

# 单粒子共振态的实稳定方法研究\*

张 力<sup>1)</sup> 周善贵<sup>2)†</sup> 孟 杰<sup>1)‡</sup> 赵恩广<sup>2)‡</sup>

1) 北京大学物理学院, 北京 100871)

2) 中国科学院理论物理研究所, 北京 100080)

3) 兰州重离子加速器国家实验室原子核理论中心, 兰州 730000)

(2006 年 11 月 20 日收到, 2006 年 12 月 12 日收到修改稿)

基于实稳定方法的基本思想, 在坐标空间求解了一维势阱和三维球对称势阱中的单粒子共振态, 得到的共振能量、宽度和波函数等与散射相移法以及耦合常数的解析延拓方法的结果一致.

关键词: 共振态, 实稳定方法, 相移, 共振宽度

PACC: 0635N, 2110P, 2570E

## 1. 引 言

连续态和共振态是量子物理研究领域的重要课题. 近年来, 连续谱对量子体系性质的影响受到越来越多的重视. 例如, 在原子核物理中, 放射性核束实验装置的建造和相关探测技术的发展, 使得研究具有极端中子质子数比的奇特原子核成为可能<sup>[1]</sup>. 连续谱区的共振态对这些奇特核的性质有重要的影响<sup>[2-4]</sup>.

研究共振态的理论方法主要有两类. 一类方法基于传统的散射理论, 如  $R$  矩阵理论<sup>[5]</sup>、 $K$  矩阵理论<sup>[6]</sup>、 $S$  矩阵理论<sup>[7]</sup>等. 另一类为类束缚态处理方法. 相对于连续态和共振态, 束缚态比较容易求解, 有很多成熟的方法可以有效地处理束缚态问题. 因此, 如果能基于束缚态的处理方法来研究共振态, 则共振态问题就可以得到简化. 基于这一思想, 人们发展了许多类束缚态处理方法. 例如实稳定方法 (real stabilization method, RSM)<sup>[8-11]</sup>、复标度方法 (complex scaling method, CSM)<sup>[12]</sup>、耦合常数的解析延拓方法 (analytic continuation in the coupling constant method, ACCC)<sup>[13-16]</sup>等.

实稳定方法在不同大小的基空间求解束缚态本征值问题. 当基空间足够大时, 在分立能区, 各本征

态的能量不随基空间的大小而变化. 在连续谱能区, 大多数本征态的能量随基空间的增大而逐渐降低, 但存在一些本征态, 其能量也不随基空间大小而改变. 这些态即对应着共振态. 文献 [9] 利用谐振子基展开方法, 通过研究一个一维模型势中的共振态问题, 探讨了谐振子基空间的实稳定方法. 本工作将发展坐标空间的实稳定方法, 并结合原子核的单粒子共振态, 进一步探讨实稳定方法.

本文首先简要介绍处理共振态的散射相移方法 (scattering phase shift method, SPSM), ACCC 方法和实稳定方法的基本思想. 然后利用坐标空间的实稳定方法计算一维势场中的共振态和球形谐振子势、球对称 Woods-Saxon 势中的单粒子共振态, 并将实稳定方法的计算结果与 ACCC 方法、散射相移方法的结果进行比较.

## 2. 理论与计算细节

本文主要讨论一维势阱和球对称三维势阱中的单粒子共振态. 为讨论方便, 将不考虑粒子的自旋. 在一维势阱  $V(x)$  中运动的粒子, 其能量  $E$  和波函数  $\psi(x)$  满足本征方程

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right] \psi(x) = E\psi(x), \quad (1)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 10435010, 10475003 和 10575036), 国家重点基础研究发展规划 (批准号: G2000077407) 和中国科学院知识创新工程重要方向性项目 (批准号: KJCX-SYW-N2) 资助的课题.

