

# 负值量子条件熵与双量子系统一类混合态纠缠量度<sup>\*</sup>

周并举<sup>1)</sup> 刘小娟<sup>1) 2) 3)</sup> 方卯发<sup>2) 3)</sup> 周清平<sup>2) 3)</sup> 刘明伟<sup>1)</sup>

1) 湖南科技大学物理学院,湘潭 411201)

2) 湖南师范大学物理与信息学院,长沙 410081)

3) 中国科学院安徽光学精密机械研究所,合肥 230031)

(2006 年 12 月 19 日收到,2007 年 3 月 4 日收到修改稿)

运用负值量子条件熵研究了双量子系统一类混合态的纠缠量度,给出了负值量子条件熵作为条件熵纠缠度的定义,证明了条件熵纠缠满足作为  $2 \times 2$  系统一类混合纠缠态量度的四个基本条件.当双量子系统处于纯态时,条件熵纠缠度即为部分熵纠缠度.应用条件熵纠缠度研究了真空腔场中两全同二能级原子之间纯态和一类混合态纠缠的时间演化,比较了相同条件下两全同原子系统 concurrence 纠缠度的时间演化.结果表明,两纠缠度演化规律完全一致,验证了负值量子条件熵可以作为双量子系统纯态和一类混合态的纠缠量度.

关键词:双量子系统,负值量子条件熵,条件熵纠缠度,混合态纠缠度

PACC: 4250

## 1. 引言

两粒子量子力学态,无论是纯态还是混合态的纠缠,不仅为检验隐参数理论对量子力学的违背提供了有力工具,而且也是量子通信<sup>[1-3]</sup>,量子密码术<sup>[4,5]</sup>,量子远距传态和量子计算<sup>[6-10]</sup>等领域的物理资源和关键要素.在量子信息过程中,对于给定的纠缠态,量化它的纠缠程度是十分重要的.近几年来,纠缠大小的量化引起人们极大关注,已成为研究热点之一.例如,部分熵纠缠度,形成纠缠度和相对熵纠缠度已经相继提出.对于两体纯态,部分熵由约化态的 von Neumann 熵定义. Bennett 等人<sup>[11]</sup>已经证明了对于两体纯态的纠缠,部分熵纠缠度是一个好的纠缠量度,但它不能量度两体混态的纠缠.在这些纠缠度中,也许最基本的是形成纠缠度,因为它既能量度两体纯态的纠缠,也能量度两体混态的纠缠.对于两体纯态,形成纠缠度等效于共存纠缠度 (concurrence)<sup>[12]</sup>,但通常,它的计算是十分困难的,目前仅能量度系统和一些具有特殊对称性的系统的

纠缠. Vedral 等人<sup>[13]</sup>提出了量子相对熵能够作为混态量子系统纠缠度的好的量度,但除了少数特殊态外,它的计算十分困难.我们利用量子相对熵研究了与环境相互作用的双模相干场的模间纠缠<sup>[14]</sup>. Cerf 等人<sup>[15,16]</sup>提出了量子条件熵的定义,对经典关联和量子纠缠给予了一致的描述.他们证明了后一种情况下量子条件熵是负的,这在经典情况是不允许的.我们基于下列四个理由提出负值量子条件熵可以作为双量子系统纯态和一类混合态纠缠的量度,在本文中定义为条件熵纠缠度. 1) 负值量子条件熵是混合态量子纠缠最显著的熵特征,当双量子系统为纯态时,即为部分熵纠缠度. 2) 负值量子条件熵值越大,量子纠缠就越大. 3) 它满足作为一个纠缠度的四个基本条件. 4) 无论是两体,三体还是多体,它都能作解析计算,无论是纯态还是混态,它都有定义. 本文将证明负值量子条件熵足作为一个好纠缠度的四个基本条件. 作为应用,利用负值量子条件熵研究了真空腔场中两全同的二能级原子之间的纯态和混合态纠缠的时间演化,并与相同条件下系统的 concurrence  $C(\rho)$  纠缠度比较. 结果表明,两纠缠度

\* 国家自然科学基金(批准号:10374025),湖南省自然科学基金(批准号:05JJ30004),湖南省教育厅科研基金(批准号:01C260)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: lxjdx@163.net

的演化规律完全一致. 验证了条件熵纠缠度可以作为双量子系统纯态和一类混合态的纠缠量度. 在所有纠缠度中, 条件熵纠缠度的计算最简便. 我们对条件熵纠缠度的研究可还可能拓展到  $2 \times 3$  和  $3 \times 2$  体系的纯态和一类混合态. 因此, 我们给出证明和研究结果对寻找双量子多能级和多体量子系统计算简便的普适纠缠度的研究具有参考价值.

