

# 半周期延迟-非线性反馈控制混沌<sup>\*</sup>

于洪洁<sup>†</sup> 郑 宁

(上海交通大学船建学院工程力学系, 上海 200240)  
(2006 年 9 月 19 日收到, 2006 年 10 月 17 日收到修改稿)

提出了基于稳定性准则的半周期延迟-非线性反馈控制混沌的方法, 即 SC(stability criterion)半周期延迟非线性反馈控制法. 通过对混沌系统的适当分离, 得到一个特殊的非线性函数, 并利用混沌输出信号与其半周期延迟信号的非线性函数之和, 构造了连续反馈输入干扰. 该方法继承了延迟反馈控制方法及稳定性准则控制方法的优点, 实现了有效的自控制过程, 并克服了延迟反馈方法的限制, 能将嵌入混沌吸引子中的自对称直接不稳周期轨稳定. 控制过程可随时开始, 具有简便、灵活性. 数值模拟结果显示了 SC 半周期延迟-非线性反馈方法控制的有效性.

关键词: 稳定性准则, 混沌控制, 半周期延迟, 非线性反馈

PACC: 0545

## 1. 引 言

近 20 多年来, 混沌控制和同步问题的研究已得到越来越广泛的关注<sup>[1-6]</sup>. 由 Ott, Grebogi 及 Yorke 开始研究的混沌控制问题是很有吸引力的课题<sup>[1]</sup>, 他们建议一个方法(OGY 方法), 以稳定嵌入在混沌吸引子内的不稳周期轨, 该方法对系统外部可调参数, 制作一个与时间相关的小干扰, 以反馈的形式输入, 就能实现控制过程. 其后有许多关于 OGY 方法的扩展及不同的控制混沌方法被开发<sup>[6-13]</sup>. 混沌控制方法已被应用到许多实际系统<sup>[14-18]</sup>.

Pyragas 于 1992 年提出了通过小的时间连续干扰线性反馈控制混沌的两个方法<sup>[3]</sup>, 一个方法利用了特别设计的外部振子反馈控制混沌, 另一个方法就是没有任何外力的延迟自反馈控制法. 延迟反馈控制法(delay feedback control, DFC)的主要思想是利用系统输出信号的一部分经过延迟时间反馈到系统中去, 以代替外部输入. 避免了对目标轨道的确定, 只需预先获得期望不稳周期轨(unstable periodic orbit, UPO)的周期, 利用延迟偏差信号稳定混沌系统自身嵌入的 UPO 轨道, 并不改变 UPO 轨道的相关属性, 所需控制能量小. 延迟反馈控制利用持续时间激励, 与 OGY 方法相比, 有助于抑制噪声. Pyragas 利

用延迟反馈法从实验上对其设计的二极管共振器中的混沌实现了稳定控制<sup>[19]</sup>. 然而, 为确定反馈增益所要求的稳定性分析是很难的, 因为受控系统由一个延迟微分方程描述, 它的状态空间是无限维的. 此外, 已由 Ushio<sup>[20]</sup>, Nakajima<sup>[21]</sup>等学者相继证实了对离散系统、连续系统, DFC 都有一个限制, 那就是一个双曲 UPO(具有比 1 大的实特征乘子个数为奇数)永远不能被 DFC 稳定.

Nakajima 和 Ueda<sup>[22]</sup>于 1998 年建议一个叫做半周期延迟反馈控制的修正延迟反馈控制, 克服了上述的限制. Duffing 方程  $\dot{x} = y, \dot{y} = \delta y - \alpha x - x^3 + B \cos t$  有一类特性, 那就是如果  $x(t)$  是方程的一个解,  $-x(t - T/2)$  也是方程的一个解,  $T = 2\pi$  是外力的周期. 这是由于事实: Duffing 方程由一个只包括奇数阶项的多项式组成, 外力  $B \cos t$  有一个对称性  $B \cos t = -B \cos(t + T/2)$ . 称一个满足  $x(t) = -x(t - T/2)$  为一个自对称解. 采用 DFC 方法不能稳定直接不稳周期轨(一个 UPO 的特征乘子由  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  表示, 并满足  $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ , 此 UPO 称为直接不稳周期轨). 一个自对称不稳周期轨是一个直接不稳周期轨在文献 [22] 里已给出证实. 而利用半周期延迟反馈方法可稳定自对称直接不稳轨. Nakajima 和 Ueda 应用这个方法稳定 Duffing 方程和 Lorenz 方程的自对称直接不稳周期-1 轨.

