

双模最小关联混合态作为量子信道实现 量子隐形传态的保真度^{*}

夏云杰^{1)†} 王光辉¹⁾ 杜少将²⁾

1) 曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

2) 济宁师范专科学校物理系, 曲阜 273155)

(2006 年 11 月 29 日收到, 2007 年 3 月 29 日收到修改稿)

基于 Braunstein 和 Kimble 提出的 B-K 方案以双模最小关联混合态作为量子信道实施对未知量子态的隐形传送, 并以传送相干态为例进行了研究. 结果表明: 双模最小关联混合态作为一种广义的 Einstein-Podolsky-Rosen 型纠缠态在实现量子隐形传态中能很好地担当量子信道的角色, 在纠缠度和压缩度选择适当的条件下被传送未知量子态的保真度可以达到 1. 这是比双模压缩真空态更优越的量子信道.

关键词: 量子隐形传态, 双模最小关联混合态, 保真度

PACC: 0365, 4250

1. 引 言

量子信息学是由量子力学和信息科学形成的交叉学科. 近 20 年来, 人们对量子信息学这一跨学科领域的理论和实验研究取得了长足的进展^[1-4]. 1991 年第一个基于纠缠态的量子加密协议在实验上的实现^[5], 使纠缠理论的研究有了突破性进展. 人们开始把纠缠这一非经典特性应用到信息科学和计算科学中来, 量子信息学的发展推动了纠缠态理论的研究, 从而使纠缠态在量子隐形传态^[6-8]中的应用得到迅速发展. 同时, 纠缠态为信息传输和信息处理提供了新的物质资源. 1993 年, Bennett 等^[2]利用分离变量的量子纠缠态提出了量子隐形传态方案. 1994 年, Vaidman^[9]从理论上将量子隐形传态推广到无限维希尔伯特空间. 1998 年, 连续变量的量子隐形传态在理论和实验上均取得了突破性进展. 首先, Braunstein 和 Kimble^[1]提出了以双模压缩真空态作为量子信道实现量子隐形传态的方案(B-K 方案). 随后, Kimble 小组在实验上实现了连续变量的量子隐形传态. 后来, 文献^[10]提出了应用正则共轭变量(坐标和动量)的方法实现量子隐形传态的方案, 正

则共轭变量坐标和动量在该方案中起到了三重作用: 正则变量的相位差和粒子数作为纠缠信道, 并作为 Bell 基进行测量, 未知量子态可在单模可观测量上重现. 最近, 文献^[11]使用量子态的特征函数对连续变量量子隐形传态进行了研究.

量子隐形传态的基本问题是找到一个理想的量子信道, 于是人们提出各种方案实现量子隐形传态, 并且用不同的方式提高量子隐形传态的保真度^[12-15]. 在连续变量量子隐形传态的方案中大部分方案的量子信道是双模纠缠纯态^[16, 17], 对双模纠缠混合态作为量子信道的可行性研究不多. 近来文献^[18]提出了一种含有最小关联并且仍然存在压缩的双模纠缠混合态——双模最小关联混合态. 夏云杰等^[19]对双模最小关联混合态的纠缠特性进行了研究. 最小关联混合态作为一种混合态纠缠很少引起人们的注意, 以混合纠缠态为信道进行量子隐形传态更是受到人们的质疑. 因此, 本文对以双模最小关联混合态为信道实现量子隐形传态进行了研究.

2. 理论方案

本文基于 B-K 方案^[1]探索以双模最小关联混合

^{*} 国家自然科学基金重点项目(批准号: 10534030)资助的课题.

[†] E-mail: yjxia@mail.qfnu.edu.cn

态作为量子信道来代替纠缠纯态实现量子隐形传态的可行性. 该方案的理论处理方法为输入态和纠缠通道以 Wigner 函数的形式给出, 将未知输入场模与作为纠缠通道的双模量子态的一个场模耦合起来, 实现新的纠缠. 第二步, 传送者使用零拍探测器测量一组共轭变量, 得到经典的电流信息. 如果所实施的测量是理想的, 那么电流分布函数将与相应的共轭变量的 Wigner 函数完全相同. 第三步是输入态的重建过程, 传送者将测量得到的经典信息告诉接收者, 接收者可在纠缠通道的另一个场模上重现输入态.

