

双频驱动混沌系统的相同步和广义同步*

吴玉喜¹⁾²⁾ 黄霞³⁾ 高建¹⁾⁴⁾ 郑志刚¹⁾†

1) 北京师范大学物理系, 北京 100875)

2) 中国矿业大学理学院, 徐州 221008)

3) 华北电力大学数理系, 北京 102206)

4) 高等教育出版社, 北京 100011)

(2006 年 4 月 18 日收到, 2006 年 8 月 28 日收到修改稿)

研究了双频混沌信号驱动的混沌振子的广义同步和相同步问题. 发现了反偏向的相同步和正偏向的广义同步, 即响应振子可以优先与驱动强度弱的混沌信号达到相同步, 而广义同步则先在驱动强的信号和响应振子间建立起来. 对这些行为产生的动力学机理进行了详细地分析.

关键词: 相同步, 广义同步, 条件熵, 平均频率

PACC: 0545, 0547

1. 引 言

混沌系统间的同步问题人们讨论得比较详细的主要有完全同步、广义同步和相同步等几种形式. 完全同步是条件最强的一种同步形式, 它要求耦合的系统是完全一致的, 并且可以通过同步流形的横向李雅普诺夫指数小于零来判断是否建立了完全同步关系. 如果耦合的系统之间有参数失配, 系统间可能会达到广义同步或相同步. 本文研究双频驱动混沌系统的相同步和广义同步问题. 要对相同步进行研究, 就需要定义混沌振子的相位, 而相位的定义迄今为止一直是没有解决的问题. 所以人们对相同步的研究一直集中在低维简单的混沌系统.

关于相同步, 最简单的情况是耦合或驱动周期振子的同步行为, 其中 Kuramoto 平均场模型可以对此有深刻的描述. 在热力学极限(振子数 $N \rightarrow \infty$) 下, 系统存在一个临界耦合强度, 当耦合强度大于临界值时振子系统表现出相干行为. 周期驱动的极限环系统则可用圆映像给出漂亮的描述, 我们可观察到各种比例的锁相行为. 随后人们把相同步的概念扩展到混沌系统中来, 分别讨论了相互耦合混沌振子间的相同步^[1,2], 弱周期力驱动混沌系统的相同步

问题^[3], 驱动响应系统的相同步现象^[4], 在共同噪声作用下的两个混沌振子的相同步^[5]等等. 近来 Breban^[6]等人研究了在两个相互竞争的周期力作用下混沌振子的相位动力学, 并且在实验上已经得到了验证^[7].

尽管人们对混沌系统间的相同步问题进行了详细的研究, 仍然存在着许多含糊的, 甚至没有解决的问题. 例如, 如果两个相互竞争的不同的混沌信号同时驱动一个混沌响应系统, 三者之间会发生什么现象? 在现实世界中, 一个混沌系统同时受到两个甚至多个不同的混沌驱动信号作用是很平常的事. 据我们所知, 这个问题一直没有被详细的讨论过. 我们的研究发现, 系统间建立相同步关系和耦合强度的大小是不成正比的, 即耦合弱的振子和响应系统间可以先建立相同步关系, 耦合强的振子反而可能会后达到相同步. 我们分析了出现这种与直观现象不相符合现象的机理, 并发现有意义的交替相同步行为. 我们采用了条件熵的办法研究双频驱动情况下系统的广义同步. 对广义同步, 我们并没有发现类似于双频驱动下相同步关于耦合强度不对称的情形, 而是由系统间耦合强度的大小决定, 耦合强度大的系统间先建立广义同步关系.

* 国家自然科学基金(批准号: 70431002 与 10575010), 全国优秀博士论文专项(批准号: 200120), 教育部高校青年教师奖专项(批准号: 209)资助的课题.

† E-mail: zgzhen@bnu.edu.cn

2. 双频驱动混沌振子的相同步

为了方便问题的讨论,我们用两个具有较好旋转中心的不同的 Rössler 混沌振子去驱动另外一个 Rössler 混沌系统.驱动系统的动力学方程如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{12} &= -w_{12}y_{12} - z_{12}, \\ \dot{y}_{12} &= w_{12}x_{12} - ay_{12}, \\ \dot{z}_{12} &= f + z_{12}(x_{12} - c). \end{aligned} \quad (1)$$

响应系统的方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_0 &= -w_0y_0 - z_0, \\ \dot{y}_0 &= w_0x_0 - ay_0 + g(y_0, y_1, y_2), \\ \dot{z}_0 &= f + z_0(x_0 - c), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 w_1, w_2 分别是两个不同驱动系统的自然频率, w_0 表示响应系统的自然频率.为了讨论的方便,我们考虑 $w_1 < w_0 < w_2$ 的情况.驱动方程和响应方程中参数 a, c, f 都是相同的,分别为 $a = 0.165, c = 10, f = 0.2$ (保证三系统都处于混沌运动状态).为方便讨论,我们让 $w_{12} = w_0 \mp \Delta w$. $g(y_0, y_1, y_2)$ 表示驱动和响应系统的耦合函数,我们采用下面的线性形式:

$$g(y_0, y_1, y_2) = (\epsilon + r)(y_2 - y_0) + (\epsilon - r)(y_1 - y_0), \quad (3)$$

这里 ϵ 是扩散耦合强度, r 决定着相对于对称耦合的偏离程度.当 $r = 0$ 时,系统间的耦合是扩散耦合;而当 $r = \pm \epsilon$ 时,退化成单向耦合.

Rössler 振子由于其多数情况下很好的相干旋转性质,相位和振幅可以用轨道投影法简单定义为

$$\theta_i = \arctan \frac{y_i}{x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (4)$$

$$A_i = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (5)$$

其中下标 $i = 0, 1, 2$ 分别代表响应系统和两个驱动系统.平均转数为振子相速度的长时间平均:

$$\Omega_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\theta}_i(t) dt. \quad (6)$$

当平均频率间有关系 $\Omega_0 = \Omega_1$ 或 $\Omega_0 = \Omega_2$ 时,则两个驱动信号之一与响应系统间建立相同步关系.