† E-mail: sgzhou@itp.ac.cn

三维势阱  $V(\mathbf{r})$  中运动的粒子的 Schrödinger 方程为

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}). \quad (2)$$

对于中心力场,波函数的角度和径向部分可以分离

变量,  $\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{r} \chi_l(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$ , 径向波函数满足

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2m}{\hbar^2} V(r) \right] \chi_l(r) = E\chi_l(r). \quad (3)$$

## 2.1. 散射相移法求解共振态

散射相移法<sup>[17-20]</sup>通过求解满足散射态边界条件的 Schrödinger 方程得到给定能量对应的波函数及相移. 一维势和三维中心势下散射态边条件分别为

$$\psi(x) = \sin(kx + \eta), \quad x \rightarrow \infty, \quad (4)$$

$$\chi_l(r) = \frac{1}{k} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l\right), \quad r \rightarrow \infty. \quad (5)$$

在一个孤立的共振态附近,相移与能量满足

$$\eta(E) = \eta_{\text{pot}}(E) + \tan^{-1}\left(\frac{\Gamma/2}{E - E_\gamma}\right), \quad (6)$$

其中  $E_\gamma$  和  $\Gamma$  是共振态能量和宽度,  $\eta_{\text{pot}}(E)$  是势散射对相移贡献.  $\eta_{\text{pot}}(E)$  随能量的变化缓慢, 因此通常写为能量  $E$  的低阶多项式. 利用求得的相移和能量去拟合式(6)就可以确定  $E_\gamma$  和  $\Gamma$ .

## 2.2. 耦合常数解析延拓方法求解共振态

ACCC 方法的基本思想<sup>[13]</sup>是在体系的 Hamiltonian 中,通过增强吸引势,将非束缚态变为束缚态进行求解,再利用能量或动量与耦合常数的解析关系,将非束缚态作为束缚态的解析延拓来处理. 例如,在(3)式的  $V(r)$  中引入耦合常数  $\lambda$ :  $V(r) \rightarrow \lambda V(r)$ . 从  $\lambda = 1$  开始增大  $\lambda$ , 非束缚态将会降低; 当  $\lambda$  大于某一阈值  $\lambda_0$  时, 该态开始变为束缚态 ( $E(\lambda_0) = 0$ ).  $\lambda_0$  称为分支点.

在分支点附近,波数  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$  可以表示为  $\lambda$  的函数, 近似地有

$$k(\lambda) \sim \begin{cases} i\sqrt{\lambda - \lambda_0}, & l > 0, \\ (\lambda - \lambda_0), & l = 0. \end{cases} \quad (7)$$

利用下面的关系式 (Padé 逼近) 将波数  $k$  在复平面上解析延拓,

$$k(x) \approx k^{[M/N]}(x) = i \frac{c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_M x^M}{1 + d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_N x^N}, \quad (8)$$

其中

$$x = \begin{cases} \sqrt{\lambda - \lambda_0}, & l > 0, \\ (\lambda - \lambda_0), & l = 0, \end{cases} \quad (9)$$

其中 Padé 多项式的系数  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_M, d_1, d_2, \dots, d_N$  由  $M + N + 1$  个数值对  $\{x_i, k(x_i)\}, i = 1, 2, \dots, M + N + 1$ , 来唯一确定.  $\lambda = 1$  时的复波数即为所求的共振态波数, 再由关系

$$\frac{\hbar^2 k^2(\lambda = 1)}{2m} = E - i \frac{\Gamma}{2} \quad (E, \Gamma \in R), \quad (10)$$

得到共振能量  $E$  和宽度  $\Gamma$ .

## 2.3. 实稳定方法求解共振态

如前所述,实稳定方法基于对束缚态问题的处理来求解共振态问题. 束缚态问题可以通过基展开的方法进行求解. 在分立能区,各本征态(束缚态)的能量不会随着基空间的维数而改变; 在连续能区,计算得到的本征态的能量多数会随着基空间的维数增加而逐渐降低,但仍有一些本征能量随基空间维数的增加而变化很小,这些态称为实稳定态,它们对应于共振态. 这些实稳定态的能量与严格的共振能量相比会有一定的差异,但它们都在共振能区内. 实稳定态的相移可由下式求得<sup>[9]</sup>:

$$\tan \eta = - \frac{\int_0^\infty \Psi_E[E - H(x)] \psi(x) \sin kx dx}{\int_0^\infty \Psi_E[E - H(x)] \psi(x) \cos kx dx}, \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow 1, \quad x \rightarrow \infty, \\ \psi(0) &= 0, \\ \frac{d\psi}{dx} \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

求得这些实稳定态的相移值之后,再拟合式(6)得到共振参数. 拟合时,本文假设  $\eta_{\text{pot}}$  随能量  $E$  线性变化.