对于双粒子连续变量系统, 最大纠缠态可以表示为 Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) 型算符

$$\begin{aligned} \hat{X}_+ &= \hat{x}_1 + \hat{x}_2, \\ \hat{P}_- &= \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \end{aligned} \quad (1)$$

或

$$\begin{aligned} \hat{X}_- &= \hat{x}_1 - \hat{x}_2, \\ \hat{P}_+ &= \hat{p}_1 + \hat{p}_2 \end{aligned} \quad (2)$$

的本征态^[20, 21].

本文研究量子隐形传态使用的信道为最小关联混合态, 其 Q 函数表示为如下形式^[19]:

$$\begin{aligned} Q(\alpha, \beta) &= (1 - 2d) \\ &\times \exp\left\{- (1 - d) \left[\gamma |\alpha|^2 + \frac{1}{\gamma} |\beta|^2 \right]\right\} \\ &\times \exp[-d(\alpha\beta + \alpha^*\beta^*)]. \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $\gamma = \tanh(r)$ 是压缩参数, d 是关联参数, 且 $d \leq \frac{1}{2}$.

Wootters 在文献 [22] 中对纠缠度作了如下定义:

$$E(T_e) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 + T_e^2}}{2}\right), \quad (4)$$

$$h(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x), \quad (5)$$

其中

$$T_e = 1 - \frac{a(1 - \gamma)^2}{2\gamma}, \quad (6)$$

$$a = \frac{1 - d}{1 - 2d}.$$

可由 (4) (5) 式得到

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{1 + 2a} - 1}{\sqrt{1 + 2a} + 1}. \quad (7)$$

图 1 是纠缠度 E 随压缩参数 γ 在不同关联参数 d 下的变化曲线. 从图 1 可以看出, 大的压缩参数 γ 和小的关联参数 d 能够获得较大的纠缠度.

通过 (3) 式可以求得双模最小关联态的 Wigner

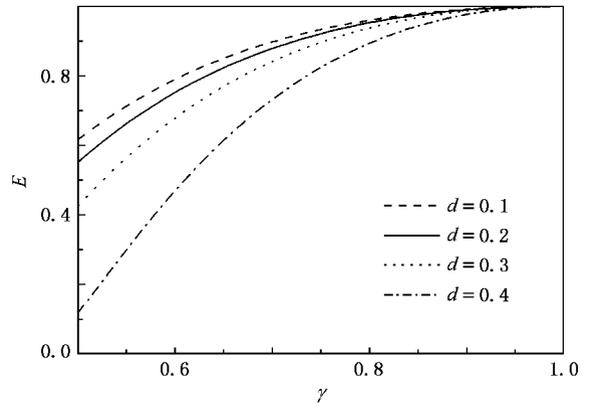


图 1 纠缠度 E 随压缩参数 γ 在不同相关参数 d 下的变化

函数为

$$\begin{aligned} W(\alpha_1, \alpha_2) &= \frac{1}{\pi^4} \iint \exp(\eta_1^* \alpha_1 - \eta_1 \alpha_1^* \\ &\quad + \eta_2^* \alpha_2 - \eta_2 \alpha_2^*) \\ &\quad \times \exp\left[\frac{1}{2}(|\eta_1|^2 + |\eta_2|^2)\right] \chi_A d^2 \eta_1 d^2 \eta_2 \\ &= \frac{\delta(2d - 1)}{\Omega} \exp\left(\frac{\Delta}{\Omega}\right), \end{aligned} \quad (8)$$

