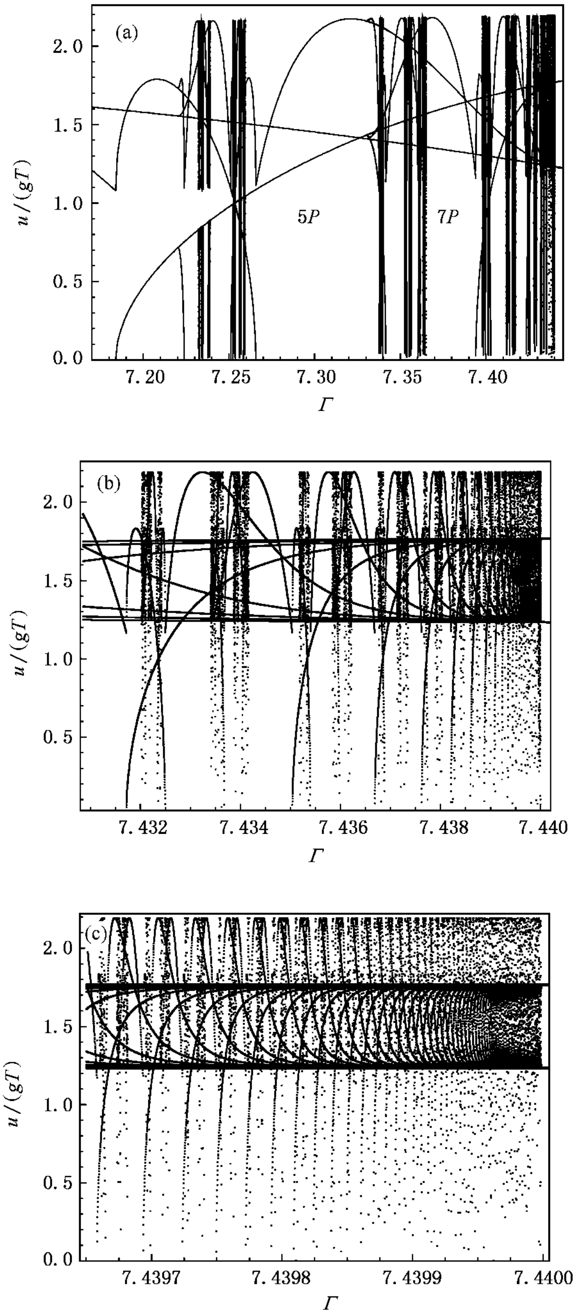

图 3　(a) 第一个倍周期运动密集区的放大图. $5P$ 和 $7P$ 分别表示五倍周期和七倍周期. (b) $\Gamma = 7.43$—7.44 的倍周期轨道. (c) $\Gamma = 7.43965$—7.44 的倍周期轨道

出，在这个区域内倍周期轨道随着 Γ 的增大变得越来越密集. 尤其在要离开密集区时，倍周期轨道变得非常致密，而且完成一次倍周期运动所需的时间逐渐加长. 例如，$\Gamma = 4.391$ 时，小球经过连续 24 跳落入吸收区，完成一个 35 倍周期运动（图 4 中实线）；$\Gamma = 4.395$ 时，完成一个 30 跳的 46 倍周期运动（图 4 中虚线）；$\Gamma = 4.44$ 时，连续跳跃 363 次落入吸收区.

这些情况中，开始时的若干次跳跃轨迹几乎重合（因为 Γ 值比较接近），而且近似于三倍周期运动，之后逐渐偏离，最终落入吸收区. 但是，随着 Γ 的进一步增大，连续跳跃的次数迅速增加，如，在 $\Gamma = 4.44001$ 时，跳跃 10^4 次仍未落入吸收区. 但增加到 $\Gamma = 7.4428921$ 时，仅两跳既落入吸收区形成三倍周期运动.