束缚态问题也可以在坐标空间(离散的空间格点上)求解. 对于一维问题,坐标空间取为  $-X_{\text{max}} \leq x \leq X_{\text{max}}$ . 对于三维中心势,径向坐标空间取为  $0 \leq r \leq X_{\text{max}}$ . 通过改变坐标空间的大小,可以得到本征能量随  $X_{\text{max}}$  的变化关系. 与基于基展开的实稳定方法类似,在连续能区,也存在一些实稳定态. 这些态的相移采用(11)式计算,其中  $\psi_E$  为坐标空间求解得到的波函数,考虑到  $X_{\text{max}}$  到无穷大的积分对相移的贡献很小,可以忽略,积分区间取为 0 到  $X_{\text{max}}$ . 得到共振区能量和相移后,拟合式(6)得到共振参数. 文献[9]采用基展开的实稳定方法求解了一维势阱中的

共振态,并与散射相移方法的计算结果作了比较,两种方法的计算结果符合很好.本文将主要讨论坐标空间的实稳定方法,并用此方法计算一维势和三维球形势中的共振态(以下将基展开的实稳定方法和坐标空间的实稳定方法分别标记为  $RSM^{HO}$  和  $RSM^R$ .)

### 3. 结果与讨论

本节首先给出一维势、球形谐振子势的计算结果,并分别与文献[9]及严格解作比较;然后以 Woods-Saxon 势为例,计算原子核中的单粒子共振态,并与散射相移方法和 ACCC 方法的结果比较.

#### 3.1. 一维势阱

为与文献[9]的结果作比较,本文所取的一维势场与该文献一致,形式如下:

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2, \quad x \leq 0,$$

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 e^{-0.225x^2}, \quad x \geq 0. \quad (13)$$

显然,在这个势场中不存在束缚态,只有连续谱.  $RSM^R$  方法计算得到的势场中最低几条能级随  $X_{\max}$  变化关系如下图 1 所示.可以看出存在一个不随  $X_{\max}$  的增加而改变的“稳定的”本征能量( $E \approx 0.44$ ).根据前面的讨论可以知道,这个“稳定的”本征能量就是共振能量.如前所述,  $RSM^R$  计算得到的一系列本征能量与共振能量非常接近,而这一系列本征能量即可视为共振区的能量.共振区本征能量所对应的相移可由(11)式求得<sup>[9]</sup>,共振参数由拟合式(6)得到.

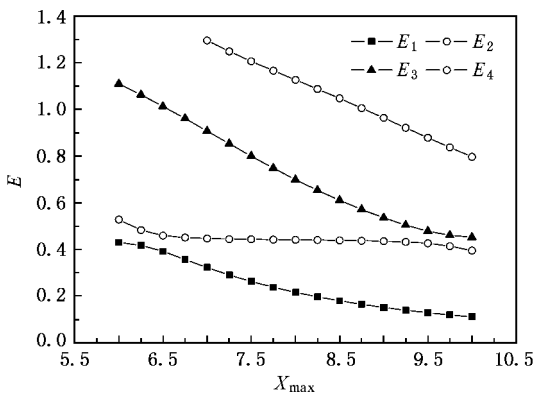


图 1 一维势(13)中,几条较低的本征能量随  $X_{\max}$  的变化关系

表 1 不同方法计算得到的一维势(13)中的共振参数

	SPSM <sup>[9]</sup>	RSM <sup>HO[9]</sup>	RSM <sup>R</sup>
$E_\gamma$	0.441333	0.441326	0.441363
$\Gamma$	0.008996	0.009032	0.009181

$RSM^{HO}$ 与散射相移法计算势场(13)中的共振态的结果已经在文献[9]中给出,本文给出了  $RSM^R$  的计算结果.如表 1 所示,对于一维势,  $RSM^R$  的计算结果与散射相移法及  $RSM^{HO}$  的计算结果是一致的.计算得到的共振态波函数也一并给出,如图 2 所示.