上述轨道投影法定义相位的办法的前提条件是混沌系统的吸引子必须是很好的单心旋转结构.但对于 Rössler 振子,随着参数的不同,它不可能总是保持着单心结构.研究表明,当参数 a 超过临界值 a_c 的话,系统的轨道就不会保持围绕一个单心的旋

转特性,而出现局域转小圈的现象.例如,当 $\omega = 0.98$ 时, $a_c = 0.186$; 当 $\omega = 1.02$ 时, $a_c = 0.195$. $a > a_c$ 时,吸引子的形状变成了类似于漏斗状.随着系统参数 a 的增大,吸引子变形的就越严重,即局域转小圈的现象会不断增加.除了这种参数变化能使系统的旋转特性发生变化外,如果混沌系统受到外力的驱动,吸引子的这种相干结构也会受到破坏,在原来的旋转单心外出现许多小的转动.此时用轨道投影法定义的相位会丢失系统的许多信息,不能准确反映系统相位之间的关系.因此我们需要引入其他的相位定义办法.我们可以采用最近提出的时间导数空间 (\dot{x}, \dot{y}) 投影的方法^[8,9]来定义相位,这样的投影能够使在原来相空间中变形的吸引子又恢复到很好的单心旋转结构.对 Rössler 系统,在时间导数空间中相位的表达式为

$$\theta_i = \arctan \frac{\dot{y}_i}{\dot{x}_i}, \quad i = 0, 1, 2, \quad (7)$$

有了系统相位,平均频率可按照(6)式计算出来.当 x, y 平面有好的单心结构时,两种不同相位定义方法可得到相同的平均结果.在本文中对相位的研究我们都采用此定义方法.

通过选择参数 r/ϵ 的不同比值来讨论响应系统的相位动力学.分别固定 $r = 0.8\epsilon, 0.5\epsilon, 0.1\epsilon, 0$. 首先,我们可以通过频闪图的方法来辅助考察系统间是否建立了相同步的关系,在图 1(a)中, $r = 0.8\epsilon, \epsilon = 0.07$, 灰色背景为驱动系统 2 的混沌吸引子.响应系统的频闪轨迹主要集中在吸引子上的某个区域,说明驱动系统 2 和响应系统间建立了相同步的关系.在(b)中,参数的选择等同于(a),灰色背景为驱动系统 1 的混沌吸引子在 $x - y$ 平面上的投影,频闪图在整个吸引子上的分布表示系统 1 和响应系统间没有达到相同步.在(c)和(d)中也可以得到类似的结果.(c)(d)中 $r = 0.1\epsilon, \epsilon = 0.07$.

为了详细的研究在一定的耦合强度 ϵ 范围内,耦合混沌系统间的相同步行为,对于每一个不同的比值,在图 2 我们作出 $\Delta\Omega - \epsilon$ 的关系图,这里 $\Delta\Omega_i = |\Omega_i - \Omega_0| (i = 1, 2)$ 表示两个不同的驱动信号与响应系统间的平均频率差.当 $\Delta\Omega = 0$ 时,系统间建立了相同步的关系.人们通常会发现,哪个驱动信号的耦合强度大,应该是首先和响应系统间达到相同步.在图 2(a)中,我们固定 $\omega_0 = 1.0, \Delta\omega = 0.03$, 当 $r = 0.8\epsilon$ 时,可以发现,随着耦合强度的增大,响应系统和驱动系统 2 首先建立相同步关系,它们平均

频率的差值降为零. 这很容易解释, 因为响应系统和驱动系统 2 间的耦合强度远比它和驱动系统 1 间的耦合强度大. 现在我们逐渐的减小 r/ϵ 的比率, 当 r/ϵ 一直降低到 $r = 0.5\epsilon$ 时, 在图 2(b) 中, 我们观察到一个有意思的现象, 此时驱动系统 2 和响应系统

间的耦合强度仍然大于驱动系统 1, 但是相同步却在 $\epsilon = 0.058$ 处率先在驱动系统 1 和响应系统间建立起来. 也就是说, 系统间强的耦合强度并不总能使系统间达到相同步, 相反弱耦合有时能对相同步起到至关重要的作用, 这个结论超出了我们原先的预计.

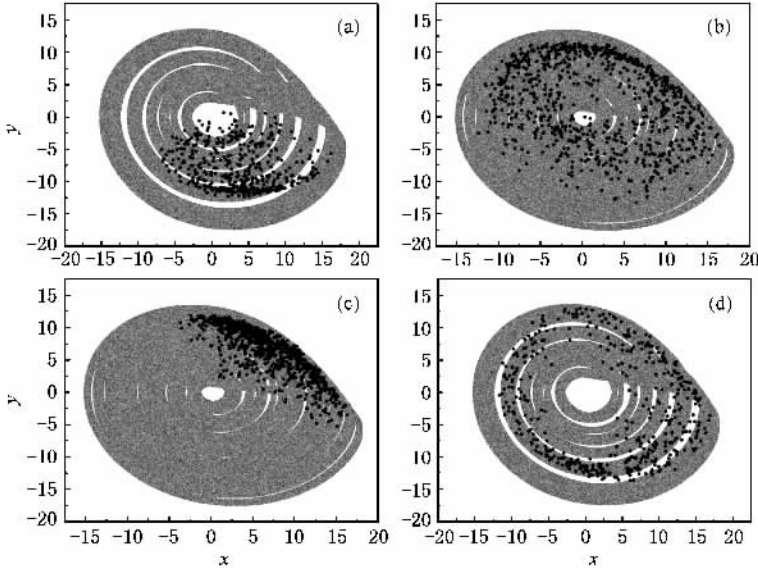


图 1 (a)–(d) 为研究响应系统的频闪图 ((a)(b) 中 $r = 0.8\epsilon, \epsilon = 0.07$ (c)(d) 中 $r = 0.1\epsilon, \epsilon = 0.07$ (a)(d) 与 (b)(c) 分别以驱动系统 2 和驱动系统 1 的周期为频闪频率 (灰色的背景). 响应系统在 (a)(c) 中的局域分布表明响应系统分别与驱动系统 2 和驱动系统 1 间建立了相同步关系; 在 (b)(d) 中的整个吸引子上的分布, 说明响应系统和两个驱动系统间都没有达到相同步)