## 2. 负值条件熵作为双量子一类混合态纠缠量度的证明

我们运用负值量子条件熵定义条件熵纠缠度, 并证明条件熵纠缠度满足作为  $2 \times 2$  系统一类混合态纠缠量度的四个基本条件:

1. 双子系统  $AB$  量子条件熵的定义: 已知  $B$  变量时,  $A$  变量的量子熵定义为<sup>[17]</sup>

$$S(A|B) = S(AB) - S(B), \quad (1)$$

式中  $S(AB)$  和  $S(B)$  分别是所考虑的双量子系统  $\rho_{AB}$  和约化子系统  $\rho_B$  的 von Neumann 熵. 很显然, 一个双量子系统纯态的量子条件熵是约化子系统  $\rho_B$  的 von Neumann 熵的负值, 即

$$S(A|B) = -S(B). \quad (2)$$

2. 本文给出条件熵纠缠度  $E_{A|B}(\rho_B)$  的定义: 由负值量子条件熵, 我们定义条件熵纠缠度, 并用  $E_{A|B}(\rho_B)$  表之, 即

$$\begin{aligned} E_{A|B}(\rho_{AB}) &= -S(A|B) \\ &= S(B) - S(AB). \end{aligned} \quad (3)$$

我们规定, 当且仅当  $S(A|B) \geq 0$  (即量子条件熵的负度等于零),  $E_{A|B} = 0$ . 众所周知, 有许多纠缠量度  $E(\rho)$ , 对于由密度矩阵  $\rho_{AB}$  描述的一个态, 一个好的纠缠度必须满足四个基本条件 C1—C4<sup>[18]</sup>.

3. 证明  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  满足文献 [18] 中作为一个好的纠缠度四个条件 C1—C4.

1) 双子系统  $A$  和  $B$  是处在任意纯态.

当双子系统  $A$  和  $B$  是处在任意纯态时, 全系统的 von Neumann 熵  $S(AB) = 0$ , 由定义式 (3) 可知,  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = S(B)$ , 即  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  为部分熵纠缠度. Bennett 等人<sup>[11]</sup> 已经证明了是一个好的纠缠量度.

2) 双子系统  $A$  和  $B$  处在一类混合态.

C1. (a) 如果  $\rho_{AB}$  是非纠缠的, 则  $E_{A|B} = 0$ ;

(b) 如果  $\rho_{AB}$  是纠缠的,  $-1 < S(A|B) < 0$ , 则  $0 < E_{A|B} < 1$ .

证明

(a) 如果  $\rho_{AB}$  是非纠缠的

假定双子系统  $A$  和  $B$  有四个计算基态  $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ , 让  $\rho_{AB}$  是下列可分离混合态的任一种:

$$\rho_{AB} = \sum_{i=0,1} \eta_{ii} |ii\rangle \langle ii|, \sum \eta_{ii} = 1, \quad (4)$$

或

$$\rho_{AB} = \sum_{i,j=0,1(i \neq j)} \eta_{ij} |ij\rangle \langle ij|, \sum \eta_{ij} = 1, \quad (5)$$

然而, 对应于方程 (4) 和 (5), 子系统  $B$  的约化密度矩阵  $\rho_B$  可表示为

$$\rho_B = \sum_{i=0,1} \eta_{ii} |i\rangle \langle i|, \sum \eta_{ii} = 1, \quad (6)$$

或

$$\rho_B = \sum_{i,j=0,1(i \neq j)} \eta_{ij} |j\rangle \langle j|, \sum \eta_{ij} = 1. \quad (7)$$

利用方程 (4) 和 (6), 容易证明<sup>[19]</sup> 联合系统  $AB$  和子系统  $B$  的 von Neumann 熵分别可表为

$$S(AB) = -\sum_{i=0,1} \eta_{ii} \log_2 \eta_{ii}, \quad (8)$$

和

$$S(B) = -\sum_{i=0,1} \eta_{ii} \log_2 \eta_{ii}, \quad (9)$$

式中  $\eta_{ii}$  分别是 (4) 式中的  $\rho_{AB}$  和 (6) 式中的  $\rho_B$  的本征值. 将 (8) 式和 (9) 式代入方程 (1), 得到

$$S(A|B) = S(AB) - S(B) = 0. \quad (10)$$

同理, 利用方程 (5) 和 (7), 容易获得

$$S(AB) = -\sum_{i,j=0,1(i \neq j)} \eta_{ij} \log_2 \eta_{ij} = S(B). \quad (11)$$

特别地, 当  $\eta_{00} = \eta_{11} = 1/2$  或  $\eta_{01} = \eta_{10} = 1/2$  时, 双量子系统处在最大混合态, 是可分离态的一种特例,  $S(A|B) = 0, E_{A|B} = 0$  成立. 因此, 我们能够得出结论: 如果  $\rho_{AB}$  是非纠缠的,  $S(A|B) \geq 0$ , 则  $E_{A|B} = 0$ .

(b) 如果  $\rho_{AB}$  是纠缠的

设系统  $\rho_{AB}$  的本征值为  $\lambda_{AB}^i, i = 1, 2$ , 子系统  $B$  的约化密度矩阵  $\rho_B$  的本征值为  $\lambda_B^\pm, \lambda_{AB}$  与  $\lambda_B$ , 总存在这样一类混合纠缠度, 使上述本征值之间满足以下不等式, 即

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_{AB}^i \log_2 \lambda_{AB}^i \leq \sum_{i=\pm} \lambda_B^i \log_2 \lambda_B^i \quad (12)$$

时, 很容易验证有不等式  $S(AB) \leq S(B)$ , 因此  $E_{A|B}(\rho_{AB}) > 0$  成立, 又由于一方面, 对于双量子系统最大纯态纠缠度,  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 1$ , 量子间的混合, 必然造

成系统退纠缠,使得最大混合纠缠态  $E_{A|B}(\rho_{AB}) < 1$ ; 另一方面  $0 < S(B) < 1$  因此有不等式  $-1 < S(A|B) < 0$ , 这个结果使混合纠缠度不等式  $0 < E_{A|B}(\rho_{AB}) < 1$  对应. 我们提出的条件熵纠缠度适合描述这一类混合纠缠度.

