

利用标量控制器实现一类混沌系统同步*

周 平

(重庆邮电大学非线性系统研究所, 重庆 400065)
(2006 年 9 月 8 日收到, 2006 年 12 月 8 日收到修改稿)

研究了一类混沌系统的混沌同步, 对此类混沌系统, 通过设计一个合适标量控制器, 可以实现系统的混沌同步. 给出了该标量控制器设计的一般方法, 并从理论上得到了混沌同步的充分和必要条件, 且此充分和必要条件与混沌系统的性质无关.

关键词: 混沌系统, 标量控制器, 混沌同步

PACC: 0545

1. 引 言

自从 1990 年人们^[1,2]对混沌控制所做的开创性工作以来, 人们对非线性系统的混沌控制和同步(广义同步)进行了广泛研究, 取得了许多结果. 大量混沌同步方法相继被提出, 如混沌系统的驱动-响应同步、利用反馈控制实现两个耦合混沌系统的同步等^[3-9]. 但是, 众多研究者对同步问题的研究大多采用数值计算或者讨论一些特殊的函数形式与反馈形式等, 所以这些方法的普适性不够.

本文对一类 3 维混沌系统的同步进行了研究, 结果表明, 通过设计一个合适的标量控制器, 可以很容易实现这类混沌系统的同步. 并从严格数学理论出发, 得到了该标量控制器设计的一般方法, 得到了同步的充分和必要条件, 这个充分必要条件与混沌系统的特性无关, 可见本文方法具有较好的普适性. 由于本文方法不需要计算条件李雅谱诺夫指数, 所以本文方法减少了理论计算的工作量, 正是如此该同步方法在实际应用中更方便.

2. 同步理论

研究如下三类混沌系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3),\end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3), \quad (1)$$

其中 $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ 为系统状态变量且为实数, $f_i (i = 1, 2, 3)$ 为连续函数且只有一个是非线性函数. 不失一般性, 设 $f_3(x_1, x_2, x_3)$ 是非线性函数. (若 $f_2(x_1, x_2, x_3)$ 是非线性函数, 将 x_2, x_3 变量互换可使非线性函数仅出现在 (1) 式中的第三个等式中, 同理处理 $f_1(x_1, x_2, x_3)$ 是非线性函数的情况). 如 Chua's 混沌电路^[10]、混沌-K 模型^[11]、Rossler 混沌系统^[12]等系统.

将混沌系统 (1) 改写为混沌系统

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sum_{i=1}^3 a_i x_i, \\ \dot{x}_2 &= \sum_{i=1}^3 b_i x_i, \\ \dot{x}_3 &= f_3(x_1, x_2, x_3),\end{aligned} \quad (2)$$

其中 $a_i, b_i (i = 1, 2, 3)$ 是系统实参数, 满足 $a_3 \neq 0, b_3 \neq 0$ 或者 $a_3 = 0, a_2 \neq 0, b_3 \neq 0$ 或者 $b_3 = 0, b_1 \neq 0, a_3 \neq 0$ 情况之一.

对于系统 (2), 定义如下可逆矩阵:

$$A = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix},$$

可见 $A_{33} \neq 0$.

当 $a_3 \neq 0, b_3 \neq 0$ 时, 选取

$$\begin{aligned}A_{11} &= (-b_3/a_3)A_{12}, \\ A_{12} &\neq 0,\end{aligned}$$

* 信息产业部、重庆市光纤通信技术重点实验室资助的课题.

$$\begin{aligned} A_{21} &= (-a_1 b_3 / a_3 + b_1) A_{12}, \\ A_{22} &= (-a_2 b_3 / a_3 + b_2) A_{12}, \\ A_{31} &= a_1 A_{21} + b_1 A_{22}, \\ A_{32} &= a_2 A_{21} + b_2 A_{22}, \\ A_{33} &= a_3 A_{21} + b_3 A_{22}. \end{aligned} \tag{3}$$