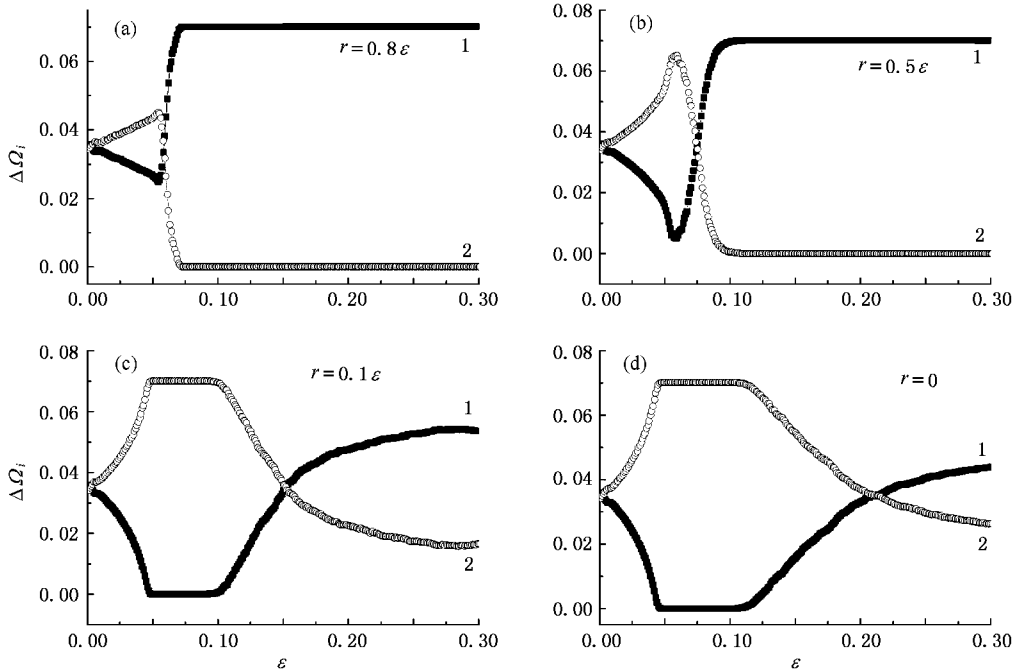


图 2 对于不同的 r/ϵ 比率 $\Delta\Omega_i$ 随耦合强度 ϵ 的变化关系 ($\Delta\Omega_i = |\Omega_i - \Omega_0|$ ($i = 1, 2$), $\omega_0 = 1.0, \Delta\omega = 0.03, \omega_{1,2} = \omega_0 \mp \Delta\omega$) (a) $r/\epsilon = 0.8$ (b) $r/\epsilon = 0.5$ (c) $r/\epsilon = 0.1$ (d) $r/\epsilon = 0$ (a) 中, 相同步首先在响应系统和高频驱动系统 (黑线) 间建立起来 ($\Delta\Omega_2 = 0$). (b)–(c) 中, 响应系统和低频驱动系统 (灰线) 间先达到相同步 ($\Delta\Omega_1 = 0$)

在频闪图 1(c) 中的有限区域内分布和在图 1 (d) 中的杂乱分布, 分别说明了驱动系统和响应系统

间建立与没有建立相同步关系.为了解释这种不对称性,在图3中,我们作出了在 $r/\epsilon-\epsilon$ 平面上系统相同步的相图.我们固定 r/ϵ 的比值在 -1 和 1 之间变化,并且扩散耦合强度在 $(0, 1]$ 范围内.图中实线和虚线分别对应于驱动系统 2、驱动系统 1 与响应系统间相同步的临界线,用 A, B 作系统 1 2 与驱动系统的相同步区域.为了方便对现象的观察,我们作出了 $r/\epsilon = 0$ 的线,这相当于系统间是对称耦合的情形.从相图中可以很清楚地看出,响应系统对驱动系统 1 和驱动系统 2 的响应是不对称的.在图 3 中,当耦合强度 ϵ 在 0.045 到 0.114 范围内变化,并且 r/ϵ 的比率不是很大时,我们可以发现驱动系统 1 的相同步临界曲线存在一个尖峰,这个尖峰与 $r/\epsilon = 0$ 线所包围的区域正好反映了驱动系统 1 和响应系统提前于驱动系统 2 和响应系统间达到相同步的区域.因此,在图 2 中发生的反常现象主要就是因为响应系统对驱动系统 1 和驱动系统 2 的响应是不对称的.

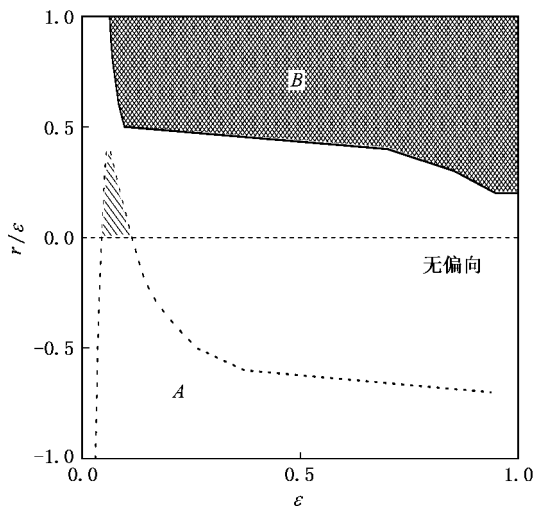


图 3 在 $r/\epsilon-\epsilon$ 平面上的相同步临界线 A, B 标志的区域为相同步区域.参数选择在点临界线下面,表示响应系统和驱动系统 1 (低频系统)间建立相同步关系,而如果参数落在实临界线以上,代表响应系统和驱动系统 2 (高频系统)间发生锁频)

下面我们来分析上述同步区域不对称的机理.当驱动系统 2 的耦合强度大于或者等于驱动系统 1 时,为什么相同步没有首先出现在响应系统和驱动系统 2 (高频系统)之间,而是在响应系统和驱动系统 1 (低频系统)之间先建立起来?我们分两步来讨论.若只考虑相位效应,假设两个不同自然频率的极限环,其中一个去驱动另外一个系统.最简单的驱动响应动力学方程可以写成

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_d &= \omega_d, \\ \dot{\theta}_r &= \omega_r + r \sin(\theta_d - \theta_r), \end{aligned} \tag{8}$$

通过引入 $\Theta = (\theta_r - \theta_d)$, 方程组 (8) 式可以转化为

$$\dot{\Theta} = (\omega_r - \omega_d) - r \sin \Theta, \tag{9}$$

锁相的解要求 $\dot{\Theta} = \dot{\theta}_r - \dot{\theta}_d = 0$. 当 $r > r_c = |\omega_r - \omega_d|$ 时, 响应极限环与驱动系统锁相. 这意味着只要 $\Delta\Omega = |\omega_r - \omega_d|$ 被固定, 不管自然频率间是 $\omega_r < \omega_d$ 还是 $\omega_r > \omega_d$, 锁相临界值 r_c 应该是相同的. 因此出现锁相的区域对 $\omega_r - \omega_d$ 是对称的.