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10572086)及博士学科点专项科研基金(批准号: 20050248031)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yuhongjie@sjtu.edu.cn

Yu 和 Liu 于 2004 年提出一个连续时间非线性干扰反馈的混沌控制方法<sup>[5]</sup>. 基于线性系统的稳定性准则, 保证了这个方法的有效性, 因此称稳定性准则方法 (stability criterion control method, SC control method). 该方法以非线性反馈形式, 构造一个时间连续干扰输入. SC 控制方法不要求系统在所要稳定周期轨附近的线性化及计算在不稳周期轨的导数, 也不需要计算 UPO 的最大 Lyapunov 指数, 以分析系统的局部稳定性及确定控制参数的范围. 这个方法可以随时开启控制过程, 而不必如 OGY 等方法要求混沌轨非常靠近 UPO 时才能实施控制, 适于高阶周期轨的稳定控制. 文献[12]发展了 SC (stability criterion) 连续非线性反馈混沌控制方法, 用输出信号的延迟信号代替从外部振子输入的 UPO, 提出基于稳定性准则的延迟非线性反馈控制方法 (SC delay nonlinear feedback control method). 本文受半周期延迟反馈方法<sup>[22]</sup>和基于稳定性准则的延迟非线性反馈控制方法<sup>[12]</sup>的启发, 针对 DFC 方法的限制, 也就是 DFC 不能稳定一个双曲不稳周期轨, 提出基于稳定性准则的半周期延迟非线性反馈方法, 以稳定自对称直接不稳周期轨这一类型的 UPO. 给出耦合 Duffing 振子混沌控制的典型例子, 方法的有效性通过数值模拟显示.

## 2. SC 半周期延迟非线性反馈控制方法

考虑一个连续时间非线性动力系统, 具有输入信号干扰, 如下描述:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), t) + u(t), \quad (1)$$

式中  $x \in \mathbf{R}^n$  和  $u \in \mathbf{R}^n$  分别是系统的状态矢量和输入干扰. 在没有输入干扰的情况下 ( $u = 0$ ), 系统有一个混沌吸引子  $\Omega$ . 适当分离函数  $f(x(t), t)$ ,

$$f(x(t), t) = g(x(t)) + h(x(t), t), \quad (2)$$

式中  $g(x(t)) = Ax(t)$  被适当地分离配置为函数  $f(x(t), t)$  的线性项, 要求配置后的矩阵  $A$  是一个常数满秩矩阵, 并且  $A$  的所有特征值都具有负实部. 因此函数  $h(x(t), t) = f(x(t), t) - Ax$  是函数  $f(x(t), t)$  的非线性项. 此时系统 (1) 可被重新写作

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + h(x(t), t) + u(t). \quad (3)$$

令  $D(x(t), t) = -h(x(t), t)$ , 可以看到  $f + D = f - h$  是关于状态  $x$  的一个线性形式, 即

$$(f + D)(x) = Ax. \quad (4)$$

在文献 [12] 里,  $u(t)$  被考虑为一个周期延迟非线性控制干扰信号, 构造如下:

$$u(t) = \alpha [D(x(t)) - D(x(t - \tau))], \quad (5)$$

$\tau$  是延迟时间,  $x(t - \tau)$  为延迟的输出信号,  $\alpha$  是输入强度因子, 是一个常数. 如果延迟时间与混沌吸引子内的不稳周期  $j$  轨的周期一致, 即  $\tau = T_j = jT$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , 那么对系统 (1) 的与这个 UPO (不稳周期轨) 相应的解  $x(t) = x(t - T_j)$  来说, 此时方程 (1) 中的干扰信号  $u(t)$  变成零. 这意味着 (5) 式定义的扰动  $u(t)$  不会改变系统 (1) 的不稳周期  $j$  轨的解.