当 $a_3 = 0, a_2 \neq 0, b_3 \neq 0$ 时 选取

$$\begin{aligned} A_{11} &\neq 0, \\ A_{12} &= 0, \\ A_{21} &= a_1 A_{11}, \\ A_{22} &= a_2 A_{11}, \\ A_{31} &= a_1 A_{21} + b_1 A_{22}, \\ A_{32} &= a_2 A_{21} + b_2 A_{22}, \\ A_{33} &= a_3 A_{21} + b_3 A_{22}. \end{aligned} \tag{4}$$

当 $b_3 = 0, b_1 \neq 0, a_3 \neq 0$ 时 选取

$$\begin{aligned} A_{11} &= 0, \\ A_{12} &\neq 0, \\ A_{21} &= b_1 A_{12}, \\ A_{22} &= b_2 A_{12}, \\ A_{31} &= a_1 A_{21} + b_1 A_{22}, \\ A_{32} &= a_2 A_{21} + b_2 A_{22}, \\ A_{33} &= a_3 A_{21} + b_3 A_{22}. \end{aligned} \tag{5}$$

将系统(2)做驱动系统,构造在标量控制器 ϕ 控制下的响应系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}'_1 &= \sum_{i=1}^3 a_i x'_i, \\ \dot{x}'_2 &= \sum_{i=1}^3 b_i x'_i, \\ \dot{x}'_3 &= f_3(x'_1, x'_2, x'_3) + \phi, \end{aligned} \tag{6}$$

则有如下定理.

定理 设计标量控制器

$$\begin{aligned} \phi &= f_3(x_1, x_2, x_3) - f_3(x'_1, x'_2, x'_3) \\ &+ (A_{31}/A_{33}) \sum_{i=1}^3 a_i (x_i - x'_i) \\ &+ (A_{32}/A_{33}) \sum_{i=1}^3 b_i (x_i - x'_i) \\ &- (1/A_{33}) \sum_{i=1}^3 k_i (z_i - y_i), \end{aligned}$$

其中 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 为控制器 ϕ 的控制参数,且为实数.式中 $z_i, y_i (i = 1, 2, 3)$ 决定于可逆变换

$$\begin{aligned} (z_1, z_2, z_3)^T &= A(x'_1, x'_2, x'_3)^T, \\ (y_1, y_2, y_3)^T &= A(x_1, x_2, x_3)^T, \end{aligned}$$

则驱动系统(2)和响应系统(6)混沌同步的充分必要条件是 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_2 k_3 - k_1 > 0$.

上面的定理表明,在标量控制器 ϕ 的控制下,可以实现混沌系统(2)与混沌系统(6)的混沌同步,且控制参数的选择与系统具体形式无关.当混沌系统具体形式给定后,控制器中 $A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 就被确定了.

证明

首先证明 $a_3 \neq 0, b_3 \neq 0$ 的情况.

利用可逆坐标变换 $(y_1, y_2, y_3)^T = A(x_1, x_2, x_3)^T$, 可得

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= A_{11} \dot{x}_1 + A_{12} \dot{x}_2, \\ \dot{y}_2 &= A_{21} \dot{x}_1 + A_{22} \dot{x}_2, \\ \dot{y}_3 &= A_{31} \dot{x}_1 + A_{32} \dot{x}_2 + A_{33} \dot{x}_3. \end{aligned}$$

利用(3)和(2)式,上式变为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= y_3, \\ \dot{y}_3 &= g(y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, y_3) &= A_{33} f_3(x_1, x_2, x_3) \\ &+ A_{31} \sum_{i=1}^3 a_i x_i + A_{32} \sum_{i=1}^3 b_i x_i. \end{aligned}$$

利用可逆坐标变换 $(z_1, z_2, z_3)^T = A(x'_1, x'_2, x'_3)^T$, 可得,

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_{11} \dot{x}'_1 + A_{12} \dot{x}'_2, \\ \dot{z}_2 &= A_{21} \dot{x}'_1 + A_{22} \dot{x}'_2, \\ \dot{z}_3 &= A_{31} \dot{x}'_1 + A_{32} \dot{x}'_2 + A_{33} \dot{x}'_3. \end{aligned}$$