式中

$$\begin{aligned} \Delta &= 2\pi^2 \gamma \{-2d\gamma(\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1^* \alpha_2^*) \\ &\quad + |\alpha_1|^2 [1 + 2d(\gamma - 1) - 2\gamma]\gamma \\ &\quad + |\alpha_2|^2 (-2 - 2d(\gamma - 1) + \gamma)\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\Omega = -2 + 5\gamma - 2\gamma^2 + 2d(1 - \gamma + \gamma^2). \quad (10)$$

对于任意一个连续变量的未知输入态 $|\Psi_{in}\rangle$, 可以表示为相干态的叠加态

$$|\Psi_{in}\rangle = \int d^2 \alpha P(\alpha) |\alpha\rangle, \quad (11)$$

式中

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi} \langle \alpha | \Psi_{in} \rangle.$$

为了方便, 我们以未知输入态为相干态来研究双模最小关联混合态作为量子信道实现量子隐形传态的过程, 即

$$P(\alpha) = \frac{1}{\pi} \delta(\alpha - \alpha_{in}),$$

其中 α_{in} 为输入场模. 对于相干态 $|\Psi\rangle = |\beta\rangle$, 它的光子数呈现泊松分布, 平均光子数 $\bar{n} = |\beta|^2$, 相应的 Wigner 函数可以表示为

$$W_{in}(\alpha_{in}) = \frac{2}{\pi} \exp(-2|\alpha_{in} - \beta|^2). \quad (12)$$

根据 B-K 方案, 假设发送者要借助双模最小关联混

合态来传送未知量子态 $|\alpha_{in}\rangle$, 那么首先将双模最小关联混合态的两个模 α_1, α_2 分别发送给发送者和接收者. 接收者将未知输入场模 $|\alpha_{in}\rangle$ 与双模最小关联混合态的一个场模 α_1 通过一个 50/50 的分束器耦合起来, 实现新的纠缠. 第二步, 传送者使用零拍探测器测量一组共轭变量. 得到经典电流信息后, 将经典信息通过经典信道告知接收者. 第三步, 接收者根据接收到的经典信息将初始输入态在模 α_2 上重建.

在量子隐形传送之前, 系统的整个量子态为

$$W(\alpha_{in}, \alpha_1, \alpha_2) = W_{in}(\alpha_{in}) \otimes W(\alpha_1, \alpha_2). \quad (13)$$

在发送端, 未知输入态 $|\alpha_{in}\rangle$ 与双模压缩真空态中一个场模在 50/50 的分束器处相互耦合, 即 $\beta_{a,b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_{in} \pm \alpha_1)$. 经分束器后, 系统整个 Wigner 函数将变成

$$W(\beta_a, \beta_b, \alpha_2) = W_1\left(\frac{\beta_a + \beta_b}{\sqrt{2}}, \frac{\beta_a - \beta_b}{\sqrt{2}}, \alpha_2\right). \quad (14)$$

这表明输入态与发送者和接收者初始共享的双模最小关联混合态彼此纠缠起来了. 在分束器的两个输出端使用一个零拍探测器, 通过调节相应的本地振荡相位, 发送者可以测量到 β_a 的实部与 β_b 的虚部所携带的信息. 假设零拍探测的效率是 100%, 这样发送者可以实施理想的 Bell 测量. 在实施 Bell 测量操作后, 发送者将两个测量结果

$$(x_a, p_b) = \left(\text{Re}\beta_a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_{in} + x_1), \text{Im}\beta_b = \frac{1}{\sqrt{2}}(p_{in} - p_1)\right)$$

通过经典信道传递给接收者. 同时, 所有关于 β_a 的虚部及 β_b 的实部所包含的信息都已经消失. 基于从发送者传来的测量结果, 接收者对双模压缩真空态的另一个场模 α_2 实施一个平移操作,

$$\alpha_2 \rightarrow \alpha_{out} + \sqrt{\chi}(\text{Re}\beta_a + i\text{Im}\beta_b). \quad (15)$$