文献 [22] 建议对系统 (1) 的一个半周期延迟反馈

$$\dot{x} = f(x(t), t) + K[x(t - T_j/2) + x(t)], \quad (6)$$

反馈的延迟时间是  $T_j/2$ , 即目标直接不稳周期轨的周期的一半, 代替在 DFC 方法中的  $T_j$ . 反馈项只有当一个周期为  $T_j$  的自对称轨被稳定时才消失. 而当一个  $T_j$  周期 UPO 被稳定时反馈项不一定消失. 因此方程 (6) 描述的控制是有选择性地稳定自对称直接不稳轨. Nakajima 和 Ueda 称这个控制为半周期延迟反馈控制.

受这两个方法的启发, 本文针对控制 DFC 方法难以控制自对称直接不稳周期轨的情况, 将 SC 非线性延迟反馈方法和半周期延迟反馈控制方法结合起来, 提出 SC 半周期延迟非线性反馈控制方法. (1) 式中控制干扰信号现构造如下:

$$u(t) = \alpha [D(x(t)) + D(x(t - \tau))], \quad (7)$$

$\tau$  是延迟时间, 这里取  $\tau = T_j/2$ ,  $T_j$  为自对称周期  $j$  不稳周期轨的周期.  $x(t - \tau)$  为半周期延迟的输出信号,  $\alpha$  是输入强度因子, 是一个常数. 这里设定方程 (1) 的右端项只包含  $x$  的奇数项, 非线性反馈函数  $D$  也只包含  $x$  的奇数项. 那么当系统 (1) 的一个自对称 UPO (不稳周期轨) 被稳定时, 此时方程 (1) 中的干扰信号  $u(t)$  变成零, 反馈输入控制项消失. 来看一下误差方程的发展. 定义误差为  $e(t) = x(t) + x(t - \tau)$ , 当  $e(t)$  充分小时, 其变化规律近似用线性方程表示为

$$\dot{e}(t) = [A + (\alpha - 1) \frac{\partial D}{\partial X}] e, \quad (8)$$

$e(t)$  的零点是一个平衡点, 当  $\alpha = 1$  时, 因为前面要求雅可比矩阵  $A$  的所有特征值都具有负实部, 按照线性系统的稳定性准则, 误差  $e(t)$  的零点是渐进稳定的, 当  $t \rightarrow \infty$ ,  $e(t)$  趋于零. 此时状态矢量  $x(t) \rightarrow -x(t - \tau)$ , 即  $x(t) \rightarrow x(t - T_j)$ , 意味着周期  $j$  的自

对称不稳周期轨被稳定了,此时干扰  $u(t)$  收敛趋于零.当输入强度因子  $\alpha \neq 1$  时,需要计算方程(8)的 Lyapunov 指数.若同步状态具有稳定性,则条件 Lyapunov 指数均为负值.

一些复杂的受周期驱动的系统,和自对称 UPO

$$u(t) = \begin{cases} \varepsilon_2, & |u_i| \geq \varepsilon_2, \\ D(x(t)) + D(x(t-\tau)), & |u_i| < \varepsilon_2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad |x + x(t-\tau)| \leq \varepsilon_1, \tau = T_j/2, \quad (9)$$

式中  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ( $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ ) 为误差的限制值,当  $|x + x(t-\tau)| \leq \varepsilon_1$ , 干扰  $u \neq 0$ . 这里称本文基于线性系统稳定性准则的延迟反馈扰动控制方法为 SC 半周期延迟非线性反馈干扰方法. 该方法同时具有周期延迟反馈方法和 SC 非线性延迟反馈方法的优点,它不需要为实现稳定 UPO 而设计一个特殊的外部振子,利用输出信号与半周期延迟输出信号的非线性函数和的反馈,就能实现自对称不稳轨的控制,干扰  $u(t)$  是以非线性反馈的形式输入的,这个反馈构成了自控制信号. Pyragas 提出的系列 DFC 方法在确定反馈增益所要求的稳定性分析都是很困难的,本文的方法不存在这样的问题. 这里注意到只要能够适当分离系统(1),满足雅可比矩阵  $A$  的所有特征值都具有负实部,就能基于稳定性准则,实现自对称不稳周期轨的稳定. 而且如(9)式显示,干扰  $u(t)$  的形式是简单的,不需要计算 UPO 的导数  $df/dx$ , 如在开闭环(OPCL)方法里要求的导数,也不要要求用数值方法或实验方法估计不稳周期轨.