当系统间耦合强度超过一个临界值时, 响应系统就会与驱动系统 1 之间建立相同步的关系. 这个行为可以在图 2(c) 中清楚的观察到, 此时 $r = 0.1\epsilon$. 图中的平台表示响应和驱动系统间的平均频率差为零 $\Delta\Omega_1 = 0$, 即响应系统和驱动系统 1 之间建立了锁频的关系, 达到了相同步. 类似的同步平台也可以在图 2(d) 中观察得到, 此时驱动和响应系统间是对称的耦合, 即 $r = 0$.

事实上, 对于 (8) 式描述的耦合极限环系统, 由于仅仅由相位动力学来描述, 因此同步区域与 $\omega_r - \omega_d$ 的正负无关, 同步区域是对称的. 由此可知, 上述不对称同步的根本原因在于振幅对相位动力学的影响. 因此继续研究一个考虑了振幅效应的简单的极限环系统, 其具体的动力学为

$$\dot{z} = z [1 + i(\omega + q) - (1 + iq)z\bar{z}], \tag{10}$$

\bar{z} 为 z 的共轭. 把此方程变换到极坐标中 $z = r e^{i\theta}$ 为

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r [1 - r^2], \\ \dot{\theta} &= \omega + q(1 - r^2). \end{aligned} \tag{11}$$

这里 ω 为极限环系统的自然频率, q 是振子的非等时效应, 它描述了振子频率对振幅的依赖性.

我们考虑 N 个相互耦合的振子, 耦合项为

$$(\epsilon/N) \sum_{i,j=1}^N (z_j - z_i), i \neq j, \text{ 在极坐标中的形式为}$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= r_i (1 - r_i^2) \\ &+ \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N [\cos \theta_i (r_j \cos \theta_j - r_i \cos \theta_i) \\ &+ \sin \theta_i (r_j \sin \theta_j - r_i \sin \theta_i)], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \omega_i + q_i (1 - r_i^2) \\ &+ \frac{\epsilon}{N} \frac{1}{r_i} \sum_{j=1}^N [\cos \theta_i (r_j \sin \theta_j - r_i \sin \theta_i) \\ &+ \sin \theta_i (r_j \cos \theta_j - r_i \cos \theta_i)]. \end{aligned} \tag{13}$$

假设我们选择的是参数失配较小的振子, 则每个振子径向上耦合作用带来的扰动差不多, 此时我们可以认为 $r_j \approx r_i$. 所以上面两方程可以简化为

$$\dot{r}_i = r_i(1 - r_i^2) + r_i \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N (\cos \phi_{ij} - 1), \quad (14)$$

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + q_i(1 - r_i^2) + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N \sin \phi_{ij}. \quad (15)$$

其中 $\phi_{ij} = \theta_j - \theta_i$. 当径向变量 r_i 随时间演化到定态时, $\dot{r}_i = 0$, 可以得到 $1 - r_i^2 = \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N \cos \phi_{ij} - 1$, 将其代入(15)式, 我们可以得到考虑振幅效应时的相位方程

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + \frac{\epsilon}{N} \sum_{j=1}^N [\sin \phi_{ij} + q_i(1 - \cos \phi_{ij})]. \quad (16)$$

考虑 $N = 2$ 的情况, 则相位差方程为

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - \epsilon [2\sin \phi + \Delta q (\cos \phi - 1)], \quad (17)$$

其中 $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, $\Delta q = q_2 - q_1$, $\phi = \theta_2 - \theta_1$. 通过(17)式可以解出 ϕ , 再通过角速度 $\dot{\phi}$ 的平均值我们可以求出系统间的平均频率差 $\Delta\Omega = \dot{\phi}$ 的具体解析式

$$\Delta\Omega(\epsilon) = \sqrt{\Delta\omega^2 + 2\epsilon\Delta\omega\Delta q - 4\epsilon^2}. \quad (18)$$

当 $\Delta q = 0$ 时(两振子具有相同的振幅效应), 我们可以从图 4 中发现 Arnold 舌头是关于 $\Delta\omega = 0$ 对称的(虚线所示); 当两个振子振幅效应不相同, 它们就存在不同的 q , 即 $\Delta q \neq 0$, 从图 4 中可以看出 Arnold 舌头已经失去了对称的结构. 这反映了不同振幅响应的系统对不同频率响应是非对称的, 这就是上面看到的同步区域不对称的机理.

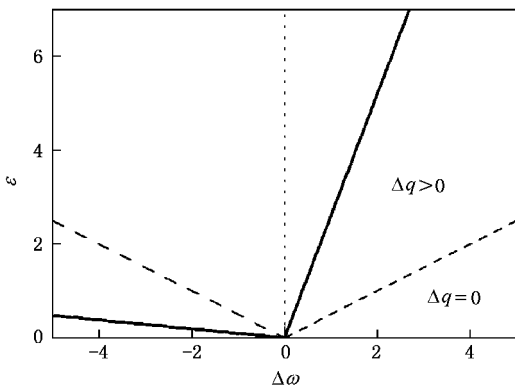


图 4 系统间自然频率差 $\Delta\omega$ 与耦合强度 ϵ 的关系($\Delta q = 0$ 时, 曲线关于 $\Delta\omega = 0$ 对称; $\Delta q > 0$ 时, 曲线关于 $\Delta\omega = 0$ 不对称)

对于我们讨论的混沌系统, 为了更好的说明这个问题, 利用上面的思路, 在图 5 中, 我们分别作出了相同步的临界线 C_1 和 C_2 , C_1 为响应系统单独受低频($\omega_1 < \omega_0$)驱动系统 1 作用时的相同步临界线; C_2 是响应系统只有高频($\omega_2 > \omega_0$)驱动系统 2 驱动