经过平移操作之后, 接收端的输出态可写成

$$W_{out}(\alpha_{out}) = \int d^2\beta_a d^2\beta_b W(\beta_a, \beta_b, \alpha_{out} + \sqrt{\chi}(\text{Re}\beta_a + i\text{Im}\beta_b)) = \frac{4\chi(2d-1)}{\pi\Theta} \times \exp\left[-\frac{2\chi(2d-1)}{\Theta}|\alpha_{out} - \beta|^2\right] \quad (16)$$

式中

$$\Theta = \pi\sqrt{[-2 + \gamma - 2\gamma^2 + 2d(1 + \gamma + \gamma^2)]}. \quad (17)$$

在获得了量子隐形传送的输出态后, 我们用保真度来衡量量子态隐形传态的性能. 对于一个输入量子态 $\hat{\rho}_{in} = |\psi_{in}\rangle\langle\psi_{in}|$, 输入态与输出态的保真度被定义为

$$F = \langle\psi_{in}|\hat{\rho}_{out}|\psi_{in}\rangle = \text{tr}(\hat{\rho}_{in}\hat{\rho}_{out}),$$

其中 $\hat{\rho}_{out}$ 代表输出态的密度算符. 另外, 保真度也能够用输入态与输出态 Wigner 函数的交叠^[23-24]来表示, 即

$$F = \pi \int d^2\alpha W_{in}(\alpha_{in})W_{out}(\alpha). \quad (18)$$

由(12)(16)和(18)式可得这一信道传输相干态的保真度

$$F = \frac{\chi(2d-1)\gamma}{-1-\gamma^2+d(1+\gamma)^2}. \quad (19)$$

这一保真度强烈地依赖于最小关联混合态的压缩和关联参数.

3. 数值计算

利用上述结论, 我们通过数值计算讨论双模最小关联混合态的纠缠度 E 与压缩参数 γ 及相关参数 d 的关系. 如图 1 所示, 双模最小关联混合态的纠缠度 E 随压缩参数 γ 的增大而增大. 这与文献[19]的结论是一致的, 有压缩一定有纠缠. 最小关联态的纠缠度随 d 的取值的增大而减小, 在参数 γ 越小时这种现象越明显. 这说明要获得具有较大纠缠的最小关联混合态, 采取增大参数 γ 或减小参数 d 的取值都是有效的.

保真度是衡量量子隐形传态好坏的一个重要指标. 图 2 是保真度随参数 d 在不同压缩参数下的变化曲线. 图 2 显示出保真度 F 随 d 的增大而减小, 保真度减小的趋势与压缩有关, 压缩越大保真度减小越慢, 这与 B-K 方案是相一致的. 当 γ 趋近于 1 时保真度 F 趋近于 1, 选择较小的 d 和较大的 γ 可以获得较大的保真度. 图 3 是双模压缩真空态和双模最小关联混合态作为量子信道时保真度 F 随压缩参数 γ 的变化曲线. 从图 3 可以看出, 在压缩较小时保真度 $F < 0.5$, 此时以双模最小关联态为信道的量子隐形传态的保真度并不比用双模压缩态为信道传输信息更为优越. 在 d 较小、压缩参数 γ 较大时, 即双模最小关联混合态的纠缠度和压缩度较大时, 用双模最小关联混合态为信道的量子隐形传态完全具备量子通信的安全性、可靠性.

从数值计算的结果可以看出, 进行量子隐形传

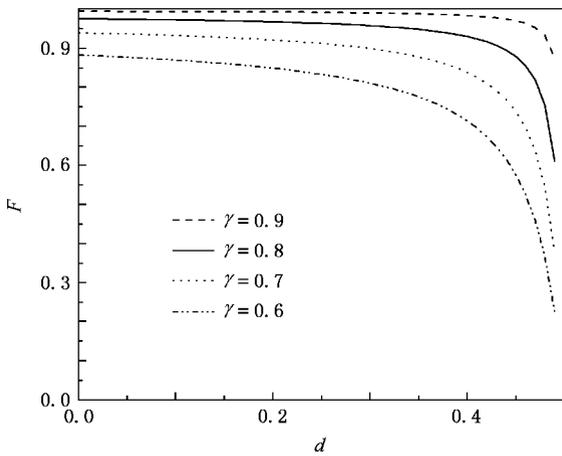


图 2 保真度 F 随相关参数 d 在不同压缩参数 γ 下的变化

态的理想信道应该具有较大的纠缠度和压缩度。

由上述分析可知,双模最小关联混合态完全可以作为很好的量子信道,进行安全、可靠的信息传送.下面我们进一步分析双模最小关联混合态作为量子信道的优越性.在 B-K 方案中,以双模压缩真空态为信道,传输相干态得到的保真度为