C2. 对任意态  $\rho_{AB}$ , 在局域幺正变换下, 即直积形式的幺正变换  $U_A \otimes U_B$  下,  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  保持不变.

证明 考虑对  $\rho_{AB}$  作积形式的幺正变换  $U_A \otimes U_B$ ,

$$\rho_{AB} \rightarrow \rho'_{AB} = (U_A \otimes U_B)\rho_{AB}(U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger). \quad (13)$$

利用文献 [17] 的结果, 在这个变换下, 我们对联合密度算符的  $A$  部分求迹后得到

$$\rho'_B = \text{Tr}_A[\rho'_{AB}] = U_B \rho_B U_B^\dagger. \quad (14)$$

这意味着条件熵  $S(A|B)$  在局域幺正变换下是不变的. 因此得出结论: 在局域幺正变换下,  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  保持不变.

C3. 在局域操作下和经典通信 (LOCC) 中  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  不增加.

通常, 任何局域操作能够分解成下列四种基本操作<sup>[18]</sup>: 1) 增加一个与 Bob 部分 (即, 子系统  $B$ ) 不纠缠的辅助系统; 2) 执行一个幺正变换; 3) 执行一个正交测量; 4) 删除系统的某部分, 即对系统进行部分求迹. (没有必要增加一般测量作一个单独的种类, 因为这样的测量总能够以上的正交测量所构造). 显然, 以上前两种操作不会改变由 Alice 和 Bob 共同拥有的纯态的纠缠, 因为在这些情况下, 纠缠度总是等于由 (2) 式给定的 Bob 部分的 von Neumann 熵. 然而, 在后两种操作下纠缠会改变. 我们能够表明纠缠度的期望值不增加. 首先证明两个关于在 Alice 部分 (即  $A$  子系统) 局域操作下, 双量子体系的纠缠的辅助定理.

引理 1 如果  $|\Phi\rangle$  是两体纯态, 由 Alice 对其作投影测量, 给出概率为  $p_\alpha$  的结果  $\alpha$ , 剩余的两体纯态为  $|\Phi_\alpha\rangle$ . 则剩余态的条件熵纠缠度期望值  $\sum_\alpha p_\alpha E_{A|B}(|\Phi_\alpha\rangle)$  不比原态的条件熵纠缠度大.

$$\sum_\alpha p_\alpha E_{A|B}(|\Phi_\alpha\rangle) \leq E_{A|B}(|\Phi\rangle). \quad (15)$$

引理 2 考虑一个三体纯态  $|\Phi\rangle$ , 分别标记为  $A, B$  和  $C$  (我们设想 Alice 拥有  $A$  和  $C$  部分, Bob 拥有  $B$  部分). 让  $\rho = \text{Tr}_C |\Phi\rangle\langle\Phi|$ . 则  $E_{A|B}(\rho) \leq E_{A|B}(|\Phi\rangle)$ , 不等式右边应理解为 Bob 的部分和 Alice 的  $A, C$  部分间的纠缠, 即 Alice 不能通过删除  $C$  部分来增加纠缠的最小期望值.

下面, 我们推广上面的结果到混合态情形. 如果 Alice 对一个双体混合态  $\rho = \rho_{AB}$  实行投影操作, 给出具有概率  $p_\alpha$  的结果  $\alpha$ , 剩余态的为  $\rho_\alpha$ , 则剩余态的条件熵纠缠度的期望值不大于原态的条件熵纠缠度, 即

$$\sum_\alpha p_\alpha E_{A|B}(\rho_\alpha) \leq E_{A|B}(\rho). \quad (16)$$

如果这个操作是简单的删除 Alice 部分, 则会有具有概率为 1 的结果  $\alpha$ . 下面利用量子相对熵在 LOCC 下不增的性质证明方程 (16) 成立.

证明

1. 文献 [20, 21] 中已证明: 量子相对熵  $S(\sigma \| \rho)$  在 LOCC 下不增.

1) 两体 ( $A$  和  $B$ ) 量子态的相对熵定义如下<sup>[21]</sup>:

$$S(\sigma \| \rho) \equiv \text{tr}(\rho \ln \rho - \ln \sigma), \quad (17)$$

式中  $A$  是所有退纠缠态集, 且  $\sigma = \sigma_A \otimes \sigma_B \in D$ .

2) 文献 [21] 中给出的  $S(\rho \| \sigma)$  性质 (F4) 和定理 2.

设 LOCC 由一组完备测量算子  $\sum V_i^\dagger V_i = I$ <sup>[19]</sup> 给定,  $S(\rho \| \sigma)$  表示测量前的量子相对熵,  $S(\sigma_i/p_i \| \rho_i/q_i)$  表示测量后的量子相对熵<sup>[19]</sup>, 则文献 [21] 中性质 (F4) 表明

$$\sum p_i S(\rho_i/p_i \| \sigma_i/q_i) \leq \sum S(\rho_i \| \sigma_i)^{[21]},$$

式中  $p_i = \text{tr}(\rho_i)$ ,  $q_i = \text{tr}(\sigma_i)$ ,  $\sigma_i = V_i \sigma V_i^\dagger$  和  $\rho_i = V_i \rho V_i^\dagger$ ,  $\sum V_i^\dagger V_i = I$ .

