第 56 卷 第 7 期 2007 年 7 月
1000-3290/2007/56(07)/3744-09
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.56, No.7, July, 2007

时变不确定时滞连续系统的鲁棒 H_∞ 保成本控制*

马跃超[1)†]　黄丽芳[1)]　张庆灵[2)]

1)(燕山大学理学院,秦皇岛　066004)

2)(东北大学系统科学研究所,沈阳　110004)

(2006 年 11 月 13 日收到;2006 年 12 月 27 日收到修改稿)

针对一类同时具有状态时滞和输入时滞的时变不确定连续系统,研究了 H_∞ 保成本状态反馈控制器的设计,假定其中的时变不确定性项是范数有界的,但不需要满足匹配条件.通过构造广义 Lyapunov 函数和线性矩阵不等式(LMI)方法,给出了系统可 H_∞ 鲁棒镇定同时满足保性能指标的一个充分条件,仅通过求解一个相应的线性矩阵不等式,就可得到鲁棒 H_∞ 保性能控制器使得闭环系统的一个保成本函数对所有允许的不确定参数有上界,并经过迭代,通过求解凸优化问题得到最优鲁棒 H_∞ 保性能控制器.最后用示例说明了该方法的有效性.

关键词:连续系统,时滞,H_∞ 鲁棒控制,保成本控制

PACC:0545

1. 引　言

系统控制理论目前有了很大的进展[1—3].不确定与时滞是物理系统中普遍存在的现象,如电力系统和转盘系统[4,5],是导致系统不稳定和性能恶化的主要原因.在过去的十几年来,不确定时滞系统的 H_∞ 控制和保成本控制问题,引起了人们的兴趣,有不同的方法处理过这方面的问题[6—8].在前几年 Ricaati 方程方法成为 H_∞ 控制分析与综合的一种普遍方法[9—11],但求解 Ricaati 方程时需要试凑调整一些参数和矩阵,计算繁琐.

最近,人们注意集中在用 LMI 方法对不确定连续时滞系统设计 H_∞ 控制器和保成本控制器.通过参数化可将不确定连续时滞系统转化为确定连续系统,利用 LMI 方法分别了设计 H_∞ 控制器及保成本控制器[12—15].但文献[12—15]都要求不确定参数满足一个严格的匹配条件,实际系统很难满足这样的条件.近年来,控制系统的多目标设计方法已越来越受到人们的重视[16].

在文献[9—16]的基础上,本文考虑了比文献[9—15]更一般的不确定连续时滞系统的 H_∞ 控制问题,并使系统满足一定的保成本指标.本文的不确定参数要求是有界的,但不需要满足匹配条件.基于 LMI 方法和广义 Lyapunov 函数,我们设计了一种 H_∞ 保成本鲁棒控制器.经过迭代,用 LMI 技术可求解出 H_∞ 保成本控制器,进而,最优 H_∞ 鲁棒保成本控制律可以用解一些凸优化问题被获得.克服了文献[9—11]在计算方面的缺欠,适用范围比文献[9—15]更广,所以更有实际意义.

2. 定义及问题描述

考虑下列系统

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) = {} & (A+\Delta A)x(t) \\
& + (A_1+\Delta A_1)x(t-d_1(t)) \\
& + (B+\Delta B)u(t) \\
& + (B_1+\Delta B_1)u(t-d_2(t)) \\
& + (B_w+\Delta B_w)w(t), \\
z(t) = {} & (C+\Delta C)x(t) \\
& + (C_1+\Delta C_1)x(t-d_1(t)) \\
& + (D+\Delta D)u(t)
\end{aligned}
$$

* 国家自然科学基金(批准号:60574011)资助的课题.

† E-mail:myc6363@126.com

$$+(D_1+\Delta D_1)u(t-d_2(t))$$
$$+(D_w+\Delta D_w)w(t),$$
$$x(t)=\varphi(t),t\in[-\tau,0],\quad(1)$$

其中 $x(t)\in R^n$ 是状态变量，$u(t)\in R^m$ 是控制输入，$w(t)\in R^p$ 是属于 $L_2[0,+\infty)$ 空间的干扰输入，$z(t)\in R^q$ 是被调输出. $A,A_1,B,B_1,C,C_1,D,D_1,B_w$ 和 D_w 分别是适当维数的常数矩阵，$\Delta A,\Delta A_1,\Delta B,\Delta B_1,\Delta C,\Delta C_1,\Delta D,\Delta D_1,\Delta B_w$ 和 ΔD_w 分别是不确定时值函数，它们表示了系统中随时间变化的参数不确定性，$d_1(t),d_2(t)$ 是时变的，分别表示系统的状态滞后和控制滞后，并满足 $0\leqslant d_1(t)<\infty$，$0\leqslant d_2(t)<\infty$，$\dot d_1(t)\leqslant\alpha<1$，$\dot d_2(t)\leqslant\beta<1$，$d_1(0)=\lambda$，$d_2(0)=\eta$，$\varphi(t)$ 是初始条件，我们假定所有状态是可测的. 假定系统的不确定性参数具有如下形式：