在一起的可能还会有多个稳定解属于初始条件的不同吸引盆.此外,一些实验也不希望有干扰的大初始值.为避免这样的情况出现,可给出干扰的限制条件来解决此类问题.通过小的输入值实现混沌轨的控制过程,方程(7)被修正如下:

### 3. 控制耦合 Duffing 振子的混沌运动

将 SC 半周期延迟非线性反馈方法应用到非自治高维混沌系统,这里考虑两个耦合 Duffing 振子组成的非自治混沌系统,描述如下:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} + a\dot{\xi} + \xi^3 &= \eta + b\cos(t), \\ \dot{\eta} + c\eta + \eta^3 &= \xi. \end{aligned} \quad (10)$$

第一个振子受外部周期力驱使,两个振子通过  $\xi$  和  $\eta$  相互作用.令  $x_1 = \xi, x_2 = \dot{\xi}, x_3 = \eta$  及  $x_4 = \dot{\eta}$ , 方程(10)重写为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -ax_2 - x_1^3 + x_3 + b\cos t, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - cx_4 - x_3^3. \end{aligned} \quad (11)$$

当参数取  $a = 0.2, b = 10.0, c = 0.45$  时,数值积分方程(11),可显示耦合 Duffing 振子的混沌行为,如图 1(a)(b),分别在 2D 子空间  $(x_1, x_2)$  ( $x_3, x_4$ ) 显示 Duffing 振子的混沌吸引子.按照方程(2),适当分解函数  $f(x(t), t)$  为

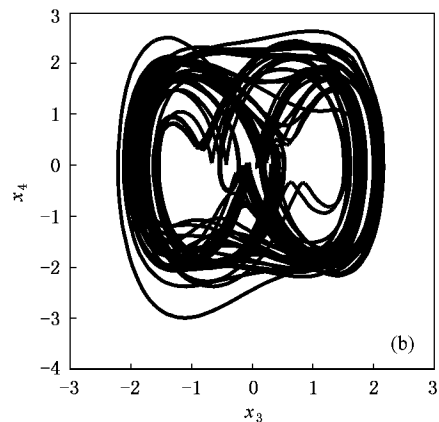
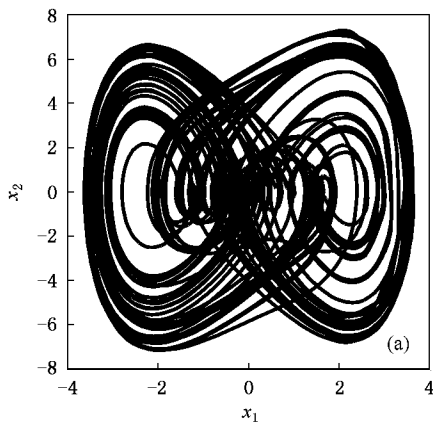


图 1 耦合 Duffing 振子分别在子空间  $(x_1, x_2)$ ,  $(x_3, x_4)$  的混沌吸引子

$$f(x, t) = Ax - D(x, t)$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ \mu & 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1^3 - b \cos t \\ -x_3 \\ (\mu - 1)x_1 + x_3^3 \end{bmatrix}$$

由于雅可比矩阵  $A$  的配置有很多种,只要满足其特征值的实部是负的即可.为此在配置矩阵  $A$  时,引入了一个可调参数  $\mu$ ,当  $\mu \in [-0.5602, 0.089]$  时,  $A$  的所有特征值的实部都是负的.当  $\mu = 0$  矩阵  $A$  的特征值为  $(-1, -a, -1, -c)$ ,均为负实数,是最简单的配置.从方程(11)可看到耦合