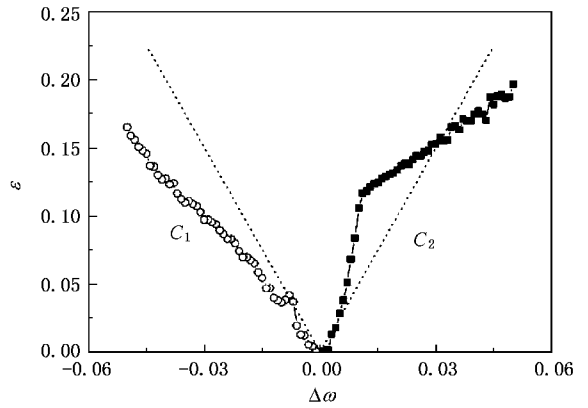


图 5 在 $\epsilon - \Delta\omega$ 平面上的相同步临界线(C_1 为响应系统单独受低频驱动系统 1 作用时的相同步临界线; C_2 是响应系统只受高频驱动系统 2 驱动时相同步的临界线图. 两条对称的点是為了与相同步临界线进行比较)

时相同步的临界线. 图中横坐标代表的是响应系统和两个驱动系统间自然频率的失配 $\Delta\omega = \omega_i - \omega_0$ ($i = 1, 2$), 纵坐标表示系统间的耦合强度 ϵ , 临界线以上为相同步区域. 从图中可以发现, 相对于对称的 Arnold 舌头(对应于周期振子的锁相区域)来说, 图中的“舌头”发生了一些变形. 向 C_1 方向作了转动, 响应系统和驱动系统 1 间更容易建立相同步关系, 这与图 4 的行为是完全一致的. 正是由于响应系统的这种不对称的响应, 使的双频驱动的混沌振子产生了丰富的相同步和复杂的相互竞争的动力学行为.

上面已经讨论了双频驱动系统的反常相同步问题以及产生的原因. 下面我们集中研究一下非相同步区域的动力学. 我们选择 $r = 0.1\epsilon$, 主要讨论响应系统和两个驱动系统间的相位差 $\Delta\theta_i = |\theta_i - \theta_0|$ ($i = 1, 2$). 在图 6(a)~(d)中, 分别作出了耦合强度 $\epsilon = 0.045, 0.105, 0.12, 0.9$ (非相同步区域) 时相位差随时间的演化关系. 可以很清楚的发现, 响应系统和两个驱动系统间是交替锁相的. 图 6(c)中, 在 $1.9 \times 10^5 < t < 2.7 \times 10^5$ 范围内, $\Delta\theta_1$ 近似为常数, $\Delta\theta_2$ 则随时间增长. 在 $3.4 \times 10^5 < t < 3.6 \times 10^5$ 范围内, 同样可以找到 $\Delta\theta_2$ 近似不变, 而 $\Delta\theta_1$ 随时间变化. 从图 6(c)中可以看到, 系统存在两个相同步临界点 $\epsilon_{c1} = 0.047, \epsilon_{c2} = 0.101$. 随着响应系统和驱动系统 2 间的耦合强度的增大, 响应系统和驱动系统 1 间相同步逐渐失稳并又会与驱动系统 2 间建立相同步关系. 我们研究系统在两个临界点附近的行为, 分别取耦合强度 $\epsilon = 0.045$ 和 $\epsilon = 0.101$. 从图 6(a)~(b)

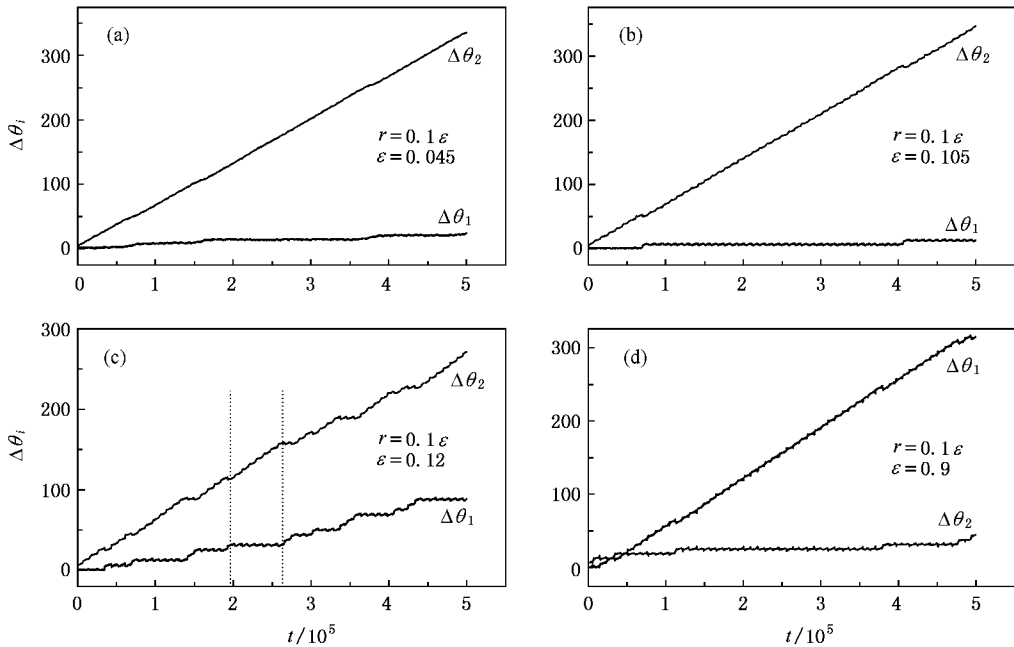


图 6 在非同步区域响应系统和两个驱动系统间的相位差的演化情况 $\Delta\theta_i = |\theta_i - \theta_0| (i=1, 2), r/\varepsilon = 0.1$ (a) $\varepsilon = 0.045$ (b) $\varepsilon = 0.105$ (c) $\varepsilon = 0.12$ (d) $\varepsilon = 0.9$ 可以在响应系统和两个驱动系统间出现交替锁相平台的现象)

中可以发现, 响应系统和驱动系统 1 (低频系统) 间有一个很大的锁相平台, 并且两个相邻的锁相平台间有一个短促的相移. 也就是说, 在绝大多数时间里锁相是发生在响应系统和驱动系统 1 之间. 随着耦合强度的增大, 响应系统和驱动系统 2 之间的锁相平台会越来越大. 在图 (d) 中, 取 $\varepsilon = 0.9$ (ε 相对较大但小于临界值 ε_{c3}), 可以很清楚地看到在响应系统和驱动系统 2 (高频系统) 间有一个很大的锁相平台. 我们还讨论了小参数失配的情况. 取 $\Delta\omega = 0.01$ ($\omega_1 = 0.99, \omega_2 = 1.01$), 我们发现系统的相同步交替行为与上面的结果是相似的, 即相同步区域与耦合强度大小存在不对称性.