定理 2, 如果  $\sigma_i = V_i \sigma V_i^\dagger$  则  $\sum S(\sigma_i \| \rho_i) \leq S(\sigma \| \rho)$ .<sup>[21]</sup>

联合性质 (F4) 和定理 2 得推论

$$\sum p_i S(\rho_i/p_i \| \sigma_i/q_i) \leq S(\sigma \| \rho).$$

即量子相对熵的期望值在 LOCC 下不增加<sup>[20, 21]</sup>.

2. 量子相对熵  $S(\sigma \| \rho)$  和条件熵纠缠度  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  之间存在单调关系.

设  $d$  表示系统  $A$  的维数, 则  $\sigma = I/d \otimes \rho^B$ , 文献 [19] 给出了  $S(\sigma \| \rho)$  和  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  之间的单调关系, 即

$$\begin{aligned} S(\rho \| I/d \otimes \rho^B) &= -S(A, B) - \text{tr}(\rho^{AB} \log(I/d \otimes \rho^B)) \\ &= -S(A, B) - \text{tr}(\rho^B \log \rho^B) + \log d \\ &= -S(A|B) + \log d = E_{A|B}(\rho_{AB}) + C. \end{aligned} \quad (18)$$

式中  $C = \log d$  是一常数.

结论 利用单调关系 (18), 量子相对熵  $S(\sigma \| \rho)$  在 LOCC 下不增确保了混合态情形下条件熵  $E_{A|B}$

( $\rho_{AB}$ ) 满足条件 C3, 即方程 (16) 成立. 命题得证.

虽然上面的情况仅涉及到 Alice 的单个操作, 显然可以将它应用到任意有限的操作过程, 包括局域的行为和一至两种经典通信. 因为这样的操作过程总可以由上面的单个操作所构成, 并由 Alice 和 Bob 交替完成. 例如, 每一个测量操作产生一个经典结果将不改变 Alice 和 Bob 之间的量子纠缠. 因此我们可以概括本节的结果, 在局域操作和经典通信下, 双量子系统任意态的条件熵纠缠度的不增加.

C4. 在丢失信息的情况下, 条件熵纠缠度是凸性的

$$\sum_i p_i E_{A|B}(\rho_i) \geq E_{A|B}(\sum_i p_i \rho_i). \quad (19)$$

证明 [引入文献 [19-22] 的一个推论: 设  $\rho$  是具有  $A, B$  分量的复合系统, 对于  $\rho = \sum_j p_j \rho_j$ , 且  $p_j \geq 0, \sum p_j = 1$ , 则量子条件熵是凹性的, 即态的混合 (信息丢失) 将导致所考虑系统量子条件熵的增加

$$S_{A|B}(\sum_i p_i \rho_i) \geq \sum_i p_i S_{A|B}(\rho_i), \quad (20)$$

式中  $p_j$  是出现态  $\rho_i$  的概率. 因此我们能获得下列不等式

$$-S_{A|B}(\sum_i p_i \rho_i) \leq -\sum_i p_i S_{A|B}(\rho_i). \quad (21)$$

很显然 (21) 式确保了 (19) 式描述的条件熵纠缠度是凸性的成立.

至此, 我们已经证明了对于双量子系统一类混合纠缠态  $-1 < S(A|B) < 0$  和  $0 < E_{A|B} < 1$  的单调关系, 因此在这个取值范围内, 我们能把负值条件熵作为纠缠的量度, 我们称之为条件熵纠缠度. 作为一个例子, 下节中应用条件熵纠缠度研究双原子系统的纯态和混合态纯态演化, 并与相同条件下系统的 concurrence 纠缠度比较.

### 3. 条件熵纠缠度的应用

#### 3.1. 模型

我们考虑两个全同的二能级原子同时与一个腔场作用. 系统的哈密顿量可表为<sup>[23]</sup>

$$H = H_0 + H_i, \quad (22)$$

式中

$$H_0 = \omega a^\dagger a + \omega_0 \sum_{j=1,2} S_{z,j},$$

$$H_i = g \sum_{j=1,2} (a^\dagger S_j^- + a S_j^+), \quad (23)$$

式中  $S_{z,j} = \frac{1}{2}(|0_0\rangle\langle 0_0| - |1_1\rangle\langle 1_1|)$ ,  $S_j^+ = |0_1\rangle\langle 0_0|$  和  $S_j^- = |1_0\rangle\langle 1_1|$  和  $|0\rangle, |1\rangle$  ( $j=1,2$ ) 分别是原子的激发态和基态.  $a_j^\dagger$  和  $a_j$  ( $j=1,2$ ) 分别是频率为  $\omega$  的单模腔场的产生和湮没算符.  $\omega_0$  是原子的跃迁频率,  $g$  是原子与腔场的耦合强度. 在大失谐  $\Delta = \omega_0 - \omega \gg g\sqrt{\bar{n}}$  ( $\bar{n}$  是腔场的平均光子数) 的情况下, 原子系统与腔场之间没有交换. 有效哈密顿量可表为

$$H_e = \lambda \left[ \sum_{j=1,2} (|0_j\rangle\langle 0_j| - |1_j\rangle\langle 1_j|) + (S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+) \right], \quad (24)$$

式中  $\lambda = g^2/\Delta$  为拉比频率. 假定在初始  $t=0$  时刻, 两偶极相互作用的原子与真空腔场作用, 有效哈密顿量 (24) 式可简化为

$$H'_e = \lambda \left[ \sum_{j=1,2} (|0_j\rangle\langle 0_j| + \Omega (S_1^+ S_2^- + S_1^- S_2^+)) \right], \quad (25)$$

式中  $\Omega$  是原子之间偶极-偶极相互作用系数.