Duffing 方程具有对称性,也就是说当  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$  是方程(11)的一个周期  $T = 2\pi$  解,  $(-x_1(t - \pi), -x_2(t - \pi), -x_3(t - \pi), -x_4(t - \pi))$  也是方程的一个解.称满足  $x(t) = -x(t - \pi)$  的解为自对称解,很容易显示  $x(t - 2\pi) = x(t - \pi - \pi) = -x(t - \pi) = x(t)$  这个自对称解是  $T = 2\pi$  周期的<sup>[22]</sup>.一个自对称不稳周期轨是一个直接不稳周期轨在文献[22]里已给出证实.该耦合 Duffing 振子混沌吸引子内存在自对称直接不稳周期轨.由于 DFC 方法的限制,通过原来的 DFC,自对称直接不稳周期轨不能被稳定.下面采用 SC 半周期延迟非线性反馈方法将耦合 Duffing 方程(11)的混沌轨稳定到自对称直接不稳周期轨,这里的目标轨首先选为周期-1 轨,  $T = 2\pi$ .按照(9)式,以下输入干扰被构造去稳定嵌入在方程(11)混沌吸引子内的自对称周期-1 轨,即

$$u(t) = \begin{cases} u_i = \varepsilon_2, |u_i| \geq \varepsilon_2, i = 1, 2, 3, 4, \\ \begin{bmatrix} -x_1(t) - x_1(t - \tau) \\ x_1^3(t) + x_1^3(t - \tau) \\ -x_3(t) - x_3(t - \tau) \\ (\mu - 1)(x_1(t) + x_1(t - \tau)) + x_3^3(t) + x_3^3(t - \tau) \end{bmatrix}, |x + x(t - \tau)| \leq \varepsilon_1, \tau = T/2 = \pi, \\ 0, \text{其他.} \end{cases}$$

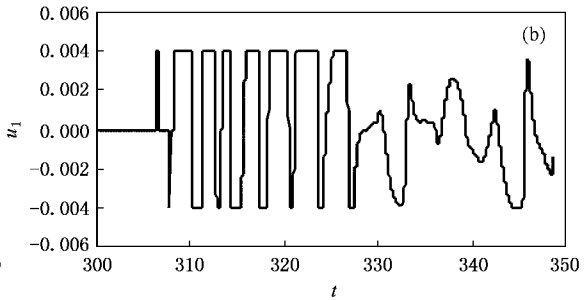
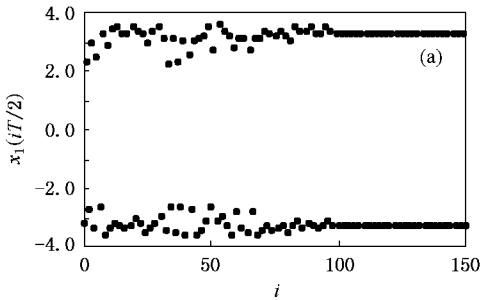


图2 (a)混沌轨  $x_1$  稳定在周期-1 轨的 Poincaré 映射;(b)反馈控制信号  $u_1(t)$  的时间历程图

图 2(a)(b)显示了利用 SC 半周期延迟非线性反馈方法控制混沌轨到自对称不稳周期-1 轨的结果.初始值  $x_1(0) = 0.3, x_2(0) = -6.0, x_3(0) = 1.5, x_4(0) = -1.6$ ,限制条件  $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = 0.004$ .取可调参数  $\mu = -0.5$ ,雅可比矩阵  $A$  的特征值为  $(-1.3093 \pm 0.5484i, -0.0517 \pm 0.5409i)$ ,为两对共轭复根,实部均为负数.当  $|x + x(t - \tau)| \leq \varepsilon_1, \tau = \pi$  输入刺激信号  $u \neq 0$  起到控制调节作用.图 2(a)为利用 Poincaré 映射显示混沌轨  $x_1(t = iT/2, T =$

$2\pi$ ) 在  $i = 100$  稳定在周期-1 轨道上的过程,  $i$  为 Poincaré 映射步,  $t = iT/2, i = 1, 2, \dots$ .可从图 2(a)中看出该周期-1UPO 是自对称的.  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3.3154, 2.9279, 1.1634, 1.1992)$  是周期-1UPO 频闪映射的固定点.我们计算了周期-1UPO 的特征乘子,有两个实特征乘子和两个复共轭特征乘子,其中两个实特征乘子是  $(\lambda_1, \lambda_2) = (5.8075, 0.1329)$ .大于 1 的实特征子数是奇数 1,因此该双曲 UPO 是一个自对称直接不稳周期轨,由于原 DFC 方法的限制,采

用原来的 DFC 方法是不能将该周期-1UPO 稳定的. 图 3(b) 是控制干扰信号  $u_1(t)$  的时间历程图,  $u_1(t)$  在  $[-0.004, 0.004]$  范围内变化, 可以看到  $u_1(t)$  的值很小.