3. 双频驱动混沌振子的广义同步

接下来我们考虑有关广义同步的问题. 若在这样的驱动下, 三个系统间的广义同步和系统间耦合强度会是什么关系? 特别地, 一个系统受到两个子系统的驱动时, 系统会先与哪一个子系统发生广义同步? 对于这个问题, 最重要的是如何判断广义同步. 在这里, 利用响应系统最大条件李雅普诺夫指数小于零的方法只能判断响应系统和两个驱动系统间建立了广义同步的关系, 而不能详细的确定出响应系统和各个驱动系统间的同步情况. 利用辅助系统

的方法同样也只能确定三个系统间整体的广义同步情况. 实际上我们可以借助 Liu 等在 1997 年提出的条件熵的办法^[10]. 此方法的主要思想如下, 首先从系统的吸引子上可以确定一个所有混沌轨道都穿过它的平面, 这个平面往往包含一个不稳定的不动点. 把这个平面作为彭加勒截面 (具体的介绍见文献 [11]). 我们可以利用这个截面和求得的符号序列 S_i 来代表系统的时间序列, 并且这个截面能使系统的熵达到最大值. S_i 的值通过下面的规则确定: 当时间序列在此截面之上时 $S_i = 1$, 而在截面下方时 $S_i = 0$, 然后再把得到的长符号序列分割成等长 ($L = 5$) 部分, 并把每个等长的短符号序列记成一个唯一的整数^[12, 13]

$$l = \sum_{i=1}^L 2^{L-i} S_i, \quad (19)$$

这个序列 l 在粗粒化意义上可以象征动力学系统的相空间, 所以时间序列 $x_i(n), y_i(n)$ 用 $l_x(n)$ 和 $l_y(n)$ 代替. 如果时间序列 $x_i(n), y_i(n)$ 间没有建立任何关系, 则 $l_x(n), l_y(n)$ 的演化是不关联的. 相反, 如果 $x_i(n), y_i(n)$ 间建立了广义同步关系, 则可以在 $l_x(n), l_y(n)$ 间发现一些联系. 这种相关性可以通过对时间的平移破坏掉: $l_x(n), l_y(n + n_0)$, 条件熵的具体定义为^[14]

$$E(y|x) = -\frac{1}{N_l} \sum_x \frac{1}{L} \sum_{l_y|l_x} P(l_y(n+n_0)|l_x(n)) \times \ln P(l_y(n+n_0)|l_x(n)), \quad (20)$$

这里 $P(l_y|l_x)$ 表示变量 y_j 占据 l_y 态且变量 x_j 占据 l_x 态的条件概率. N_l 为不同 l_x 序列的总数, $\sum_{l_y|l_x}$ 是在 l_x 态固定的情况下对所有可能 l_y 态的求和.

我们下面仍讨论两个混沌 Rössler 信号去驱动另外一个 Rössler 系统时的广义同步行为(见(1)和(2)式),不同的是系统间耦合作用在响应系统的 x 变量上.为了确定系统达到广义同步时各驱动信号与响应系统的耦合强度的大小,我们先作出响应系统的最大条件李雅普诺夫指数作为参考.图7为响应系统在两个混沌驱动信号作用下的最大条件李雅普诺夫指数.从图中可以看出,在 $\epsilon = 0.075$ 时,最大条件李雅普诺夫指数小于零,响应系统和驱动系统建立广义同步关系,下面我们集中讨论在此临界耦

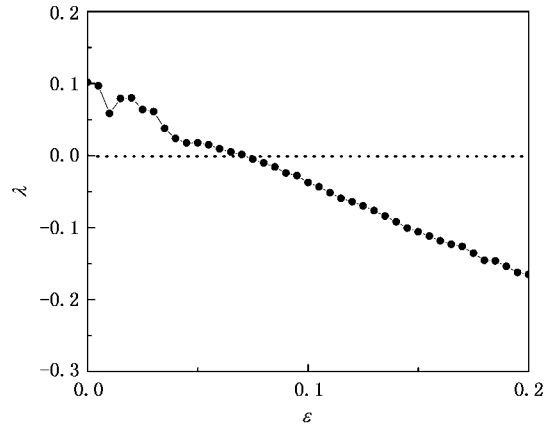


图7 两个不同的驱动信号作用下, $r = 0.5\epsilon$ 时,响应系统的条件李雅普诺夫指数 λ 随耦合强度 ϵ 的变化关系(在 $\epsilon = 0.075$ 处, $\lambda < 0$)

合强度前后,两个驱动信号和响应系统的关系.