在振动颗粒床中观察到的倍周期分岔过程与这里计算的相同[25—27]，只是轨道密集区对应为混沌. 实验中是通过压力传感器来测量颗粒对容器底的冲击作用，并通过快速傅里叶变换（FFT）对信号进行频谱分析. 倍周期运动对应分立谱，混沌对应连续带状（远高于噪声水平）谱[29]. 振动颗粒床实验中观察到混沌，可能是由于数据采样率（25 kS/s）不够高、实验系统中不可避免的"噪声"以及对长周期运动不易分辨等因素造成的.

另外，计算中假定了开始时蹦球是静止在台面上的，满足起跳条件时才跳起. 这实际上相当于对初始条件做了限制. 严格讲，应该让小球在任意时刻以任意速度落向台面，然后考察其运动情况. 但是，如果起始时，小球直接落入吸收区，无论初始状态如何，小球都随台面一起运动，之后遇到发射区时被抛起. 其后的运动情况与前面的计算相同. 如果起始时，小球落在发射区，小球会立刻被抛起，但起跳速度又变成这一时刻台面的速度（完全非弹性碰撞造成）. 我们的数值计算表明，其后小球可以连续蹦跳若干次，但最终仍会落入吸收区，其后的运动情况又与前面的计算相同. 文献[25，26]在大 Γ 近似下（$\Gamma \gg 1$），对分岔序列进行了标度分析. 认为完全非弹性蹦球不存在混沌运动（只有当 e 接近于 1 时才可能出现）. 这与我们的数值结果相同.

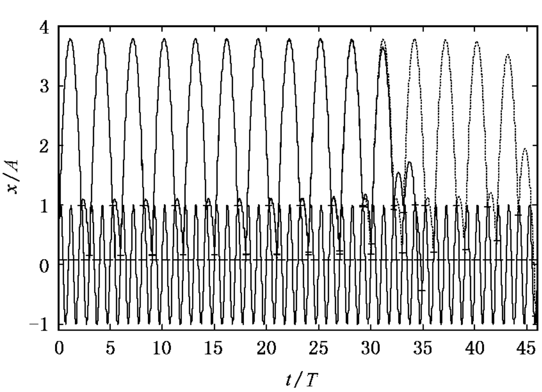

图 4　$\Gamma = 4.391$（实线）和 4.395（虚线）时，蹦球的运动情况（正弦线为台面的运动轨迹. 虚线表示 $x(t_0)$ 的位置）

图 5 给出了蹦球每次跳起在空中自由飞行的时间 $t_k - t_{k-1}$ 随 Γ 的变化情况. 飞行时间被台面振动周期 T 约化. 其分岔序列与 u 的情况完全相同. 但在密集区内会出现时间"禁带"，而且每条"禁带"的宽度基本不变. 以第一个密集区为例，开始时"禁带"宽度为 0.42，离开混沌区时宽度为 0.46. 出现禁带的原因是在这个范围内，球的最后一跳的轨迹会与台面的轨迹相切（在发射区内），而 Γ 的微小增加会导致蹦跳次数增加或减少一次. 增加或减少的一次跳跃的飞行时间正是禁带宽度.