在相互作用表象中, 利用标准技术<sup>[24]</sup> 由有效哈密顿量 (25) 可产生如下的时间演化算符:

$$U(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Omega t) & -i \sin(\Omega t) & 0 \\ 0 & -i \sin(\Omega t) & \cos(\Omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

我们考虑在  $t=0$  时两原子处于混合态

$$\rho_{AB}(0) = \eta_1 E_1 + \eta_2 E_2, \quad (27)$$

式中  $E_1 = |0_1 1_2\rangle\langle 0_1 1_2|$ ,  $E_2 = |1_1 0_2\rangle\langle 1_1 0_2|$ ,  $\eta_1 + \eta_2 = 1$ . 在任意时刻  $t > 0$ , 两原子  $A$  和  $B$  系统的密度算符演化成

$$\rho_{AB}(t) = U(t) \rho_{AB}(0) U^\dagger(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 \\ 0 & \rho_{32} & \rho_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

式中

$$\rho_{22} = \eta_1 \cos^2(\Omega t) + \eta_2 \sin^2(\Omega t),$$

$$\rho_{23} = (\eta_1 - \eta_2) \sin(\Omega t) \cos(\Omega t) = \rho_{32}^*,$$

$$\rho_{32} = \eta_1 \sin(\Omega t)^2 + \eta_2 \cos(\Omega t)^2. \quad (29)$$

双原子系统的密度算符  $\rho_{AB}$  的本征值为

$$\pi_{\pm} = (1 \pm p)/2, \quad (30)$$

式中  $p = \sqrt{1 - 4(\rho_{22}\rho_{33} - \rho_{32}\rho_{23})}$ , 且  $\rho_{ij} (i, j = 2, 3)$  由 (29) 式确定. 通过求迹运算, 可得到原子 B 的约化密度矩阵

$$\begin{aligned} \rho_B(t) &= \text{Tr}_A(\rho_{AB}(t)) \\ &= (\eta_1 \cos(\Omega t)^2 + \eta_2 \sin(\Omega t)^2) |0_2 \ 0_2\rangle \\ &\quad + (\eta_1 \sin(\Omega t)^2 \\ &\quad + \eta_2 \cos(\Omega t)^2) |1_2 \ 1_2\rangle. \end{aligned} \quad (31)$$

这样  $\rho_B(t)$  的本征值可表达为如下形式:

$$\begin{aligned} \kappa_+ &= \eta_1 \cos(\Omega t)^2 + \eta_2 \sin(\Omega t)^2, \\ \kappa_- &= \eta_1 \sin(\Omega t)^2 + \eta_2 \cos(\Omega t)^2. \end{aligned} \quad (32)$$

可以证明, 两原子处在混合纠缠态时, 上述本征值  $\pi_{\pm}$  和  $\kappa_{\pm}$  之间满足不等式 (12). 因此, 能够运用我们提出的条件熵纠缠度讨论该系统的量子纠缠.

### 3.2. 条件熵纠缠度的计算公式

根据 Phoenix 和 Knight 的工作, 利用密度矩阵  $\rho_{AB}$  的本征值  $\pi_{\pm}$  和约化密度矩阵  $\rho_B$  的本征值  $\kappa_{\pm}$ , 我们能够将  $S(AB)$  和  $S(B)$  表达为<sup>[24]</sup>

$$S(AB) = -\pi_- \log_2 \pi_- - \pi_+ \log_2 \pi_+, \quad (33)$$

和

$$S(B) = -\kappa_- \log_2 \kappa_- - \kappa_+ \log_2 \kappa_+. \quad (34)$$

因此, 我们获得条件熵纠缠度的计算公式为

$$\begin{aligned} E_{A|B}(\rho_{AB}) &= -S(A|B) \\ &= \pi_- \log_2 \pi_- + \pi_+ \log_2 \pi_+ \\ &\quad - \kappa_- \log_2 \kappa_- - \kappa_+ \log_2 \kappa_+. \end{aligned} \quad (35)$$

式中  $\pi_{\pm}$  和  $\kappa_{\pm}$  分别由 (30) 式和 (32) 式给出.

如果当  $S(A|B) = -1$ ,  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 1$  时, 两原子处在纯态最大纠缠态; 如果  $-1 < S(A|B) < 0$ , 即  $0 < E_{A|B}(\rho_{AB}) < 1$ , 两原子处在混合纠缠态; 而  $S(A|B)$  达到它的 0 值时, 即  $S(A|B)$  的负度定义为零, 因此  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 0$ , 表明两原子可能分别处在完全退纠缠纯态, 或最大混合态, 或经典独立态.

### 3.3. 讨 论

在上一节解析解的基础上, 我们应用条件熵纠缠度考察电子在不同初态的纠缠性质. 作为比较, 我们也应用 cocurrence 讨论了原子在相应初态的纠缠性质.

#### 3.3.1. 两原子初始处于纯态

图 1(a)(b) 分别给出了原子初始处在纯态、混合态和独立态的  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  和  $S(A|B)$  的时间演化, 并且表明了  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  和  $S(A|B)$  强烈的依赖于原子初态.