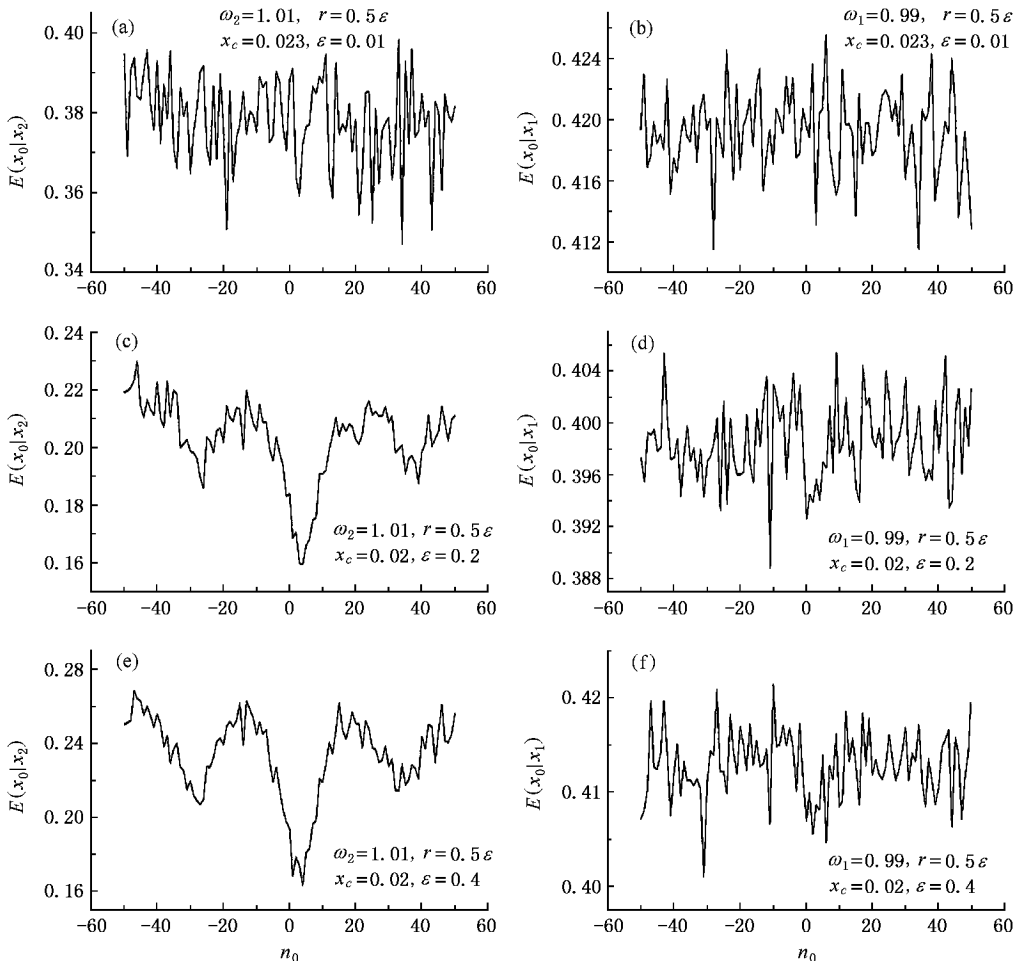


图8 不同的耦合强度下,两驱动信号与响应系统间条件熵和时间平移的关系(自然频率 $\omega_0 = 1.0, \omega_1 = 0.99, \omega_2 = 1.01, x_c$ 表示截面所在的位置, $r = 0.5\epsilon$). (a) (b) 耦合强度 $\epsilon = 0.01$ (c) (d) 耦合强度 $\epsilon = 0.2$ (e) (f) 耦合强度 $\epsilon = 0.4$. 在(c) (e) 中条件熵存在最小值,表示高频系统和响应系统间建立了广义同步关系)

我们首先研究一下高频驱动系统与响应系统耦合强度较大时的情况.我们以 x 变量的时间序列作为研究对象.取 $r = 0.5\epsilon$,在图 8(a)–(f)中是条件熵和时间平移 n_0 的关系.在(a)(b)中耦合强度为 $\epsilon = 0.01$ (小于广义同步的临界值),可以看到条件熵的变化并没有很明显极小值出现,这表明在响应系统和两个驱动系统间都没有建立广义同步的关系.在(c)(d)中,我们增大耦合强度到 $\epsilon = 0.2$,在(c)中可以发现条件熵在 $n_0 = 3$ 处出现最小值,表明高频系统和响应系统达到了广义同步.在(d)中,条件熵反映的是低频系统和响应系统间的关系,曲线一直在上下波动,没有明显的极小值,所以低频响应系统与驱动系统间仍然没有建立广义同步的关系.我们进一步增大耦合强度,来看三系统间是否仍然保持这样的关系.为此我们作出了 $\epsilon = 0.4$ 时条件熵和时间平移之间的关系.在(e)中,类似于(c),我们发

现条件熵最小值的出现,表明高频系统和响应系统间仍然具有广义同步的关系.(f)中,我们同样没有发现条件熵在某个 n_0 处出现最小值,说明低频系统和响应系统间没有达到广义相同步.

我们再讨论低频驱动系统耦合强度较大的情况.取 $r = -0.5\epsilon$.图 9(a)–(f)中我们计算了不同耦合强度下系统间的条件熵和时间平移 n_0 之间的关系图.在(a)(b)中,耦合强度小于系统广义同步的临界耦合强度,所以在两幅图中条件熵都没有明显的最小值,说明任何两系统间都没有建立广义同步的关系.增大耦合强度至 $\epsilon = 0.2$,与图 8(b)(c)相反,由于此时低频系统的耦合强度远大于高频系统的耦合强度,所以广义同步先在低频和响应系统间建立起来.我们可以在图 9(d)中发现条件熵的最小值,而在图 9(c)中条件熵却一直在上下波动且找不到明显的极小值.继续增大耦合强度到 $\epsilon = 0.4$,