$$\Delta A=E_1F_1(t)H_1,$$
$$\Delta B=E_2F_2(t)H_2,$$
$$\Delta A_1=E_3F_3(t)H_3,$$
$$\Delta B_1=E_4F_4(t)H_4,$$
$$\Delta B_w=E_5F_5(t)H_5,$$
$$\Delta C=E_6F_6(t)H_6,$$
$$\Delta D=E_7F_7(t)H_7,$$
$$\Delta C_1=E_8F_8(t)H_8,$$
$$\Delta D_1=E_9F_9(t)H_9,$$
$$\Delta D_w=E_{10}F_{10}(t)H_{10},\quad(2)$$

其中 $E_i,H_i(i=1,2,\cdots,10)$ 是已知的适当维数的常数矩阵，$F_i(t)\in R^{r_i\times g_i}$ 是满足下述不等式约束的未知函数矩阵，

$$F_i^{\mathrm T}(t)F_i(t)\leq I_{g_i},i=1,2,\cdots,10,\quad(3)$$

$F_i(t)$ 的每个元素是 Lebesgue 可测的，$i=1,2,\cdots,10$.

系统(1)在控制律 $u=Kx(t)$ 作用下的闭环系统为

$$\dot x(t)=A_cx(t)+A_{c1}x(t-d_1(t))$$
$$+B_{c1}Kx(t-d_2(t))+B_{cw}w(t),$$
$$z(t)=C_cx(t)+C_{c1}x(t-d_1(t))\quad(4)$$
$$+D_{c1}Kx(t-d_2(t))+D_{cw}w(t),$$
$$x(t)=\varphi(t),t\in[-\tau,0],$$

其中

$$A_c=(A+\Delta A)+(B+\Delta B)K,$$
$$A_{c1}=A_1+\Delta A_1,$$
$$B_{c1}=B_1+\Delta B_1,$$
$$B_{cw}=B_w+\Delta B_w,$$
$$C_c=(C+\Delta C)+(D+\Delta D)K,$$
$$C_{c1}=C_1+\Delta C_1,$$
$$D_{c1}=D_1+\Delta D_1,$$
$$D_{cw}=D_w+\Delta D_w.$$

系统的性能指标定义为

$$J=\int_0^\infty[x^{\mathrm T}(t)Qx(t)+u^{\mathrm T}(t)Ru(t)]\mathrm dt,\quad(5)$$

其中 Q 和 R 是给定的对称正定加权矩阵.

定义 1　对于给定的常数 $\gamma>0$，对称正定矩阵 Q 和 R，状态反馈控制律 $u(t)=Kx(t)$ 称为系统(1)的 H_∞ 保成本控制律，如果对所有满足(3)式的参数不确定性，以下条件成立：

1)在 $w(t)=0$ 时，闭环系统(4)是渐近稳定的；

2)在零初始条件下，被调输出 $z(t)$ 满足 $\|z(t)\|_2\leqslant\gamma\|w(t)\|_2$，其中 $\|\cdot\|_2$ 表示 $L_2[0,+\infty)$ 中的标准范数；

3)在 $w(t)=0$ 条件下，闭环系统(4)的性能指标(5)是有界的.

引理 1(Schur 补)　对于给定的对称矩阵 $\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_{11}&\Phi_{12}\\\Phi_{21}&\Phi_{22}\end{bmatrix}$，其中 Φ_{11},Φ_{22} 是对称负定矩阵，则以下三个条件是等价的：

1) $\Phi<0$；

2) $\Phi_{11}<0,\Phi_{22}-\Phi_{21}\Phi_{11}^{-1}\Phi_{12}<0$；

3) $\Phi_{22}<0,\Phi_{11}-\Phi_{12}\Phi_{22}^{-1}\Phi_{21}<0$.

引理 2[17]　已知矩阵 Y,T 和 Q，其中 Y 是对称矩阵，以下不等式

$$Y+TF(\sigma)\theta+(TF(\sigma)\theta)^{\mathrm T}<0$$

对所有满足 $F^{\mathrm T}(\sigma)F(\sigma)\leqslant I$ 的 $F(\sigma)$ 成立，当且仅当存在标量 $\varepsilon>0$，使得

$$Y+\varepsilon TT^{\mathrm T}+\frac{1}{\varepsilon}\theta^{\mathrm T}\theta<0.$$

本文的目的是设计一个无记忆状态反馈鲁棒 H_∞ 保成本控制律 $u(t)=Kx(t)$，并获得最优解.