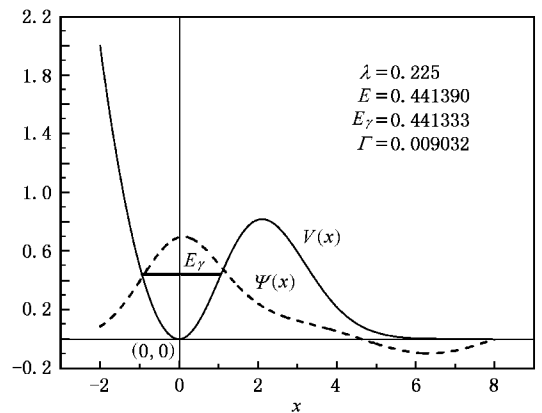


图 2 一维势(13)中的共振能量和共振态波函数

#### 3.2. 球形谐振子势

球形谐振子势数学表示式为

$$V = V_0 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2. \quad (14)$$

为与文献[16]比较,取  $V_0 = -60 \text{ MeV}$ ,  $m\omega^2/2 = 2.5 \text{ MeV/fm}^2$ .图 3 给出了谐振子势中求解 Schrödinger 方程得到的几条较低的单粒子能级,图中  $V_{\text{eff}} = V(r) + \hbar(l+1)r^2$ .表 2 给出了用  $RSM^R$  计算得到的单粒子态能量及相应的相移,可以看出能量和相移都是不随坐标空间的大小而改变的.利用这组数据拟合得到的“共振参数”为  $E_\gamma = 4.87 \text{ MeV}$ ,  $\Gamma = 0.0 \text{ MeV}$ .这个结果符合谐振子势下所有态都是束缚态这一事实,与文献[16]的计算结果(能量和宽度分别为  $4.8 \text{ MeV}$ ,  $0.0 \text{ MeV}$ )及严格解(能量和宽度分别为  $4.87 \text{ MeV}$ ,  $0.0 \text{ MeV}$ )也是一致的.

#### 3.3. 球形 Woods-Saxon 势

基于原子核的独立粒子模型,核中的每个核子可以看作是在一个平均场中运动.对于球形原子核,这个平均场是一个有心场.最简单的有心场是球方

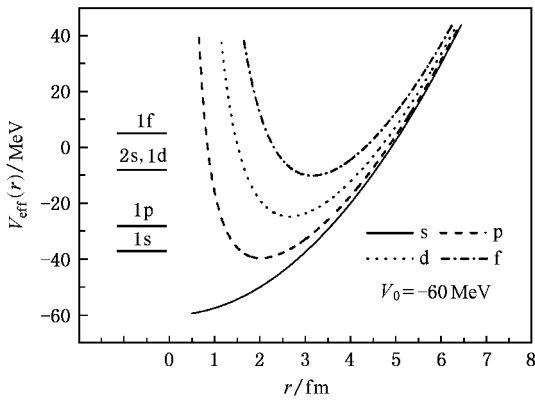


图 3 球谐振子势(14)中的几条较低的单粒子能级

势和谐振子势, 理论研究及与实验的比较表明, 更实际的势场是 Woods-Saxon 势. 下面用 RSM<sup>R</sup> 具体计算 Woods-Saxon 势场中的共振态, 并与散射相移法和 ACCC 方法的计算结果比较.

表 2 球谐振子势(14)中,  $X_{\max}$  取不同值时 RSM<sup>R</sup> 计算得到的 1f 态的能量和相移

$X_{\max}/\text{fm}$	17	18	19	20
$E/\text{MeV}$	4.87	4.87	4.87	4.87
$\eta$	0.946	0.946	0.946	0.946

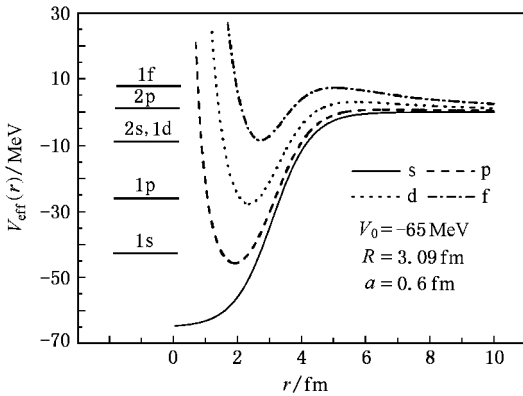


图 4 Woods-Saxon 势(15)中的束缚态能级以及利用 RSM<sup>R</sup> 得到的共振态 1f 能级

Woods-Saxon 势数学表示式为

$$V = V_0 \left[ 1 + e^{(r-R)/a} \right]^{-1}, \quad (15)$$

式中  $V_0, R, a$  是参量. 这里参数取为  $V_0 = -65 \text{ MeV}, R = 3.09 \text{ fm}, a = 0.6 \text{ fm}$ . 对 Woods-Saxon 势, 在无穷远处, 散射态波函数的渐近形式是球面波, 相移由下式计算:

$$\tan\left(\eta_l - \frac{l\pi}{2}\right)$$

$$= - \frac{\int_0^{X_{\max}} \chi_l [E - H(r)] f(r) \sin kr dr}{\int_0^{X_{\max}} \chi_l [E - H(r)] f(r) \cos kr dr}, \quad (16)$$

其中  $f(r)$  的形式与(12)式一致.

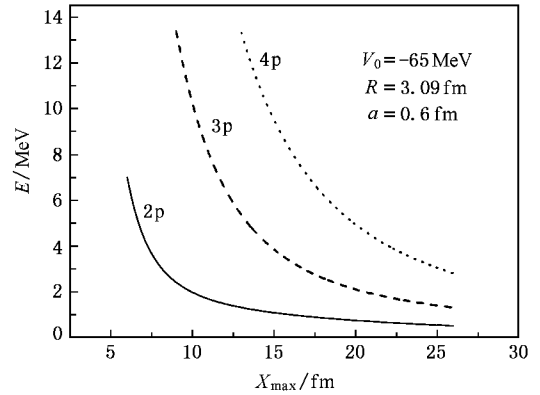


图 5 Woods-Saxon 势(15)中 p 态本征能量随坐标空间大小的变化关系

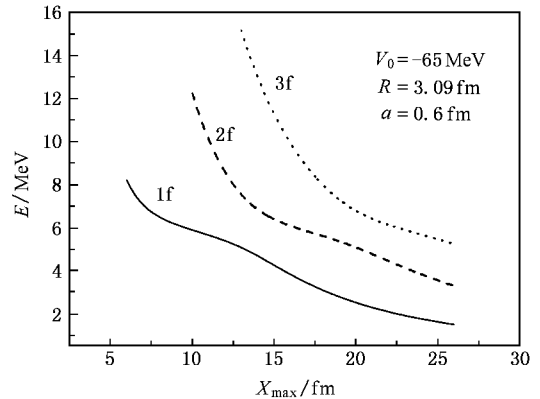


图 6 Woods-Saxon 势(15)中 f 态本征能量随坐标空间大小的变化关系

利用束缚态边界条件, 求解径向 Schrödinger 方程, 得到体系的本征能量. 轨道量子数  $l = 1, 2$  时, 系统本征能量随  $X_{\max}$  增大而持续降低. 图 4 给出了 Woods-Saxon 势中的几条较低的单粒子能级. 图 5 给出了轨道量子数  $l = 1$  时, 系统本征能量随  $X_{\max}$  的变化规律;  $l = 2$  时, 存在类似的关系. 根据前面的讨论可知, 轨道量子数取这些值时, 系统不存在“稳定的”本征能量. 势场(15)中不存在共振态. 当轨道量子数  $l = 3$  时, 由图 6 可以看出, 随着  $X_{\max}$  的增大, 计算得到的本征能量存在一个“稳定的”平台. 由前面的讨论可知, 势场(15)中存在 f 共振态. 该态的共振态波函数和共振参数分别在图 7 和表 3 中给出.

表 3 还给出了散射相移方法和 ACCC 方法<sup>[16]</sup>计

算的势(15)中的  $f$  共振态的能量和宽度. 从表 3 可以看出, 实稳定方法计算得到的 Woods-Saxon 势中的共振能量和共振宽度与散射相移方法和 ACCC 方法的结果是一致的.