$$F = \frac{1 + \gamma}{2}. \quad (20)$$

从图 3 可以看出,在压缩参数 γ 较小的情况下,以双模最小关联混合态为信道传输未知态并不比以双模压缩真空态为信道传输信息安全、可靠,但在双模最小关联混合态压缩较大的情况下,量子隐形传态的安全性和可靠性要明显优于双模压缩真空态作为信道进行量子隐形传态.这说明双模纠缠混合态作为量子信道在适当的条件下比用双模纠缠纯态作为信道更好.

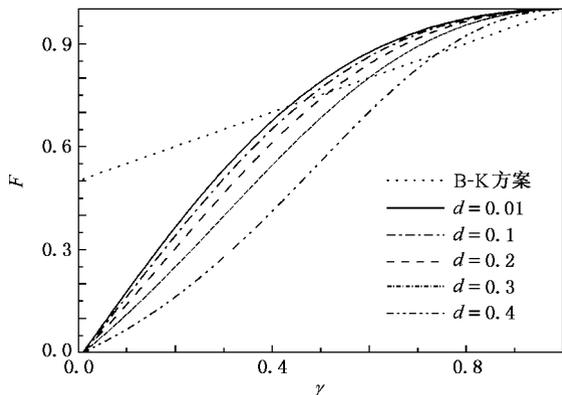


图 3 分别以双模压缩真空态和双模最小关联混合态作为量子信道时保真度 F 随压缩参数 γ 的变化

为了更清楚地看出双模最小关联混合态作为量

子信道的优越性,我们比较未知输入态与输出态的 Wigner 函数.图 4 为相干态 $|\beta\rangle$ 在 $\beta = 0.1 + i0.1$ 时的 Wigner 函数图形.图 5 是在 B-K 方案中,以双模压缩真空态为信道,在输出端得到的输出态的 Wigner 函数图形,此时 $\alpha_{out} = 0.1 + i0.1, \gamma = 0.9$,保真度 $F = 0.95$.图 6 是以双模最小关联混合态为信道,在输出端得到的输出态的 Wigner 函数图形,此时 $\alpha_{out} = 0.1 + i0.1, d = 0.01, \gamma = 0.9$,保真度 $F = 0.99$.比较图 4、图 5、图 6 可以看出:图 5 的失真较大,图 6 较好地保留了图 4 所携带的信息.由此可知,在 B-K 方案中当压缩度和纠缠度较大的情况下,以双模最小关联混合态为信道传输信息要优于以双模压缩真空态为信道传输信息.

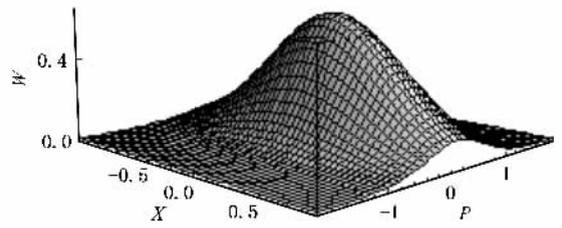


图 4 输入相干态 $|\beta\rangle$ 的 Wigner 函数 $\beta = 0.1 + i0.1$

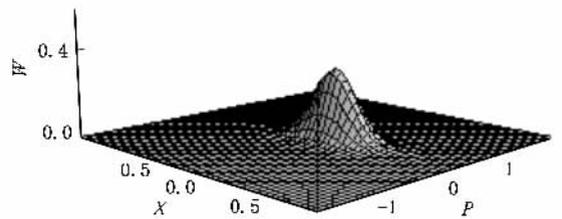


图 5 以双模压缩真空态为量子信道时在输出端得到的输出态的 Wigner 函数 $\alpha_{out} = 0.1 + i0.1, \gamma = 0.9$