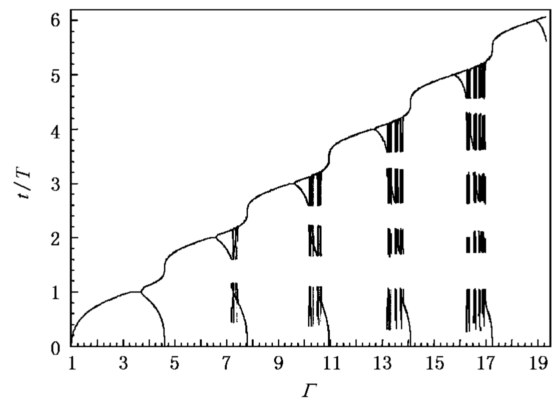

图 5　自由飞行时间的分岔图

3. 两种特殊情况的讨论

由图 2 和图 5 可以看出，在每个倍周期分岔（Γ_{2n}）之前，$u/(gT)$ 和 t/T 都有一个取值为整数的"平台"，而且"平台"的宽度随着 Γ 的增加越来越小. 由于 Γ 在这个范围内取值时，蹦球可以形成一种不落入吸收区的稳定倍周期运动. 以图 1(c) 的二倍周期为例，当 Γ 由 5.2 逐渐往上增加时，蹦球在吸收区的落点逐渐升高并接近发射区. 当 $\Gamma = \sqrt{1 + 2^2\pi^2}$ 时，落点刚好到达发射区（图中虚线所在位置），蹦球立刻起跳并进行稳定的重复跳跃. 当继续增加 Γ 时，蹦球开始时进行一高一低的跳跃，但这种跳跃并不稳定，逐渐演化成一种每次都跨越两个振动周期，跳跃高度相同的连续跳跃的二倍周期运动，见图 6.

可以证明，在各"平台区"内的这种每次跨越 m 个振动周期的连续跳跃（在发射区内），所形成的"平台"的宽度依次为 $\sqrt{1 + m^2\pi^2} \leqslant \Gamma \leqslant \sqrt{4 + m^2\pi^2}$，$m = 1, 2, 3, \cdots$.

对(3)式进行微分，并令 $\mathrm{d}t_k/\mathrm{d}t_{k-1}$ 的绝对值小于

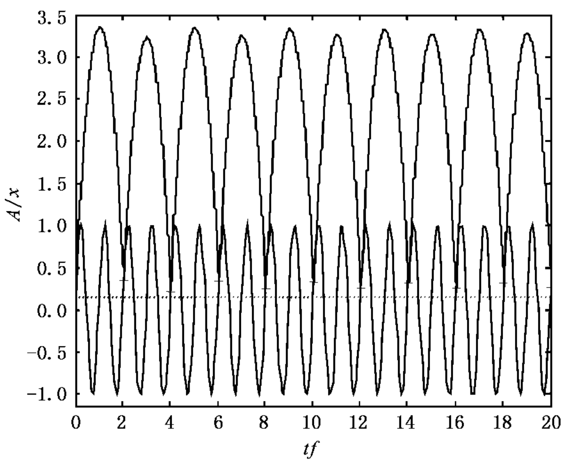

图6 $\Gamma = \sqrt{1+2^2\pi^2}+0.2 = 6.56$ 时,蹦球的运动轨迹(每次碰撞的位置由‘ + ’号标出,随着时间的推移碰撞位置逐渐持平.虚线表示 $x(t_0)$ 的位置)

等于 1,

$$\left|\frac{\mathrm{d}t_k}{\mathrm{d}t_{k-1}}\right| = \left|\frac{(g - A\omega^2\sin(\omega t_{k-1}))(t_k - t_{k-1})}{A\omega(\cos(\omega t_k) - \cos(\omega t_{k-1})) + g(t_k - t_{k-1})}\right| \leqslant 1. \tag{6}$$

此式表示每次跳跃的时间偏差会随着跳跃的进行越来越小,从而可以最终形成稳定的周期轨道.考虑到形成稳定运动时 $t_k - t_{k-1} = mT$, $m = 1,2,3,\cdots$,及现在的跳跃都是在初始起跳点 t_0 之上(发射区内)进行的,有

$$\sin(\omega t_{k-1}) = \sin(\omega t_k) \geqslant \sin(\omega t_0) = \frac{1}{\Gamma}. \tag{7}$$

另外,起跳速度和自由飞行时间还满足关系式, $\frac{2\Gamma}{\omega}\cos(\omega t_{k-1}) = mT = \frac{2\Gamma}{\omega}\cos(\omega t_k)$,即