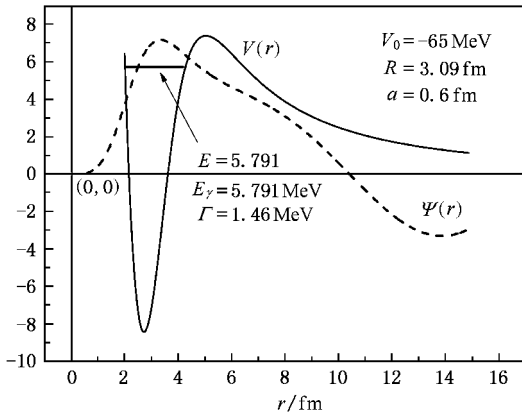


图 7 实稳定方法计算得到的球形 Woods-Saxon 势(15)中的  $f$  共振态波函数

表 3 实稳定方法、散射相移法以及 ACCC 方法<sup>[16]</sup>计算得到的 Woods-Saxon 势(15)的共振能量和共振宽度

	SPSM	RSM <sup>R</sup>	ACCC
$E_\gamma/\text{MeV}$	5.82	5.79	5.8
$\Gamma/\text{MeV}$	1.44	1.46	1.3

下面, 讨论一下实稳定方法关于相移的计算. 由于离心势垒衰减比较慢,  $X_{\max}$  的选取对相移的计算结果影响较大. 图 8 给出了  $X_{\max}$  取不同值时, 利用(11)式得到的相移与散射相移法结果的比较. 从图中可以看出, 随着  $X_{\max}$  的增大, RSM<sup>R</sup> 相移越来越接近散射相移法计算的结果. 对本文所给势场(15),  $X_{\max} \geq 500 \text{ fm}$  时, RSM<sup>R</sup> 相移才与  $\eta_{\text{exa}}$  渐趋一致. 这将增大实际工作的计算量, 因此需要寻求更有效的途径来求解相移.

#### 4. 结论与展望

本文基于实稳定方法的基本思想, 在坐标空间

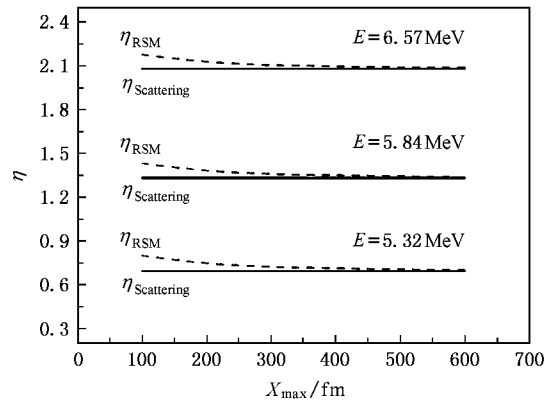


图 8 RSM<sup>R</sup> 给出的相移(虚线)随  $X_{\max}$  的变化,  $\eta_{\text{exa}}$  是散射相移法计算的相移(实线)

求解了一维势阱和三维球对称势阱中的单粒子共振态. 在不同大小的坐标空间, 利用束缚态边界条件求解本征态问题, 然后, 基于共振态的类束缚态性质(在连续谱能区, 本征能量不随坐标空间大小而变化的态对应着共振态)来确定共振能区. 在共振能区, 各态的相移可以由相应的本征波函数计算得到, 能量和相移满足一定的关系. 利用该关系, 拟合本征能量和相移得到共振态的能量和宽度. 利用实稳定方法, 求解了一维势阱和三维球对称势阱中的共振态, 得到的共振能量、宽度和波函数等与散射相移法以及耦合常数的解析延拓方法的结果一致.

共振态对具有极端中子质子数比的奇特原子核性质有重要的影响. 原子核的相对论平均场(RMF)模型在稳定核和奇特核研究中已经得到广泛的应用<sup>[4, 21-23]</sup>, 成功地解决了核结构中的许多问题. 因此, 发展基于 RMF 模型的 RSM<sup>R</sup> 方法将成为研究原子核, 尤其是奇特原子核的单粒子共振态的一种有效的方法.

作者之一(张力)感谢与吕洪凤博士、耿立升博士以及李志攀的有益讨论.