首先, 我们考察图 1(a) 中  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  和  $S(A|B)$  的演化. 原子初始处在由 (27) 式给定的纯态 ( $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$ ), 我们能重新表达原子初态为

$$\begin{aligned} \rho_{AB}(0) &= E_2 = |1_1 0_2 \ 1_1 0_2\rangle \\ &= |1_1 \ 1_1\rangle \otimes |0_2 \ 0_2\rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

由图 1(a) 显见, 由点线表示的  $S(A|B)$  以周期为  $\pi/2$ , 振幅为 0 到 -1 之间演化, 而  $E_{A|B}$  由实线表示. 当  $\Omega t = n\pi/2$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) 时,  $S(A|B)$  演化到它的 0 值, 即  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 0$ , 两原子是退纠缠的. 这点能够从方程 (30) 和 (32) 作定量解释. 经直接计算, 可分别得到  $\pi_+ = 1$ ,  $\pi_- = 0$  而  $\kappa_+ = 1$ ,  $\kappa_- = 0$  ( $n = 1, 3, 5, \dots$ ) 和  $\kappa_+ = 0$ ,  $\kappa_- = 1$  ( $n = 0, 2, 4, \dots$ ). 代入  $\pi_{\pm}$  和  $\kappa_{\pm}$  的值到方程 (3), 显然  $S(A|B)$  等于 0. 此时

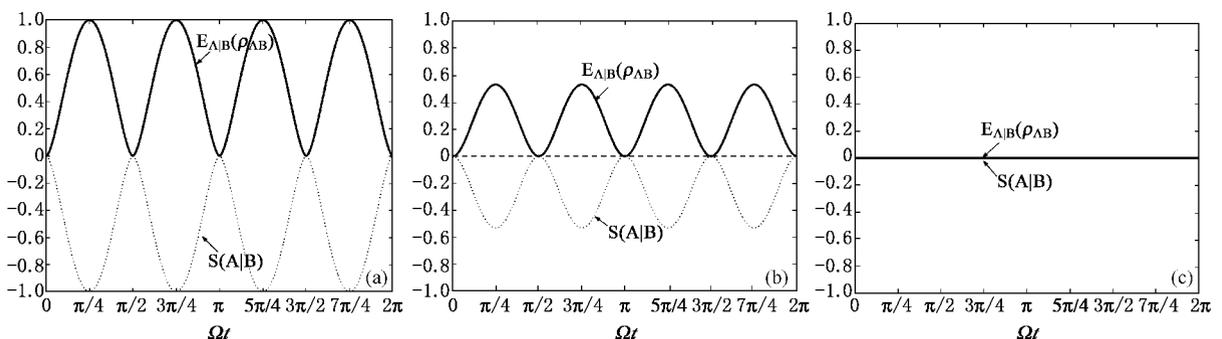


图 1  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  和  $S(A|B)$  的时间演化 ( $E_{A|B}(\rho_{AB})$  由实线表示,  $S(A|B)$  由点线表示) (a) 两原子初始处于纯态,  $\eta_1 = 0$ ,  $\eta_2 = 1$  (b) 两原子初始处于混态,  $\eta_1 = 0.1$ ,  $\eta_2 = 0.9$  ( $\epsilon = 0.8$ ) (c) 两原子初始处于最大混态  $\eta_1 = 0.5$ ,  $\eta_2 = 0.5$  ( $\epsilon = 0$ ) 或两原子初始处独立态  $\rho_A(0) = \rho_B(0) = 1/2(|0_1 0_1\rangle + |1_1 1_1\rangle)$

系统的密度算符  $\rho_{AB}$  或态能够表示成

$$\rho_{AB} = |0_1 0_1\rangle \otimes |1_2 1_2\rangle. \quad (37)$$

显然, 这是个退纠缠的直积态. 当  $\Omega t = (2n + 1)\pi/4$  时,  $\mathcal{S}(A|B)$  达到它的负最大值  $-1$ , 即  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 1$ . 这意味着两原子之间是最大纠缠. 这由方程 (29) 可以解释. 在上述条件下, 系统密度算符可表达为

$$\rho_{AB} = 1/2 [ |0_1 1_2 0_1 1_2\rangle + |1_1 0_2 1_1 0_2\rangle + i(|1_1 0_2 0_1 1_2\rangle - |0_1 1_2 1_1 0_2\rangle) ] \quad (38)$$

即系统态的形式为

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0_1 1_2\rangle + i|1_1 0_2\rangle). \quad (39)$$

这正是已广泛应用于量子信息过程中的 EPR 纠缠态.