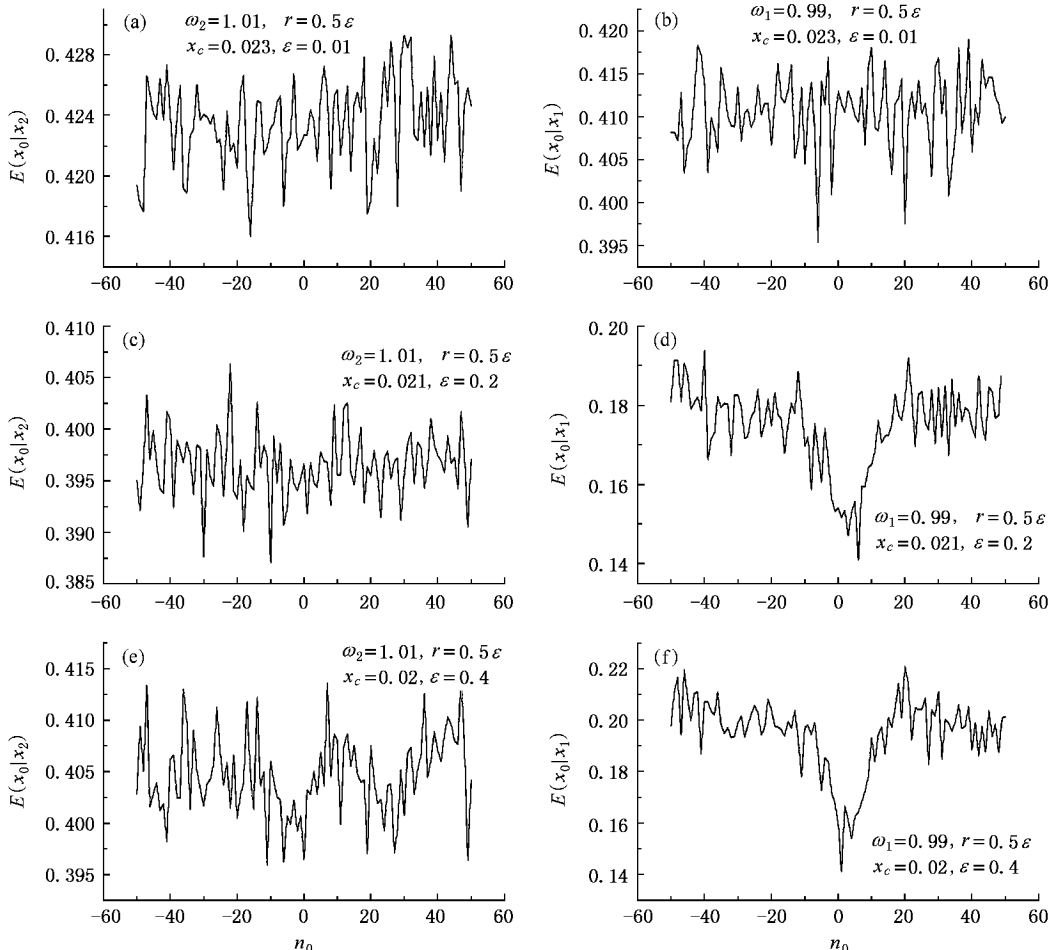


图9 不同的耦合强度下,两驱动信号与响应系统间条件熵和时间平移的关系(自然频率 $\omega_0 = 1.0, \omega_1 = 0.99, \omega_2 = 1.01, x_c$ 表示截面所在的位置, $r = -0.5\epsilon$.(a)(b)耦合强度 $\epsilon = 0.01$ (c)(d)耦合强度 $\epsilon = 0.2$ (e)(f)耦合强度 $\epsilon = 0.4$.在(d)(f)中条件熵存在最小值,表示低频系统和响应系统间建立了广义同步关系)

可发现在图 $\alpha(f)$ 中条件熵有最小值, 虽然最小值的大小没有什么变化, 但与其周围的价值比较起来, 图 9 (f) 中比图 (d) 中条件熵的最小值更加明显. 说明在大的耦合强度下, 低频系统和响应系统间的广义同步关系更加稳固. 我们同时也研究了 $r = 0.3\epsilon$, $r = 0.1\epsilon$, $r = -0.1\epsilon$ 和 $r = -0.3\epsilon$ 等情况, 结论跟我们上面详细说明的两个情况差不多, 总体上来说, 哪个系统的驱动强度大一些, 哪个系统就先和响应系统间建立广义同步的关系. 我们同时也研究了两个不同混沌 Rössler 信号驱动洛伦兹振子的情况, 也得到了类似的结果.

4. 结论和讨论

本文中研究了双频驱动混沌系统的相同步和广义同步问题. 当两个混沌信号通过相互竞争与响应系统间建立相同步的关系时, 即使高频驱动系统与

驱动系统的耦合强度大于低频驱动系统与驱动系统的耦合强度, 相同步的关系也会首先在低频驱动系统和响应系统间建立起来. 这种现象的出现可以归结为响应系统对高频驱动系统和低频驱动系统的不对称响应. 我们发现响应系统和低频驱动系统间达到相同步所需的临界耦合强度小于它和低频驱动系统间建立相同步时的耦合强度. 在相同步临界点附近随着耦合强度的增大, 响应系统和一个驱动信号间的相同步渐渐失稳并逐渐过渡到与另外一个驱动信号建立相同步. 在非相同步区域系统出现了交替锁相的现象. 我们还讨论了双频驱动下系统的广义同步现象. 我们借助条件熵作为广义同步建立的判据, 发现那个驱动信号与响应系统间的耦合强度大, 一般的就会与响应系统间先建立起广义同步的关系. 这种关系与我们的直觉图像是一致的, 但与前面出现的相同步的反常行为不一致.

- [1] Zheng Z G, Hu G *et al* 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2327 (in Chinese)
[郑志刚、胡 岗等 2000 物理学报 **49** 2327]
- [2] Bao G, Han Y C 2005 *J. of IMNU (Natural Science)* **1** 4 (in Chinese) [包 刚、韩元春 2005 内蒙古民族大学学报(自然科学版) **1** 4]
- [3] Hao J H, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝建红、李 伟 2005 物理学报 **54** 3491]
- [4] Gao J, Zheng Z G *et al* 2003 *Chin. Phys. Lett.* **20** 7
- [5] Zhou C, Kurths J 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 230602
- [6] Breban R, Ott E 2002 *Phys. Rev. E* **65** 056219
- [7] Mcallister R, Mecucci R, Deshazer D, Roy R 2003 *Phys. Rev. E*

67 01520(X R)

- [8] Hu B, Liu Z, Zheng Z 2001 *Commun. Theor. Phys.* **35** 425
- [9] Osipov G V, Hu B B, Zhou C S *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 024101
- [10] Liu Z H, Cheng S G 1997 *Phys. Rev. E* **56** 7297
- [11] Fang H P, Liu Z H 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2790
- [12] Rechester A B, White R B 1991 *Phys. Lett. A* **156** 419
- [13] Rechester A B, White R B 1991 *Phys. Lett. A* **158** 51
- [14] Lehman M, Rechester A B, White R B 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 54

Phase synchronization and generalized synchronization in doubly driven chaotic oscillators^{*}

Wu Yu-Xi^{1,2)} Huang Xia³⁾ Gao Jian^{1,4)} Zheng Zhi-Gang^{1)†}

1) *Department of Physics, Beijing Normal University, Beijing 100875, China*

2) *College of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China*

3) *Department of Mathematics and Physics, North China Electric Power University, Beijing 102206, China*

4) *Higher Education Press, Beijing 100011, China*

(Received 18 April 2006 ; revised manuscript received 28 August 2006)

Abstract

Phase synchronization (PS) and generalized synchronization (GS) of a chaotic oscillator driven by two chaotic signals is investigated. Anti-biased PS and biased GS in the presence of biased coupling are found, *i. e.*, the response oscillator can be phase synchronized (generally synchronized) by the drive with a weaker (stronger) coupling rather than the stronger (weaker) driver. The mechanism for these behaviors are explored.

Keywords : phase synchronization, generalized synchronization, conditional entropy, average frequency

PACC : 0545, 0547

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 70431002 and 10575010), the Foundation for the Author of National Excellent Doctoral Dissertation of China (Grant No. 200120), and the TRAPOYT in Higher Education Institutions of MOE (Grant No. 209).

[†] E-mail: zgzhen@bnu.edu.cn