在图 3(a)(b) 给出了利用 SC 半周期延迟非线性反馈方法控制混沌轨到自对称不稳周期-3 轨的稳定结果. 初始值和前面一样, 限制条件  $\epsilon_1 = 2, \epsilon_2 = 0.004$ . 取  $\mu = -0.45$ , 雅可比矩阵  $A$  的特征值为  $(-1.2953 \pm 0.5319i, -0.0297 \pm 0.5240i)$ , 为两对共轭复根, 实部均为负数. 当  $\|x + x(t - \tau)\| \leq \epsilon_1, \tau = 3\pi$  输入刺激信号  $u \neq 0$  起到控制调节作用. 图 3(a) 为利用 Poincaré 映射显示混沌轨  $x_1(t = 3iT/2)$  在  $i$

$= 20$  稳定在周期-3 轨道上的过程,  $i$  为 Poincaré 映射步, 在时间轴上每隔  $3T/2$  做一个截面映射. 可从图 3(a) 看出该周期-3UPO 也是自对称的.  $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (3.394, -2.3703, 0.4261, 1.435)$  是周期-3UPO 频闪映射的固定点, 我们计算了周期-3UPO 的特征乘子, 有两个实特征乘子和两个复共轭特征乘子, 其中两个实特征乘子是  $(\lambda_1, \lambda_2) = (1.995, 0.794)$ . 大于 1 的实特征子数是奇数 1, 因此该双曲不稳周期-3 轨也是一个自对称直接不稳周期轨. 图 3(b) 是控制干扰信号  $u_1(t)$  的时间历程图,  $u_1(t)$  在  $[-0.004, 0.004]$  的小范围内变化. 图 4(a)(b) 是混沌轨线在投射平面  $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$  稳定到周期-3

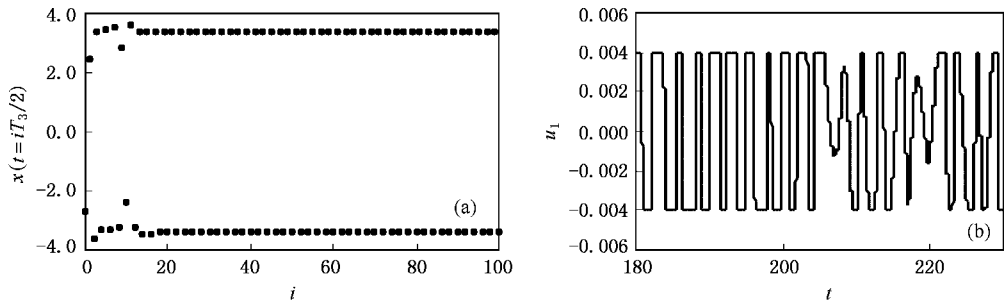


图 3 (a) 混沌轨  $x_1$  稳定在周期-3 轨的 Poincaré 映射; (b) 干扰  $u_1(t)$  的时间历程图

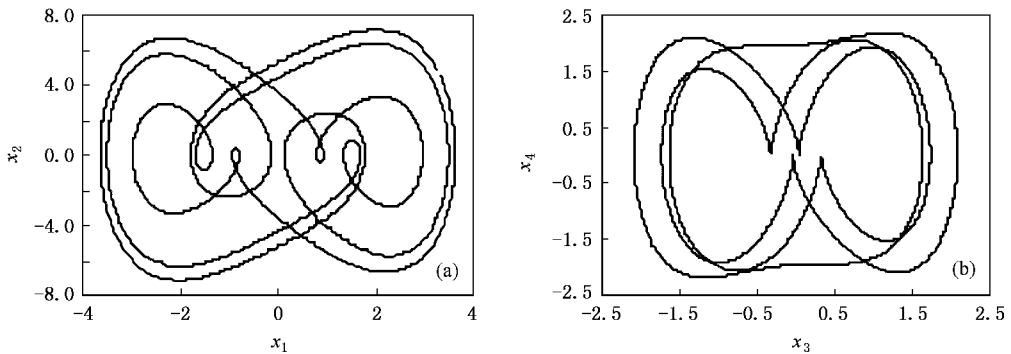


图 4 混沌轨线在投射平面  $(x_1, x_2), (x_3, x_4)$  稳定到周期-3 轨线上的轨迹图 (a) 在投射平面  $(x_1, x_2)$  (b) 在投射平面  $(x_3, x_4)$

轨线上的轨迹图, 可明显看到轨迹关于原点对称的.