3. 主要结果

定理 1　对给定的常数 $\gamma>0$ 和性能指标(5)，系统(1)存在 γ-次优 H_∞ 保性能控制律 $u(t)=Kx(t)$ 的一个充分条件是存在对称正定矩阵 P,S_1 和 S_2 使得对所有允许的参数不确定性(3)，以下矩阵不等式成立：

$$\begin{bmatrix} Y & PA_c & PB_{cl} & PB_{cw} & C_c^{\mathrm{T}} \\ A_c^{\mathrm{T}}P & -(1-\alpha)S_1 & 0 & 0 & C_{cl}^{\mathrm{T}} \\ B_{cl}^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\beta)S_2 & 0 & D_{cl}^{\mathrm{T}} \\ B_{cw}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -\gamma^2 I_p & D_{cw}^{\mathrm{T}} \\ C_c & C_{cl} & D_{cl} & D_{cw} & I_q \end{bmatrix} < 0, \tag{6}$$

其中 $Y = A_c^{\mathrm{T}}P + PA_c + S_1 + K^{\mathrm{T}}S_2K + Q + K^{\mathrm{T}}RK$.

证明 如果存在正定矩阵 P，S_1 和 S_2 使不等式(6)成立. 对系统(1)采用控制律 $u(t) = Kx(t)$时的相应闭环系统(4)构造一个广义 Lyapunov 函数：

$$\begin{aligned} V(x(t)) &= x^{\mathrm{T}}(t)Px(t) \\ &\quad + \int_{t-d_1(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(\sigma)S_1x(\sigma)\mathrm{d}\sigma \\ &\quad + \int_{t-d_2(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(\sigma)K^{\mathrm{T}}S_2Kx(\sigma)\mathrm{d}\sigma, \end{aligned} \tag{7}$$

则 $V(x(t))$是正定的，在 $w(t) = 0$ 时，$V(x(t))$对时间的导数满足

$$\begin{aligned} \dot V(x(t)) &= x^{\mathrm{T}}(t)(A_c^{\mathrm{T}}P + PA_c)x(t) \\ &\quad + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_{c1}x(t - d1(t)) \\ &\quad + 2x^{\mathrm{T}}(t)PB_{c1}x(t - d_2(t)) \\ &\quad + x^{\mathrm{T}}(t)S_1x(t) - x^{\mathrm{T}}(t - d_1(t)) \\ &\quad \times S_1x(t - d_1(t))(1 - \dot d_1(t)) \\ &\quad + x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}S_2Kx(t) - x^{\mathrm{T}}(t - d_2(t))K^{\mathrm{T}} \\ &\quad \times S_2Kx(t - d_2(t))(1 - \dot d_2(t)) \\ &\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)(A_c^{\mathrm{T}}P + PA_c)x(t) \\ &\quad + 2x^{\mathrm{T}}(t)PA_{c1}x(t - d_1(t)) \\ &\quad + 2x^{\mathrm{T}}(t)PB_{c1}x(t - d_2(t)) \\ &\quad + x^{T}(t)S_1x(t) - x^{\mathrm{T}}(t - d_1(t)) \\ &\quad \times S_1x(t - d_1(t))(1 - \alpha) \\ &\quad + x^{\mathrm{T}}(t)K^{\mathrm{T}}S_2Kx(t) - x^{\mathrm{T}}(t - d_2(t))K^{\mathrm{T}} \\ &\quad \times S_2Kx(t - d_2(t))(1 - \beta) \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - d_1(t)) \\ Kx(t - d_2(t)) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} Y - Q - K^{\mathrm{T}}RK & PA_{c1} & PB_{c1} \\ A_{c1}^{\mathrm{T}}P & -(1-a)S_1 & 0 \\ B_{c1}^{\mathrm{T}}P & 0 & -(1-\beta)S_2 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - d_1(t)) \\ Kx(t - d_2(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由矩阵不等式(6)可得，对所有允许的不确定性(3)有

$$\begin{aligned} \dot V(x(t)) &< -x(t)(Q + K^{\mathrm{T}}RK)x(t) \\ &\leqslant -\lambda_{\min}(Q + K^{\mathrm{T}}RK)\| x(t) \|^2 < 0, \end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\lambda_{\min}(\cdot)$表示矩阵$(\cdot)$的最小特征值. 由 Lyapunov 稳定性理论，闭环系统(4)是渐近稳定的. 进而，由不等式(8)得到

$$-\dot V(t) > x(t)(Q + K^{\mathrm{T}}RK)x(t). \tag{9}$$

(9)式两边分别对 t 从 0 到 ∞ 积分，并利用系统的稳定性可得

$$\begin{aligned} J &\leqslant \varphi^{\mathrm{T}}(0)P\varphi(0) \\ &\quad + \int_{-\lambda}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\sigma)S_1\varphi(\sigma)d\sigma \\ &\quad + \int_{-\eta}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\sigma)K^{\mathrm{T}}S_2K\varphi(\sigma)\mathrm{d}\sigma. \end{aligned} \tag{10}$$

这就说明 $u(t) = Kx(t)$是系统(1)的一个保性能控制律.