### 3.3.2. 两原子初始处于混合态

进一步, 图 1(b)(c) 展示了两原子初始处于混合态的情况. 这里, 我们定义两原子的混乱度反比于两原子态的概率差  $\epsilon = |\eta_1 - \eta_2|$ . 图 1(b) 展示了两原子初始处于混合态  $\eta_1 = 0.1, \eta_2 = 0.9$  时  $\mathcal{S}(A|B)$  和  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  的时间演化. 由该图可知用点线表示的  $\mathcal{S}(A|B)$  的演化周期与图 1(a) 相同, 但  $\mathcal{S}(A|B)$  的负度即  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  的大小随着两原子的混乱度的增加而减小. 即  $\epsilon$  越小, 两原子的混乱度越大, 两原子

间的纠缠度越小. 这上结果的物理解释是, 体现量子关联的  $\rho_{AB}$  的非对角元  $\rho_{23}$  和  $\rho_{32}$  的值随  $\epsilon$  单调减小, 因此两原子间的纠缠度随着混乱度的增加而减小. 特别地, 当两原子处于最大混乱度时, 对应  $\eta_1 = \eta_2 = 0.5 (\epsilon = 0)$ ,  $\mathcal{S}(A|B)$  保持为 0 值, 即  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 0$ , 见图 1(c). 这表明在这种情况下, 由方程 (23) 所描述的哈密顿量不能导致原子间的量子纠缠. 此时我们可以分别由 (30) 式得出和 (32) 式得出  $\pi_{\pm} = 0.5$ , 和  $\kappa_{\pm} = 0.5$ . 这样方程 (3) 满足  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 0$ . 由于非对角元  $\rho_{23}$  和  $\rho_{32}$  为 0 值, 通过 (29) 式的直接计算  $\rho_{AB}$  可表示为

$$\rho_{AB} = 1/2(|0_1 1_2 0_1 1_2\rangle + |1_1 0_2 1_1 0_2\rangle). \quad (40)$$

这正是经典关联态(可分离混合态). 上面的结果对于存在噪声条件下的量子通信可能是十分重要的.

### 3.3.3. 两原子初始处于独立态

最后, 我们讨论两原子初始处于独立态的情况, 即

$$\rho_A(0) = \rho_B(0) = 1/2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|), \quad (41)$$

和

$$\rho_{AB}(0) = \rho_A(0) \otimes \rho_B(0). \quad (42)$$

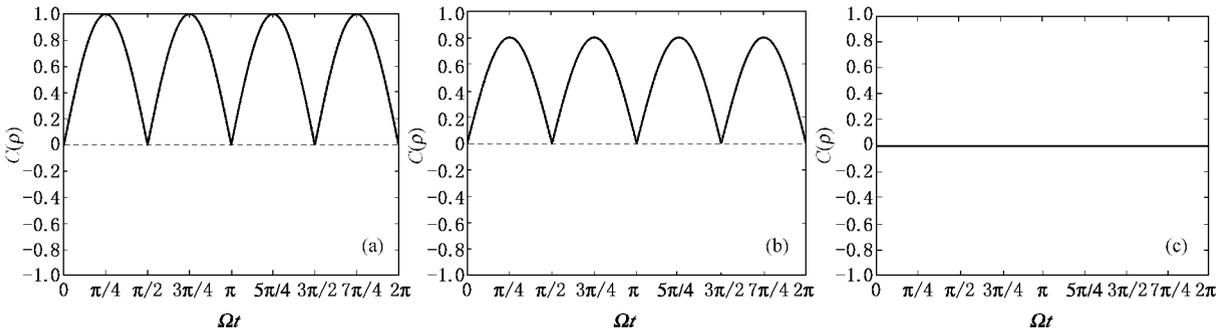


图 2 concurrence 的时间演化 (a) 两原子初始处于纯态,  $\eta_1 = 0, \eta_2 = 1$  (b) 两原子初始处于混合态,  $\eta_1 = 0.1, \eta_2 = 0.9 (\epsilon = 0.8)$  (c) 两原子初始处于最大混合态  $\eta_1 = 0.5, \eta_2 = 0.5 (\epsilon = 0)$  或两原子初始处于独立态  $\rho_A(0) = \rho_B(0) = 1/2(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$

图 1(c) 清晰的展示了  $\mathcal{S}(A|B)$  的时间演化保持为 0 值, 即  $E_{A|B}(\rho_{AB}) = 0$ . 这表明当两原子初始处于独立态时, 两原子之间不能发生量子关联. 为了与  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  进行比较, 在图 2(a)–(c) 中给出了两原子初始处于上述三种不同初态时 concurrence  $C(\rho)$  的时间演化曲线. 很显然,  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  和  $C(\rho)$  的演化规律在每一种情况下完全一致. 然而, 值得一提的是, 所考虑系统在上述情况下的相对熵的计算是十分困难的.

## 4. 结 论

运用负值量子条件熵研究了双量子系统一类混合态的纠缠量度. 给出了负值量子条件作为条件熵纠缠度的定义, 证明了条件熵纠缠度满足作为  $2 \times 2$  系统一类混合态纠缠量度的四个基本条件. 当双量子系统处于纯态时, 条件熵纠缠度即为部分熵纠缠度. 应用条件熵纠缠度研究了真空腔场中两全同二

能级原子之间纯态和一类混合态纠缠的时间演化, 比较了相同条件下两全同原子系统 concurrence 纠缠度的时间演化. 结果表明, 两纠缠度演化规律完全一致, 验证了负值量子条件熵可以作为双量子系统纯态和一类混合态的纠缠量度. 值得一提的是, 所考虑系统在混合态的相对熵计算是十分困难的. 诚然, 本

文中混合态的分类标准的一般化还可以进一步深入探讨, 基于引言中我们提出的理由四, 对条件熵纠缠度的研究还可能拓展到  $2 \times 3$  和  $3 \times 2$  体系的纯态和一类混合态. 因此, 我们给出的证明和研究结果对寻找双量子多能级和多体量子系统计算简便的普适纠缠度的研究具有参考价值.