对稳定周期-3 的自对称 UPO 的情况, 下面选取在配置矩阵  $A$  时引入的可调参数  $\mu$  的一组值, 考虑其对控制过程的影响. 在图 5(a) 中, 横坐标为  $\mu$  值, 纵坐标为每一个  $\mu$  对应的稳定到自对称周期-3 轨所需要的最少步数  $i_{\min}$ , 可以看到在  $\mu = -0.3$  和  $\mu = -0.45$  时实现稳定的控制所需要的最少步数是

最小的, 仅需 20 步, 20 步以后, 混沌轨就被控制稳定在周期-3 自对称轨上了.  $\mu = -0.3$ , 图 5(b) 为误差  $\Delta x_1 = x_1(t) - x_1(t - T_3)$  随控制步  $i$  的变化图, 在  $i = 20$  后, 误差  $\Delta x_1$  趋于零. 可见如果选择  $\mu = -0.3$  或  $\mu = -0.45$  就可以实现控制的最优过程, 这也为矩阵  $A$  提供了最好的配置.

我们也用在文献 [12] 中的 SC 非线性延迟反馈

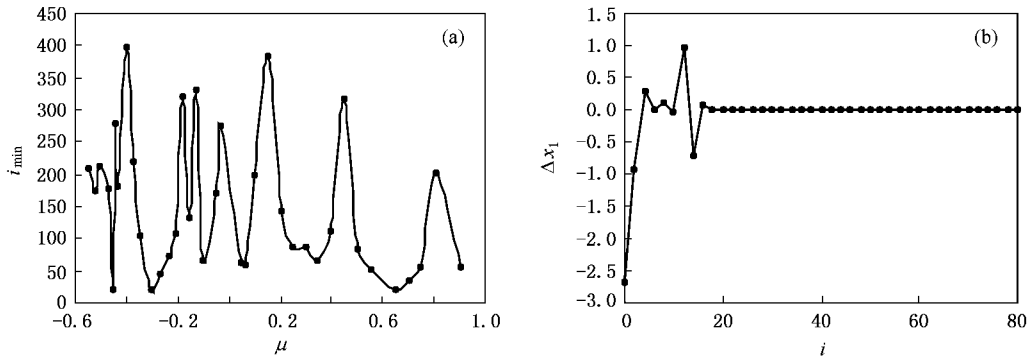


图5 参数对混沌控制过程的影响 (a)最小步数与  $\mu$  的关系 (b)误差  $\Delta x_1$  随控制步  $i$  的变化

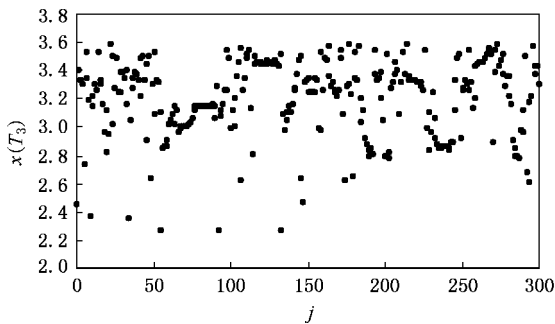


图6 Poincaré 映射显示混沌轨  $x_1(t = jT_3)$  的控制过程

法对耦合 Duffing 振子的混沌轨进行控制,延迟时间为  $T_3 = 6\pi$  图 6 为利用 Poincaré 映射显示对混沌轨  $x_1(t = jT_3)$  的控制过程,  $j$  为 Poincaré 映射步,  $t = jT_3$ ,  $j = 1, 2, \dots$ , 显然没有稳定到周期-3 轨道上. 这是由于耦合 Duffing 振子混沌吸引子内的周期-3 轨是自对称直接不稳周期轨的缘故.