利用(3)和(6)式,上式变为

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2, \\ \dot{z}_2 &= z_3, \\ \dot{z}_3 &= k(z_1, z_2, z_3), \end{aligned} \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} k(z_1, z_2, z_3) &= A_{33} f_3(x_1, x_2, x_3) \\ &+ A_{31} \sum_{i=1}^3 a_i x_i + A_{32} \sum_{i=1}^3 b_i x_i \\ &- \sum_{i=1}^3 k_i (z_i - y_i). \end{aligned}$$

对于系统(7)和系统(8),令 $e_i = z_i - y_i (i = 1, 2, 3)$ 则得其误差系统为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_3, \end{aligned}$$

$$\dot{e}_3 = -k_1 e_1 - k_2 e_2 - k_3 e_3. \quad (9)$$

误差系统在平衡点 $e_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 处的雅可比矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k_1 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^3 + k_3 \lambda^2 + k_2 \lambda + k_1 = 0.$$

由 Hurwitz 定理^[13], 可得到误差系统 (9) 的平衡点 $e_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 是渐近稳定的充分必要条件为

$$k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_2 k_3 - k_1 > 0.$$

所以 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_i - y_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 的充分必要条件是 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_2 k_3 - k_1 > 0$.

由

$$(z_1, z_2, z_3)^T = A(x'_1, x'_2, x'_3)^T,$$

$$(y_1, y_2, y_3)^T = A(x_1, x_2, x_3)^T.$$

可得

$$B(y_1, y_2, y_3)^T = (x_1, x_2, x_3)^T,$$

$$B(z_1, z_2, z_3)^T = (x'_1, x'_2, x'_3)^T,$$

其中矩阵 $BA = I, I$ 为单位矩阵, $b_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 为矩阵 B 的元素. 所以

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (x'_i - x_i) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^3 b_{ij} (z_j - y_j) = 0, (i = 1, 2, 3).$$

即驱动系统 (2) 和响应系统 (6) 达到了混沌同步. 其同步的充分必要条件就是 $\lim_{t \rightarrow +\infty} z_i - y_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 的充分必要条件, 所以驱动系统 (2) 和响应系统 (6) 之间混沌同步的充分必要条件是控制参数满足 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_2 k_3 - k_1 > 0$.

同理可得当 $a_3 = 0, a_2 \neq 0, b_3 \neq 0$ 或者 $b_3 = 0, b_1 \neq 0, a_3 \neq 0$ 时, 定理也成立, 证毕.

由上面的证明过程可得, 对于不同的混沌系统, 虽然可逆矩阵 A 和控制器 ϕ 的具体形式可能不同, 但很有意义的是, 控制参数 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 的选择与混沌系统的具体形式无关. 若选择相同的控制参数 $k_i (i = 1, 2, 3)$, 即使是不同的混沌系统 (2), 其变形驱动系统 (7) 和其变形响应系统 (8) 的同步误差仅决定于控制参数 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 和误差的初始条件.

3. 应 用

为验证上面理论的正确性, 下面以 Chua's 混沌

电路^[10], 混沌-K 模型^[11], Rossler 混沌系统^[12] 为例来进行研究.

混沌-K 模型^[11]如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2, \end{aligned} \quad (10)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 + a x_3,$$

其中系统参数 $a = 0.3$, 混沌系统 (10) 又可以改写为混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a x_1 + x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_3 - x_2, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\dot{x}_3 = x_2 x_3 - x_1.$$

可见 $a_3 \neq 0, b_3 \neq 0$, 由 (3) 式易得可逆矩阵 A ,

$$A = A_{12} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -a & -1 & 0 \\ -a^2 & 1 & -(1+a) \end{bmatrix}, A_{12} \neq 0.$$

根据上面定理, 可以选择型如定理中的标量控制器 ϕ . 故, 当 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_2 k_3 - k_1 > 0$ 时, 可以实现驱动系统 (11) 和其对应形式 (6) 的响应系统之间的混沌同步.