由系统(4)的渐近稳定性，进而，对任意的 $w(t) \in L_2[0,\infty)$，

$$\begin{aligned} &\dot V(x(t)) + z^{\mathrm{T}}(t)z(t) - r^2w^{\mathrm{T}}(t)w(t) \\ &\leqslant \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - d_1(t)) \\ Kx(t - d_2(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} [G_1 + G_2^{\mathrm{T}}G_2] \\ &\quad \times \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - d_1(t)) \\ Kx(t - d_2(t)) \\ w(t) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$G_1=\begin{bmatrix} Y-Q-K^{\mathrm T}RK & PA_{c1} & PB_{c1} & PB_{cw}\\ A_{c1}^{\mathrm T}P & -(1-\alpha)S_1 & 0 & 0\\ B_{c1}^{\mathrm T}P & 0 & -(1-\beta)S_2 & 0\\ B_{cw}^{\mathrm T}P & 0 & 0 & -\gamma^2 I_p\end{bmatrix},$$

$$G_2=[C_c \quad C_{c1} \quad D_{c1} \quad D_{cw}].$$

应用引理 1（Schur 补），从矩阵不等式（6）可推出

$$\dot V(x(t))+z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2 w^{\mathrm T}(t)w(t)<0,\forall t\geqslant 0.$$

由零初始条件，可得

$$\int_0^\infty z^{\mathrm T}(t)z(t)-\gamma^2\int_0^\infty w^{\mathrm T}(t)w(t)<-V(\infty)\leqslant 0.$$

因此，对任意 $w(t)\in L_2[0,\infty)$，即得不等式

$$\| z(t)\|_2\leqslant\gamma\| w(t)\|_2.$$

证毕.

定理 2　对给定的常数 $\gamma>0$ 和系统性能指标 J，如果存在正常数 ε 和对称正定阵 X,M,T 以及矩阵 W，使得下面的 LMI 成立：

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3\\ T_1^{\mathrm T} & -\varepsilon I_s & 0\\ T_3^{\mathrm T} & 0 & T_4\end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

其中

$$T_1=\begin{bmatrix} \Pi & A_1M & B_1T & B_w & (CX+DW)^{\mathrm T}\\ MA_1^{\mathrm T} & -(1-\alpha)M & 0 & 0 & MC_1^{\mathrm T}\\ TB_1^{\mathrm T} & 0 & -(1-\beta)T & 0 & TD_1^{\mathrm T}\\ B_w^{\mathrm T} & 0 & 0 & -\gamma^2 I_p & D_w^{\mathrm T}\\ CX+DW & C_1M & D_1T & D_w & -I_q+\varepsilon\sum_{i=6}^{10}E_iE_i^{\mathrm T}\end{bmatrix},$$

$$T_2=\begin{bmatrix} XH_1^{\mathrm T} & W^{\mathrm T}H_2^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & XH_6^{\mathrm T} & W^{\mathrm T}H_7^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & MH_3^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & MH_8^{\mathrm T} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & TH_4^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & TH_9^{\mathrm T} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_5^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{10}^{\mathrm T}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$T_3=\begin{bmatrix} X & W^{\mathrm T} & X & W^{\mathrm T}\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$T_4=\begin{bmatrix} -M & 0 & 0 & 0\\ 0 & -T & 0 & 0\\ 0 & 0 & -Q^{-1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & -R^{-1}\end{bmatrix}.$$

这里 T_1 中的 $\Pi=AX+BW+(AX+BW)^{\mathrm T}+\varepsilon\sum_{i=1}^{5}E_iE_i^{\mathrm T}$. 进而，如果线性矩阵不等式（11）有可行解 ε,X,M,T,W，则

$$u(t)=WX^{-1}x(t)$$

是系统（1）的一个状态反馈控制律，相应的性能指标满足

$$J \leqslant \varphi^{\mathrm{T}}(0) X^{-1} \varphi(0) + \int_{-\lambda}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\sigma) M^{-1} \varphi(\sigma) \mathrm{d}\sigma + \int_{-\eta}^{0} \varphi^{\mathrm{T}}(\sigma) K^{\mathrm{T}} T^{-1} K \varphi(\sigma) \mathrm{d}\sigma . \tag{12}$$