$$\cos(\omega t_{k-1}) = \cos(\omega t_k) = \frac{m\pi}{\Gamma}. \tag{8}$$

综合(6)—(8)式可得

$$1 \leqslant |\Gamma\sin(\omega t_{k-1})| \leqslant 2. \tag{9}$$

再利用(8)式,得

$$\sqrt{1 + m^2\pi^2} \leqslant \Gamma \leqslant \sqrt{4 + m^2\pi^2}. \tag{10}$$

上式即为第 m 个‘ 平台 ’的宽度,显见随着 m 的增加这个宽度越来越小.在这个区间内,蹦球的最终运动状态是跳起位置和‘ 着陆 ’位置相同.(10)式右端对应的其实是(5)式给出倍周期分岔点.再利用(8)式很容易证明,球的约化‘ 着陆 ’速度($u/(gT)$)就是整数 m.当 Γ 大于这个分岔点时,蹦球开始时仍是一高一低的连续跳跃,但这种一高一低的运动方式最终会趋于稳定,形成稳定的不落入吸收区的倍周期运动.但是当 Γ 继续增大到一定程度时,蹦球就可以通过直接落入吸收区来产生倍周期运动(如图 1(b)和(e)).

蹦球的另一种典型的蹦跳方式是,从发射区的起始处跳起,飞行一段时间后,落在另一发射区的终结处,而且‘ 着陆 ’速度为零.也就是相对地面而言,起跳高度与‘ 着陆 ’高度相同.这些临界点对应图 2 中的 Γ'_k ($k = 2,3,4,\cdots$).作为一例,图 7 给出了 $\Gamma = 4.6033$ 时蹦球的运动轨迹,在‘ 着陆 ’处球的运动轨迹与台面的相切.

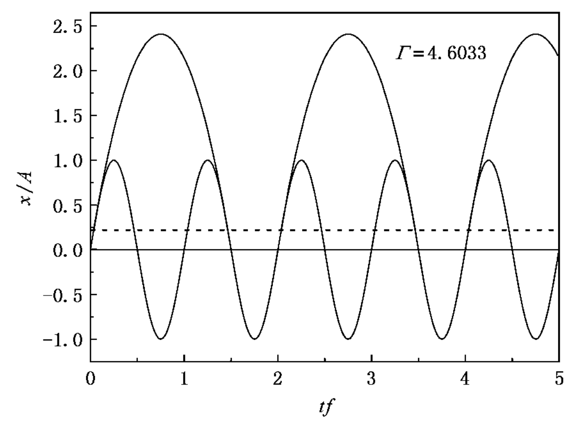

图7 $\Gamma = 4.6033$ 时蹦球的运动轨迹

对于一个以这种方式完成 k 倍周期运动的蹦球来说,它的自由飞行时间与起跳速度存在如下关系:

$$kT + \frac{\pi}{\omega} - 2t_0 = 2\frac{\nu(t_0)}{g} = \frac{2}{\omega}\sqrt{\Gamma^2 - 1}. \tag{11}$$

将 $t_0 = \sin^{-1}(1/\Gamma)$ 代入上式,可得

$$\sin^{-1}\frac{1}{\Gamma} = \sqrt{\Gamma^2 - 1} - \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi. \tag{12}$$

数值求解该方程,即可得到前文给出的临界值 Γ'_k.这些临界值可用如下近似式来表示:

$$\Gamma'_k \approx \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2\pi^2 - 1}, k = 2,3,4,5,\cdots \tag{13}$$

4.结 论

对完全非弹性蹦球产生倍周期运动的物理过程进行了分析,表明这种简单体系可以表现出非常复杂的行为.计算表明,随着 Γ 的增加,蹦球会出现一系列的高阶倍周期分岔.在一些较窄的 Γ 值范围内,存在倍周期运动密集区.在密集区内,蹦球的运动对 Γ 的依赖较为敏感.需要指出的是,这里所做

的讨论仍是初步的并不全面,许多问题还有待进一步分析.比如,Γ 进一步增大时倍周期分岔的情况如何,密集区内的运动有何特征等.另外,密集区内是否存在混沌还应寻找更直接的证据.