如选择 $A_{12} = 1, k_1 = 1, k_2 = 1, k_3 = 2$, 系统 (11) 的初始条件为 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0.2, 0.5, 1.0)$, 对应形式 (6) 的响应系统的初始条件为 $(x'_{10}, x'_{20}, x'_{30}) = (0.7, 0.1, 0.3)$, 驱动系统 (11) 和其对应形式 (6) 的响应系统之间的混沌同步仿真结果如图 1,

本文图中 $\varepsilon = [\sum_{i=1}^3 (x_i - x'_i)^2]^{1/2}$.

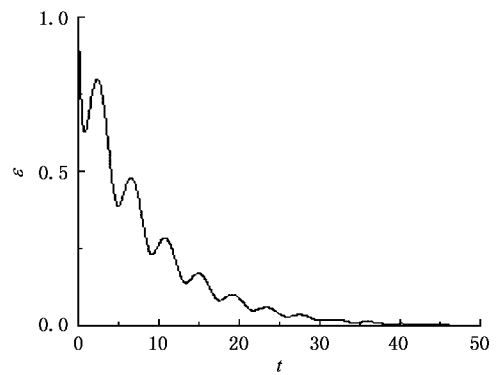


图 1 混沌-K 模型同步仿真结果

混沌 Rossler 系统如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 - x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + a x_2, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\dot{x}_3 = x_1 x_3 - b x_3 + c,$$

其中 $a = 0.2, b = 8, c = 0.2$ 为系统参数.

可见 $b_3 = 0, b_1 \neq 0, a_3 \neq 0$, 由(5)式易得可逆矩阵

$$A = A_{12} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ a & a^2 - 1 & -1 \end{vmatrix}, A_{12} \neq 0.$$

根据上面定理, 可以选择型如定理中的标量控制器 ϕ . 故, 当 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_2 k_3 - k_1 > 0$ 时, 可以实现驱动系统(12)和其对应形式(6)的响应系统之间的混沌同步.

如选择 $A_{12} = 1, k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 10$, 系统(12)的初始条件为 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0.2, 0.5, 1.0)$, 对应形式(6)的响应系统的初始条件为 $(x'_{10}, x'_{20}, x'_{30}) = (0.7, 0.1, 0.3)$, 驱动系统(12)和其对应形式(6)的响应系统之间的混沌同步仿真结果如图2.

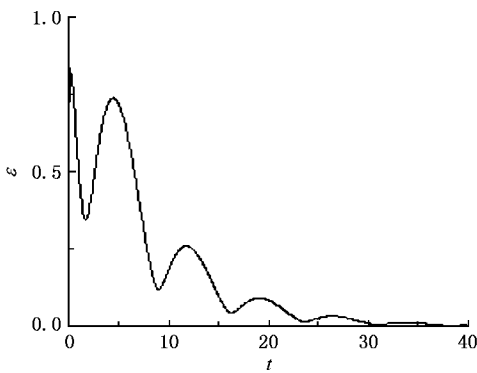


图2 混沌 Rossler 系统同步仿真结果

可见 $a_3 = 0, a_2 \neq 0, b_3 \neq 0$, 由(4)式易得可逆矩阵

$$A = A_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -b & 0 \\ -b & b & -b \end{vmatrix}, A_{11} \neq 0.$$

根据上面定理, 可以选择型如定理中的标量控制器 ϕ . 故, 当 $k_1 > 0, k_2 > 0, k_3 > 0, k_2 k_3 - k_1 > 0$ 时, 可以实现驱动系统(14)和其对应形式(6)的响应系统之间的混沌同步.

如选择 $A_{11} = 1, k_1 = 0.1, k_2 = 0.5, k_3 = 1$, 系统(14)的初始条件为 $(x_{10}, x_{20}, x_{30}) = (0.2, 0.5, 1.0)$, 对应形式(6)的响应系统的初始条件为 $(x'_{10}, x'_{20}, x'_{30}) = (0.7, 0.1, 0.3)$, 驱动系统(14)和其对应形式(6)的响应系统之间的混沌同步仿真结果如图3.