- [ 1 ] Bell J S 1965 *Physics* **1** 195
- [ 2 ] Xiang S H , Song K H 2005 *Acta . Phys . Sin .* **54** 1190 ( in Chinese )[ 向少华、宋克慧 2005 物理学报 **54** 1190 ]
- [ 3 ] Hu Y H , Fang M F , Liao X P , Zheng X J 2006 *Acta . Phys . Sin .* **55** 4631 ( in Chinese )[ 胡要花、方卯发、廖湘萍、郑小娟 2006 物理学报 **55** 4631 ]
- [ 4 ] Wu Y , Yang X 1997 *Phys . Rev . Lett .* **78** 3086
- [ 5 ] Wang C Z , Fang M F 2002 *Acta Phys . Sin .* **51** 1989 ( in Chinese ) [ 王成志、方卯发 2002 物理学报 **51** 1989 ]
- [ 6 ] Ekert A K 1991 *Phys . Lett .* **67** 661
- [ 7 ] Zheng S B 2005 *Chin . Phys .* **14** 533
- [ 8 ] Liu T K , Wang J S , Feng J , Zhan M S 2005 *Chin . Phys .* **14** 533
- [ 9 ] Bennett C H , Brassard G , Cr . C . épeau , Jozsa R , Peres A , Wootters W K 1993 *Phys . Rev . Lett .* **70** 1895
- [ 10 ] Liu X J , Zhou B J , Fang M F , Zhou Q P 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 704 [ 刘小娟、周并举、方卯发、周清平 2006 物理学报 **55** 704 ]
- [ 11 ] Bennett C H , Bernstein H J , Popescu S 1996 *Phys . Rev . A* **53** 2946
- [ 12 ] Wootters W K 1998 *Phys . Rev . Lett .* **80** 6023  
Wootters W K 1990 *Opt . Soc . Am . B* **7** 116
- [ 13 ] Vedral V , Plenio M B , Rippin , Knight P L 1997 *Phys . Rev . Lett .* **78** 2275
- Vedral V , Plenio M B , Rippin , Knight P L 1998 *Phys . Rev . A* **57** 1619
- [ 14 ] Liu X J , Fang M F 2003 *Chin . Phys .* **12** 0971
- [ 15 ] Cerf N J , Adami C 1997 *Phys . Rev . Lett .* **79** 5194
- [ 16 ] Wootters W K 1998 *Phys . Rev . Lett .* **80** 2245
- [ 17 ] Cerf N J , Adami C 1999 *Phys . Rev . A* **60** 893
- [ 18 ] Wei T C , Nemoto K , Goldbart P M , Kwiat P G , Munro W J , Verstraete F 2003 *Phys . Rev . A* **67** 022110
- [ 19 ] Nielsen M A , Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* ( Chapter 11 )( Cambridge University Press )
- [ 20 ] Vedral V , Plenio M B , Rippin M A , Knight P L 1997 *Phys . Rev . Lett .* **78** 2275
- [ 21 ] Vedral V , Plenio M B 1998 *Phys . Rev . A* **57** 1619
- [ 22 ] Li C Z , Huang M Q , Chen P X , Liang L M *Quantum Communication and Quantum Computation* ( Publishing House of National University of Defense Technology Press )( in Chinese )[ 李承祖、黄明球、陈平形、梁林梅编著, 量子通信和量子计算( 国防科技大学出版社 ) ]
- [ 23 ] Zheng S B , Guo G C 2001 *Phys . Rev . A* **63** 044302
- [ 24 ] Phoenix S J D , Knight P L 1988 *Ann . Phys*( NY ) **381** 186

# Negative quantum conditional entropy and the entanglement measure of a kind of mixed state of bipartite quantum system<sup>\*</sup>

Zhou Bing-Ju<sup>1)</sup> Liu Xiao-Juan<sup>1) 2) 3) †</sup> Fang Mao-Fa<sup>2) 3)</sup>

Zhou Qing-Ping<sup>2) 3)</sup> Liu Ming-Wei<sup>1)</sup>

1) *Department of Physics, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China*

2) *Department of Physics, Hunan Normal University, Changsha 410081, China*

3) *Anhui Institute of Optics and Fine Mechanics, Chinese Academy of Sciences, Hefei 230031, China*

(Received 19 December 2006; revised manuscript received 4 March 2007)

## Abstract

From negative quantum conditional entropy point of view this paper investigates the entanglement measure of the pure state and a kind of mixed state of bipartite quantum system. Also this paper gives a definition of quantum conditional entropy of entanglement  $E_{A|B}(\rho_{AB})$  and proves that it satisfies the four fundamental conditions of an entanglement measure for a kind of mixed state of  $2 \times 2$  quantum system by this negative quantum conditional entropy. Using conditional entropy of entanglement, this paper investigates the quantum entanglement between the two identical two-level atoms simultaneously interacting with vacuum cavity field as an application. This paper compares conditional entropy of entanglement and concurrence at the same condition, and the result shows that the curves of their evolutions are identical. These obtained results test and verify that conditions of an entanglement measure may be taken as the entanglement measure of the pure state and a kind of mixed state of bipartite quantum system.

**Keywords:** bipartite quantum system, negative quantum conditional entropy, conditional entropy of entanglement, the entanglement measure of mixed state

**PACC:** 4250

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10374025), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 05JJ30004) and the Scientific Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 01C260).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: lxjdx@163.net