## 4. 结 论

本文在半周期延迟反馈方法和 SC 混沌控制方法的基础上,提出基于稳定性准则的半周期延迟非线性反馈方法.通过对混沌系统的适当分离,得到一个特殊的非线性函数,并利用混沌输出信号与其半周期延迟信号的非线性函数的和,构造了连续反馈输入干扰,以稳定自对称直接不稳周期轨这一类型的 UPO.该方法继承了延迟反馈控制方法的优点,只需要提供期望 UPO 轨道的周期,并不需要外部振子提供 UPO 的详细信息,是自控制过程.同时由于该方法基于线性系统的稳定性准则,误差发展方程是渐进稳定的,保证了控制的有效性.控制过程可随时开始,具有简便、灵活性.给出耦合 Duffing 振子混沌控制的典型例子,数值模拟结果显示了 SC 半周期延迟非线性反馈方法控制的有效性.

[1] Ott E, Grebogi C, Yorke J A 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 1196  
 [2] Pecora L M, Carrol T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821  
 [3] Pyragas K 1992 *Phys. Lett. A* **170** 421  
 [4] Yu H J, Liu Y Z 2003 *Phys. Lett. A* **314** 292  
 [5] Yu H J, Liu Y Z 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066203  
 [6] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chinese Physics* **15** 1971  
 [7] Ushio T 1995 *Phys. Lett. A* **198** 14  
 [8] Shinbrot T, Grebogi C, Ott E, Yorke J A 1993 *Nature* **363** 411  
 [9] Atlee Jackson E, Grosu I 1995 *Physica D* **85** 1  
 [10] Zhang X M, Peng J H, Zhang R Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3019 (in Chinese) [张晓明、彭建华、张入元 2005 物理学报 **54** 3019]  
 [11] Zhang X M, Peng J H, Chen G R 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2864 (in Chinese) [张晓明、彭建华、陈关荣 2004 物理学报 **53** 2864]

[12] Yu H J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5053 (in Chinese) [于洪洁 2005 物理学报 **54** 5053]  
 [13] Ren H P, Liu D, Han C Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2694 (in Chinese) [任海鹏、刘丁、韩崇昭 2006 物理学报 **55** 2694]  
 [14] Garfinkel A, Spano M L, Ditto W L, Weiss J 1992 *Science* **257** 1230  
 [15] Schiff S J, Jerger K, Duong D H et al 1994 *Nature* **370** 615  
 [16] Yu H J, Lu H X 2002 *Chinese Journal of Mechanical Engineering* **38** 91 (in Chinese) [于洪洁、吕和祥 2002 机械工程学报 **38** 91]  
 [17] Huang L Y, Luo X S, Fang J Q et al 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 543 (in Chinese) [黄良玉、罗晓曙、方锦清等 2005 物理学报 **54** 543]  
 [18] Yu H J, Peng J H 2006 *CHAOS SOLITONS&FRACTALS*. **29** 342  
 [19] Pyragas K, Tamasevicius A 1993 *Phys. Lett. A* **180** 99

[ 20 ] Ushio T 1996 *IEEE Trans. CAS-I* **43** 815

[ 22 ] Nakajima H, Ueda Y 1998 *Phys. Rev. E* **58** 1757

[ 21 ] Nakajima H 1997 *Phys. Lett. A* **232** 207

## Controlling chaos using half period delay-nonlinear feedback<sup>\*</sup>

Yu Hong-Jie Zheng Ning

( *Department of Mechanics, Shanghai Jiaotong University, Shanghai 200240, China* )

( Received 19 September 2006 ; revised manuscript received 17 October 2006 )

### Abstract

A method of chaos control using half period delayed-nonlinear feedback based on stability criterion is proposed in present paper. By a suitable separation of chaotic system, a special nonlinear function is obtained. Using the sum of nonlinear function about the chaotic output signal and its half period delayed output signal a continuous feedback input perturbation is constructed. Self-symmetric directly unstable periodic orbits can be stabilized by the method without using any external force. The method retains the advantages of performing the self-control of delay feedback control and overcomes its limitations. Beside, the validity of control is ensured due to the stability criterion. The control can be started at any moment, and it is convenient and flexible. The coupled coupling Duffing oscillator is taken as a numerical example. The results of numerical simulation show the validity of the method.

**Keywords** : stability criterion, chaos control, half period delay, nonlinear feedback

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 10572086 ) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China( Grant No. 20050248031 ).