[1] Tufillaro N B, Abbott T, Reilly J 1992 *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos* (Addison-Wesley Publishing Company)
[2] Takahashi H, Suzuki A, Tanaka T 1969 *Powder Tech*. **2** 65
[3] Suzuki A, Takahashi H, Tanaka T 1969 *Powder Tech*. **2** 72
[4] Holmes P J 1982 *J*. *Sound Vibration* **84** 173
[5] Pierański P 1983 *J*. *Phys*. **44** 573
[6] Pierański P, Kowalik Z, Franaszek M 1985 *J*. *Phys*. **46** 681
[7] Pierański P, Małecki J 1986 *Phys*. *Rev*. A **34** 582
[8] Kowalik Z J, Franaszek M, Pierański P 1988 *Phys*. *Rev*. A **37** 4016
[9] Tufillaro N B, Albano A M 1986 *Am*. *J*. *Phys*. **54** 939
[10] Zimmerman R L, Celaschi S 1988 *Am*. *J*. *Phys*. **56** 1147
[11] Paskota M 1998 *Chaos*, *Solitons and Fractals* **9** 323
[12] Franaszek M, Isomaki H M 1991 *Phys*. *Rev*. A **43** 4231
[13] Tufillaro N B 1994 *Phys*. *Rev*. E **50** 4509
[14] Warr S, Cooke W, Ball R C, Huntley J M 1996 *Physica* A **231** 551
[15] Naylor M A, Sanchez P, Swift M R 2002 *Phys*. *Rev*. E **66** 57201
[16] Giusepponi S, Marchesoni F 2003 *Europhys*. *Lett*. **64** 36
[17] Giusepponi S, Marchesoni F, Borromeo M 2005 *Physica* A **351** 142
[18] Linz S J, Hänggi P 1994 *Phys*. *Rev*. E **50** 3464
[19] Brennen C E, Ghosh S, Wassgren C R 1996 *J*. *Appl*. *Mech*. **63** 156
[20] Wassgren C R, Brennen C E, Hunt M L 1996 *J*. *Appl*. *Mech*. **63** 712
[21] Luding S, Clement E, Blumen A, Rajchenbach J, Duran J 1994 *Phys*. *Rev*. E **49** 1634
[22] Melo F, Umbanhowar P B, Swinney H L 1995 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **75** 3838
[23] Moon S J, Shattuck M D, Bizon C, Goldman D I, Swift J B, Swinney H L 2001 *Phys*. *Rev*. E **65** 11301
[24] Miao G, Sui L, Wei R 2001 *Phys*. *Rev*. E **63** 31304
[25] Luck J M, Mehta A 1993 *Phys*. *Rev*. E **48** 3988
[26] Mehta A, Luck J M 1990 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **65** 393
[27] Jiang Z H, Li B, Zhao H ,F Wang Y Y, Dai Z B 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 281 (in Chinese) [姜泽辉、李 斌、赵海发、王运鹰、戴智斌 2005 物理学报 **54** 281]
[28] Jiang Z H, Liu X Y, Peng Y J, Li J W 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5692 (in Chinese) [姜泽辉、刘新影、彭亚晶、李建伟 2005 物理学报 **54** 5692]
[29] Jiang Z H, Wang Y Y, Wu J 2006 *Europhys*. *Lett*. **74** 417

Dynamical behavior of a completely inelastic ball bouncing on a vibrating plate*

Jiang Ze-Hui† Zheng Rui-Hua Zhao Hai-Fa Wu Jing

(*Department of Physics*, *Harbin Institute of Technology*, *Harbin* 150001, *China*)

(Received 29 November 2005; revised manuscript received 16 November 2006)

Abstract

A simple analysis for the behavior of a completely inelastic ball bouncing on a vertically vibrating plate has been given. Controlled by the normalized vibration acceleration, the ball undertakes a serials of subharmonic bifurcations. Several typical bifurcation processes are discussed.

Keywords: bouncing ball, period-doubling bifurcations, chaos, granular materials

PACC: 0457, 4660D, 1130N

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10674035) and the Multidiscipline Scientific Research Foundation of Harbin Institute of Technology (Grant No. HIT. MD2002.32).

† E-mail: zehuijiang@yahoo.com