[1] Tanihata I 1985 *Phys. Rev. Lett.* **55** 2676

[2] Meng J, Ring P 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 3963

[3] Meng J 1998 *Nucl. Phys. A*

[4] Meng J, Toki H, Zhou S G, Zhang S Q, Long W H, Geng L S 2006 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **57** 470

[5] Hale G M, Brown R E, Jarmie N 1987 *Phys. Rev. Lett.* **59** 763

- [ 6 ] Humblet J , Filippone B W , Koonin S E 1991 *Phys. Rev. C* **44** 2530
- [ 7 ] Taylor J R 1972 *Scattering Theory : The Quantum Theory on Nonrelativistic Collisions* ( John Wiley & Sons , New York )
- [ 8 ] Taylor H S , Nazarov G V , Golebiewski A 1966 *J. Chem. Phys.* **45** 2872
- [ 9 ] Hazi A U , Taylor H S 1970 *Phys. Rev. A* **1** 1109
- [ 10 ] Zhang L , Zhou S G , Meng J 2006 *High Energy Physics and Nuclear Physics* **30** ( S2 ) 59 ( in Chinese ) [ 张 力、周善贵、孟 杰 2006 高能物理与核物理 **30**( 增刊 II ) 59 ]
- [ 11 ] Taylor H S 1970 *Advan. Chem. Phys.* **18** 91
- [ 12 ] Kruppa A T , Heenen P H , Flocard H *et al* 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 2217
- [ 13 ] Kukulini V I , Krasnopl 'sky V M , Horacutacek J 1989 *Theory of Resonances : Principles and Applications* ( Kluwer Academic , Dordrecht )
- [ 14 ] Yang S C , Meng J , Zhou S G 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 196
- [ 15 ] Zhang S S , Meng J , Guo J Y 2003 *HEP & NP* **27** 1095
- [ 16 ] Zhang S S , Meng J , Zhou S G , Hillhouse G C 2004 *Phys. Rev. C* **70** 034308
- [ 17 ] Sandulescu N , Geng L S , Toki H , Hillhouse G C 2003 *Phys. Rev.* **68** 054323
- [ 18 ] Sandulescu N , Van Giai N , Liotta R J 2000 *Phys. Rev. C* **61** R061301
- [ 19 ] Geng L S , Toki H , Sugimoto S 2003 *Prog. Theor. Phys.* **110** 921
- [ 20 ] HU J M 1996 *Nuclear Theory* ( in Chinese ) [ 胡济民 1996 原子核理论 ( 第二版 ) ( 北京 : 原子能出版社 ) ]
- [ 21 ] Ring P 1996 *Prog. Part. Nucl. Phys.* **37** 193
- [ 22 ] Cao L G , Liu L , Chen B Q , Ma Z Y 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 638 ( in Chinese ) [ 曹李刚、刘 玲、陈宝秋、马中玉 2001 物理学报 **50** 638 ]
- [ 23 ] Vretenar D , Afanasjev A V , Lalazissis G A , Ring P 2005 *Phys. Rep.* **409** 101

## Real stabilization method for single particle resonances<sup>\*</sup>

Zhang Li<sup>1)</sup> Zhou Shan-Gui<sup>2)†</sup> Meng Jie<sup>1)‡</sup> Zhao En-Guang<sup>2)‡</sup>

<sup>1)</sup> School of Physics , Peking University , Beijing 100871 , China )

<sup>2)</sup> Institute of Theoretical Physics , Chinese Academy of Sciences , Beijing 100080 , China )

<sup>3)</sup> Center of Theoretical Nuclear Physics , National Laboratory of Heavy Ion Accelerator of Lanzhou , Lanzhou 730000 , China )

( Received 20 November 2006 ; revised manuscript received 12 December 2006 )

### Abstract

We calculate the single-particle resonances in a one-dimensional model potential and isotropic three-dimensional harmonic and Woods-Saxon potentials using the real stabilization method in coordinate space. The results of the real stabilization method are in good agreement with those from the scattering phase shift method and the analytical continuation in the coupling constant method.

**Keywords :** resonant state , real stabilization method , phase shift , resonant width

**PACC :** 0635N , 2110P , 2570E

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10435010 , 10475003 , and 10575036 ) , the Major State Basic Research Development Program ( Grant No. G2000077407 ) and the Knowledge Innovation Project of Chinese Academy of Sciences ( Grant No. KJ9X-SYW-N2 ) .

† E-mail : sgzhou@itp.ac.cn