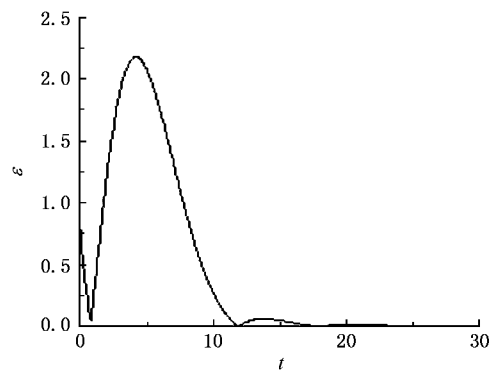


图3 Chua's 混沌电路同步仿真结果

Chua's 混沌电路^[10]如

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a[-x_1 + x_2 - \phi(x_1)], \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -bx_2, \end{aligned} \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \phi(x_1) &= m_1 x_1 + (m_0 - m_1) \\ &\quad \times [|x_1 + 1| - |x_1 - 1|] / 2, \\ a &= 10, b = 14.87, \\ m_0 &= -1.27, m_1 = -0.68. \end{aligned}$$

Chua's 混沌电路(13)式可以变为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -bx_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= a[-x_3 + x_2 - \phi(x_3)], \end{aligned} \quad (14)$$

其中 $\phi(x_3) = m_1 x_3 + (m_0 - m_1)[|x_3 + 1| - |x_3 - 1|] / 2$.

由上面的理论分析和仿真结果可知, 我们可以很容易实现型如系统(2)的一类3维混沌系统的混沌同步.

4. 结 论

对于本文的一类3维混沌系统, 可以很容易地设计出一个标量控制器, 在此标量控制器的作用下, 可以很容易地实现驱动混沌系统和响应混沌之间的混沌同步. 同时, 我们从严密的理论上得到了这类混沌系统同步的充分和必要条件. 有意义的是, 控制参数 $k_i (i = 1, 2, 3)$ 的选择与混沌系统的具体形式无关, 这表明本文方法具有较好的普适性. 另外本文方法不需要计算条件李雅普诺夫指数, 所以本文方法减少了理论计算的工作量. 正是如此, 本文同步方法在实际应用中更方便.

- [1] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Ott E , Grebogi C , Yorke J A 1991 *Phys. Rev. A* **44** 2374
- [3] Jiang G P , Tang K S , Chen G R 2003 *Chaos , Solitons & Fractals* **15** 925
- [4] Chen S , Wang F , Wang C 2004 *Chaos , Solitons & Fractals* **20** 235
- [5] Huang L , Feng R , Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **320** 271
- [6] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
- [7] Li F , Hu A H , Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 590 (in Chinese) [李 芳、胡爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]
- [8] Zou Y L , Zhu J 2006 *Chinese Physics* **15** 1965
- [9] Wang F Q , Liu C X 2006 *Chinese Physics* **15** 1971
- [10] Yan S L , Wu S B , Pang H G *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 428 (in Chinese) [颜森林、伍仕宝、逢焕刚等 2001 物理学报 **50** 428]
- [11] Chen Y Y , Peng J H , Shen Q H *et al* 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1871 (in Chinese) [陈艳艳、彭建华、沈启宏等 2001 物理学报 **50** 1871]
- [12] Zhou P 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1108 (in Chinese) [周 平 2003 物理学报 **52** 1108]
- [13] Huang L 1992 *Stability Theory* (Beijing : Beijing University Press) (in Chinese) [黄 琳 1992 稳定性理论(北京 : 北京大学出版社)]

Synchronization for a class of chaotic systems via scalar controller^{*}

Zhou Ping

(*Institute for Nonlinear Systems , Chongqing University of Posts and Telecommunications , Chongqing 400065 , China*)

(Received 8 September 2006 ; revised manuscript received 8 December 2006)

Abstract

Adding a suitable scalar controller to a class of chaotic systems , we can realize the synchronization for these chaotic systems . The method of obtaining the scalar controller from chaotic systems is established . The sufficient and necessary condition of chaos synchronization is obtained , which is irrelative to the chaotic system .

Keywords : chaotic systems , scalar controller , synchronization

PACC : 0545

^{*} Project supported by the Key Laboratory of Optical Fiber Communications Technology of Ministry of Information Industry of China , and Key Laboratory of Optical Fiber Communications Technology of Chongqing .