证明 不等式(6)可写成

$$\begin{bmatrix} Y_1 & PA_1 & PB_1 & PB_w & (C+DK)^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}} P & -(1-\alpha) S_1 & 0 & 0 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}} P & 0 & -(1-\beta) S_2 & 0 & D_1^{\mathrm{T}} \\ B_w^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & -\gamma^2 I_p & D_w^{\mathrm{T}} \\ C+DK & C_1 & D_1 & D_w & -I_q \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (\Delta A+\Delta BK)^{\mathrm{T}} P + P(\Delta A+\Delta BK) & P\Delta A_1 & P\Delta B_1 & P\Delta B_w & (\Delta C+\Delta DK)^{\mathrm{T}} \\ \Delta A_1^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & 0 & \Delta C_1^{\mathrm{T}} \\ \Delta B_1^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & 0 & \Delta D_1^{\mathrm{T}} \\ \Delta B_w^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & 0 & \Delta D_w^{\mathrm{T}} \\ \Delta C+\Delta DK & \Delta C_1 & \Delta D_1 & \Delta D_w & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Y_1 & PA_1 & PB_1 & PB_w & (C+DK)^{\mathrm{T}} \\ A_1^{\mathrm{T}} P & -(1-\alpha) S_1 & 0 & 0 & C_1^{\mathrm{T}} \\ B_1^{\mathrm{T}} P & 0 & -(1-\beta) S_2 & 0 & D_1^{\mathrm{T}} \\ B_w^{\mathrm{T}} P & 0 & 0 & -\gamma^2 I_p & D_w^{\mathrm{T}} \\ C+DK & C_1 & D_1 & D_w & -I_q \end{bmatrix} + O_1 O_2 O_3 + O_3^{\mathrm{T}} O_2^{\mathrm{T}} O_1^{\mathrm{T}} < 0,$$

其中

$$Y_1 = (A+BK)^{\mathrm{T}} P + P(A+BK) + S_1 + K^{\mathrm{T}} S_2 K + Q + K^{\mathrm{T}} RK,$$

$$O_1 = \begin{bmatrix} PE_1 & PE_2 & PE_3 & PE_4 & PE_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_6 & E_7 & E_8 & E_9 & E_{10} \end{bmatrix},$$

$$O_2 = \mathrm{diag}(F_1(t), F_2(t), F_3(t), F_4(t), F_5(t), F_6(t), F_7(t), F_8(t), F_9(t), F_{10}(t)),$$

$$O_3 = \begin{bmatrix} H_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_2 K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_5 & 0 \\ H_6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_7 K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

由引理 2 再根据引理 1,上式对所有允许的不确定性(3)成立,当且仅当存在标量 ε,使得

$$\begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2^{\mathrm{T}} & -\varepsilon I_s \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$

其中

$$N_1=\begin{bmatrix} Y_1+\varepsilon\sum_{i=1}^{5}PE_iE_i^{\mathrm T}P & PA_1 & PB_1 & PB_w & (C+DK)^{\mathrm T}\\ A_1^{\mathrm T}P & -(1-\alpha)S_1 & 0 & 0 & C_1^{\mathrm T}\\ B_1^{\mathrm T}P & 0 & -(1-\beta)S_2 & 0 & D_1^{\mathrm T}\\ B_w^{\mathrm T}P & 0 & 0 & -\gamma^2I_p & D_w^{\mathrm T}\\ C+DK & C_1 & D_1 & D_w & -I_q+\varepsilon\sum_{i=6}^{10}E_iE_i^{\mathrm T}\end{bmatrix},$$

$$N_2=\begin{bmatrix} H_1^{\mathrm T} & (H_2K)^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & H_6^{\mathrm T} & (H_7K)^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & H_3^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_8^{\mathrm T} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & H_4^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_9^{\mathrm T} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & H_5^{\mathrm T} & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{10}^{\mathrm T}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

对以上不等式左乘和右乘矩阵

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & & & & & \\ & S_1^{-1} & & & & \\ & & S_2^{-1} & & & \\ & & & I_p & & \\ & & & & I_q & \\ & & & & & I_s\end{bmatrix},$$

并记 $X=P^{-1}$，$W=KP^{-1}$，$M=S_1^{-1}$，$T=S_2^{-1}$，再应用矩阵的 Schur 补性质即引理 1，可得不等式(11). 进而，如果不等式(11)有一个可行解 ε，X，M，T，以及矩阵 W，则 $u(t)=WX^{-1}x(t)$ 是系统的一个状态反馈鲁棒保成本控制律，相应的闭环系统性能指标的上界是

$$\begin{aligned} J\leqslant{}&\varphi^{\mathrm T}(0)X^{-1}\varphi(0)\\ &+\int_{-\lambda}^{0}\varphi^{\mathrm T}(\sigma)M^{-1}\varphi(\sigma)\mathrm d\sigma\\ &+\int_{-\eta}^{0}\varphi^{\mathrm T}(\sigma)K^{\mathrm T}T^{-1}K\varphi(\sigma)\mathrm d\sigma.\end{aligned}$$

(12)式给出的系统性能指标上界依赖于线性矩阵不等式的可行解，线性矩阵不等式(11)的不同可行解导出不同的系统性能指标上界. 显然，最小性能上界是刻划系统鲁棒性能的一个有意义的指标. 对于给定的 γ，以下通过建立和求解一个最优化问题可以得到这样一个闭环性能上界最小的最优 H_∞ 保成本控制律

$$\min\bar J=a+\mathrm{Trace}(G_1)+\mathrm{Trace}(G_2) \tag{14}$$

(Ⅰ)(11)式；

(Ⅱ) $\begin{bmatrix}-a & \varphi^{\mathrm T}(0)\\ \varphi(0) & -X\end{bmatrix}<0$；

(Ⅲ) $\begin{bmatrix}-G_1 & N_1^{\mathrm T}\\ N_1 & -M\end{bmatrix}<0$；

(Ⅳ) $\begin{bmatrix}-G_2-N_2^{\mathrm T}X^{-1}N_2 & 0 & 0 & N_2^{\mathrm T}\\ 0 & -T-WX^{-1}W^{\mathrm T} & 0 & W\\ 0 & 0 & -I & 0\\ N_2 & W^{T} & 0 & -X\end{bmatrix}<0.$

其中 $\int_{-\lambda}^{0}\varphi(\sigma)\varphi^{\mathrm T}(\sigma)\mathrm d\sigma=N_1N_1^{\mathrm T}$，$\int_{-\eta}^{0}\varphi(\sigma)\varphi^{\mathrm T}(\sigma)\mathrm d\sigma=N_2N_2^{\mathrm T}$. 事实上，由

$$\begin{aligned} &\int_{-\lambda}^{0}\varphi^{\mathrm T}(\sigma)M^{-1}\varphi(\sigma)\mathrm d\sigma\\ &=\int_{-\lambda}^{0}\mathrm{Trace}(\varphi^{\mathrm T}(\sigma)M^{-1}\varphi(\sigma))\mathrm d\sigma\\ &=\mathrm{Trace}(N_1N_1^{\mathrm T}M^{-1})\\ &=\mathrm{Trace}(N_1^{\mathrm T}M^{-1}N_1),\end{aligned}$$

可得问题(14)中的约束条件(Ⅱ)等价于 $\varphi^{\mathrm T}(0)X^{-1}\times\varphi(0)<a$，约束条件(Ⅲ)等价于 $N_1^{\mathrm T}M^{-1}N_1<G_1$. 而由于

$$\begin{aligned} &\int_{-\eta}^{0}\varphi^{\mathrm T}(\sigma)K^{\mathrm T}T^{-1}K\varphi(\sigma)\mathrm d\sigma\\ &=\int_{-\eta}^{0}\mathrm{Trace}(\varphi^{\mathrm T}(\sigma)K^{\mathrm T}T^{-1}K\varphi(\sigma))\mathrm d\sigma\\ &=\mathrm{Trace}(N_2N_2^{\mathrm T}X^{-1}WT^{-1}WX^{-1})\\ &=\mathrm{Trace}(N_2^{\mathrm T}X^{-1}W^{\mathrm T}T^{-1}WX^{-1}N_2),\end{aligned}$$

则约束条件(Ⅳ)等价于 $N_2^{\mathrm T}X^{-1}W^{\mathrm T}T^{-1}WX^{-1}N_2<$

G_2,这是因为 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2<G_2$ 等价于 $\begin{bmatrix}-G_2 & N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}\\ WX^{-1}N_2 & -T\end{bmatrix}<0$,即

$$\begin{bmatrix}-G_2-N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2 & 0\\ 0 & -T-WX^{-1}W^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0 & N_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & W\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X^{-1} & 0\\ 0 & X^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ N_2 & W^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}<0.$$

从而得到条件(Ⅳ).可以看到条件(Ⅳ)是非线性的,我们可以进行适当的放缩,令 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2<G_3$,$WX^{-1}W^{\mathrm{T}}<G_4$,则从条件(Ⅳ)可以推出

$$\begin{bmatrix}-G_2-G_3 & 0 & 0 & N_2^{\mathrm{T}}\\ 0 & -T-G_4 & 0 & W\\ 0 & 0 & -I & 0\\ N_2 & W^{T} & 0 & -X\end{bmatrix}<0.\tag{15}$$

但是把(15)式作为一个约束条件时,运算结果很有可能出现 G_2 很小而且是负定的,这与 G_2 是正半定的相矛盾,因此我们把 $G_2>0$ 作为另一个约束条件.从而问题(14)转化成为如下的一个凸优化问题.可以应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解该问题,即

$$\min\bar{J}=a+\mathrm{Trace}(G_1)+\mathrm{Trace}(G_2),\tag{16}$$

s.t.(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)为(14)中的(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ),(Ⅳ)(15),(Ⅴ) $-G_2<0$.

但是如果把 G_3 和 G_4 看成自由量,那么运算结果会出现 G_3 和 G_4 很大,而 G_2 很小,以至于 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2>G_2$,这与 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2<G_2$ 矛盾.因此我们要对 G_3 和 G_4 进行约束,使得 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2<G_3$,$WX^{-1}W^{\mathrm{T}}<G_4$,$N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2<G_2$ 同时满足.

下面给出算法步骤:

步骤 1 对 G_3 和 G_4 取适当的初值,通过应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解问题(16),得到 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2$,$WX^{-1}W^{\mathrm{T}}$ 和 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2$ 的值.

步骤 2 比较 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2$ 和 G_3,$WX^{-1}W^{\mathrm{T}}$ 和 G_4,$N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2$ 和 G_3 的值,如果同时满足 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2\leqslant G_3$,$WX^{-1}W^{\mathrm{T}}\leqslant G_4$,$N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2<G_2$,则 G_3 和 G_4 为合理取值.如果不同时满足 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2<G_3$,$WX^{-1}W^{\mathrm{T}}<G_4$,$N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2<G_2$,转到步骤 3.

步骤 3 取 G_3 为大于步骤 1 求得的 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2$ 近似值,近似值的取法可根据实际的需要,比如我们可以这样令 $G_3=N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2+\lambda_1 I$,其中 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2$ 为步骤 1 所求得的值、λ_1 为任意的正常数.因为目标函数中有 $\mathrm{Trace}(G_2)$ 这一项,所以 G_3 的取值对 G_2 的影响最大,而对其他的影响不大,也就是说不管 G_3 和 G_4 取何值,所求得的 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2$,$WX^{-1}W^{\mathrm{T}}$ 和 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2$ 基本上变化不大,经过多次实验也证明了这一点.所以我们就在取 G_3 比 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2$ 大的基础上,又使得 G_3 不要太大,这样就能基本保证下次求得的 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2<G_3$ 和 $N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}W^{\mathrm{T}}T^{-1}WX^{-1}N_2<G_2$,所以取 $G_3=N_2^{\mathrm{T}}X^{-1}N_2+\lambda_1 I$ 是合理的.在本文中我们取 $\lambda_1=0.1$,同理取 G_4,转到步骤 1.

4. 数值例子

考虑不确定连续时滞系统(1),

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0.2 & -0.2\end{bmatrix},$$

$$A_1=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.1\\ -0.3 & 0\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}0.2\\ 1\end{bmatrix},B_1=\begin{bmatrix}0.2\\ -0.2\end{bmatrix},$$

$$B_w=\begin{bmatrix}0.1\\ -0.1\end{bmatrix},$$

$$C=[1\quad 0],C_1=[0.2\quad -0.2],$$

$$D=1,D_1=D_w=0.1,$$

$$E_1=\begin{bmatrix}0.1 & \\ & 0.1\end{bmatrix},E_2=\begin{bmatrix}0.1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$E_3=\begin{bmatrix}0.1 & \\ & 0.2\end{bmatrix},E_4=E_5=\begin{bmatrix}0.1\\ 0.1\end{bmatrix},$$

$$E_6=E_7=0.1,E_8=0.02,$$

$$E_9=0.01,E_{10}=0.1,$$

$$H_1=\begin{bmatrix}0.1 & \\ & 0.1\end{bmatrix},H_2=0.1,$$

$$H_3=\begin{bmatrix}0.1 & \\ & 0.1\end{bmatrix},H_4=0.02,$$

$$H_5=0.01,H_6=[0.1\quad 0.1],$$

$$H_7=0.1,H_8=[0.11\quad 0.1],$$

$$H_9=0.2,H_{10}=0.1.$$

给定的 $\gamma=0.8$,$\alpha=0.6$,$\beta=0.2$,$\lambda=1$,$\eta=0.5$,性能指标(5)中的加权矩阵 $Q=I_2$,$R=0.2$,系统的

初始条件是

$$\varphi(t)=\begin{bmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}e^{t+1}\\0\end{bmatrix},t\in[-1,0].$$

可得

$$\varphi(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}e\\0\end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix}0.6796\\0\end{bmatrix},$$

$$N_1\approx\begin{bmatrix}0.4469&0\\0&0\end{bmatrix},$$

$$N_2\approx\begin{bmatrix}0.3821&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

选取 $G_3=\begin{bmatrix}10&0\\0&9\end{bmatrix}$，$G_4=4$，我们取 $\lambda_1=0.1$，迭代 1 次取得

$$G_3=\begin{bmatrix}1.8353&0\\0&0.1\end{bmatrix},G_4=1.1323.$$

通过应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解问题(16)最优解是

$$X=\begin{bmatrix}0.1350&-0.1043\\-0.1043&0.2065\end{bmatrix},$$

$$M=\begin{bmatrix}0.3134&0.1407\\-0.1407&0.9679\end{bmatrix},$$

$$G_1=\begin{bmatrix}0.6817&0\\0&0.0000\end{bmatrix},$$

$$G_2=\begin{bmatrix}0.8309&0\\0&0.0000\end{bmatrix},$$

$$W=[-0.0979\quad -0.2377],T=0.6850,$$

$$a=5.6105,\varepsilon=0.2340.$$

利用优化问题的这个可行解，可以构造出所考虑系统的最优 H_∞ 保成本控制律

$$u(t)=[-2.6477\quad -2.4885]x(t).$$

相应的闭环性能指标上界 $\bar{J}=7.1231$.

5. 结　论

本文讨论了一类同时具有状态时滞和输入时滞的时变不确定时滞连续系统的 H_∞ 保成本状态反馈控制的问题，假定其中的时变不确定性参数是范数有界的，但不需要满足匹配条件. 提出了确保系统可 H_∞ 鲁棒镇定，同时满足保成本指标的一个充分条件. 还提出了鲁棒 H_∞ 保成本控制器的一个设计方法使得闭环系统的一个保成本函数对所有允许的不确定参数有上界，经过适当的放缩，最优鲁棒 H_∞ 保成本控制律问题可以转化为一个凸优化问题，并经过简单的迭代，可得到鲁棒 H_∞ 保成本控制律的最优解.

[1] Peng Z W, Zhong T X 2000 *Chin. Phys.* **9** 244
[2] Yu D C, Meng Q H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1092(in Chinese) [禹东川、孟庆浩 2005 物理学报 **54** 1092]
[3] Guan X P, Fan Z P, Peng H P, Wang Y Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2113(in Chinese)[关新平、范正平、彭海朋、王益群 2001 物理学报 **50** 2113]
[4] Mahmoud M S 1999 *Robust control and filtering for tine-delay systems* (New York: Marcel-Dekker)
[5] Gorecki H S, Fuska P, Grabowski K A 1989 *Analysis and synthesis of time-delay systems* (New York: Wiley)
[6] De-Souza C E, Fu M, Xie L 1999 *Automatica* **35** 1313
[7] Moheimani S O R, Petersen I R 1997 *IEE. Control Theory Appl.* **44** 183
[8] Fridman E, Shaked U 1993 *IEEE. Trans. Autom. Control.* **47** 1931
[9] Xue A K, Jiang N 2002 *Control and Decision* **17** 681 [薛安克、蒋楠 2002 控制与决策 **17** 681]
[10] Yu L, Chu J, Su H 1996 *Automatica* **32** 1759
[11] Ge J H, Frank P M, Lin C F, Robust H 1996 *Automatica* **32** 1183
[12] Lee Y S, Moon Y S, Kwon W H, Park P G 2004 *Automatica* **40** 65
[13] Cui B L, Hua M 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **32** 160
[14] Chen W H, Zheng W X 2006 *Automatica* **42** 1067
[15] Chen J D 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **31** 391
[16] Geromel J C, Peres P L D, Souza S R 1995 *SIAM J. Control and Optimizations* **33** 1816
[17] Petersen Z R 1987 *Systems and Control Letters* **8** 351

Robust guaranteed cost H_∞ control for uncertain time-varying delay system*

Ma Yue-Chao[1)†] Huang Li-Fang[1)] Zhang Qing-Ling[2)]

1)(*College of Science*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

2)(*Institute of Science*, *Northeastern University*, *Shenyang* 110004, *China*)

(Received 13 November 2006; revised manuscript received 27 December 2006)

Abstract

This paper studies the problem of robust H_∞ guaranteed cost control for a class of time-varying uncertain continuous systems with both state and input delays. Suppose that the time-varying uncertain parameters are norm-bounded, but the matched conditions are not required to satisfy. A new sufficient condition of H_∞ robust stabilization which satisfies guaranteed cost index is given for the systems by constructing the generalized Lyapunov function and taking the linear matrix inequality approach. Robust H_∞ guaranteed cost controllers can be realized simply by solving the corresponding linear matrix inequalities so that a guaranteed cost function for the closed-loop systems has an upper bound irrespective of all admissible parameter uncertainties. Then, by iterative approach, the optimal robust H_∞ guaranteed cost controllers can be obtained through the corresponding convex optimization. A numerical example is given to show the potential of the proposed technique.

Keywords: continuous system, time-delay, H_∞ robust control, guaranteed cost control

PACC: 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60574011).

† E-mail: myc6363@126.com