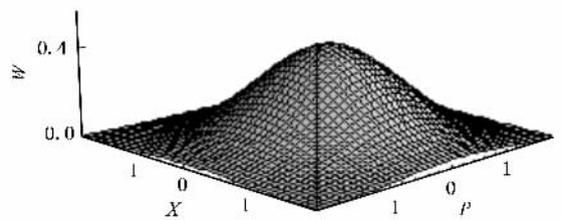


图 6 以双模最小关联混合态为量子信道时在输出端得到的输出态的 Wigner 函数 $\alpha_{out} = 0.1 + i0.1, d = 0.01, \gamma = 0.9$

4. 结 论

本文以相干态为例,用双模最小关联混合态为

信道实现量子隐形传态.通过分析发现,以双模最小关联混合态为信道传输信息时,在纠缠度和压缩度较大的情况下显示出双模纠缠混合态作为量子信道传输信息的优越性.这说明只要适当选择纠缠度和压缩度,合适的混合纠缠态完全可以作为量子信道

进行信息传输.

传送任意量子态对任何信道都是一个复杂的问题,在以前的研究中也仅讨论传送相干态和压缩态两种情况,对任意量子态隐形传送的研究我们将另文讨论.

- [1] Braunstein S L ,Kimble H J 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 869
- [2] Bennett C H ,Brassard G ,Crepean C ,Jozsa R ,Peres A ,Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [3] Bouwmeester D ,Pan J W ,Mattle K ,Eibl M ,Weinfurters H ,Zeilinger A 1997 *Nature* **390** 575
- [4] Furusawa A ,Sorensen J L ,Braunstein S L ,Fuchs C A ,Kimble H J ,Polzik E S 1998 *Science* **282** 706
- [5] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [6] Ponomarevko S A ,Wolf E 2001 *Phys. Rev. A* **63** 62106
- [7] Zheng S B ,Guo G C 1997 *Phys. Lett. A* **234** 171
- [8] Zheng S B ,Guo G C 1997 *Phys. Lett. A* **236** 180
- [9] Vaidman L 1994 *Phys. Rev. A* **49** 1473
- [10] Yu S X ,Sun C P 2000 *Phys. Rev. A* **61** 22310
- [11] Marian P ,Marian T A 2006 *Phys. Rev. A* **74** 42306
- [12] Zhai Z H ,Li Y M ,Wang S K ,Guo J ,Zhang T C ,Gao J R 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2710 (in Chinese) [翟泽辉、李永明、王少凯、郭娟、张天才、郜江瑞 2005 物理学报 **54** 2710]
- [13] Zheng Y Z ,Dai L Y ,Guo G C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2678 (in Chinese) [郑亦庄、戴玲玉、郭光灿 2003 物理学报 **52** 2678]
- [14] Huang Y C ,Liu M 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4517 (in Chinese) [黄永畅、刘敏 2005 物理学报 **54** 4517]
- [15] Zhang Q ,Li F L ,Li H R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 2275 (in Chinese) [张茜、李福利、李宏荣 2006 物理学报 **55** 2275]
- [16] Li Y ,Zhang J ,Zhang J X ,Zhang T C 2006 *Chin. Phys.* **15** 1766
- [17] Liao J Q ,Kuang L M 2006 *Chin. Phys.* **15** 2246
- [18] Agarwal G S ,Ponomarevko S A 2003 *Phys. Rev. A* **67** 32103
- [19] Xia Y J ,Guo G C 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1877
- [20] Einstein A ,Podolsky B ,Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [21] Deng F G 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 893
- [22] Wootters W K 1996 *Phys. Rev. A* **54** 3824
- [23] Lee J ,Kim M S ,Jeony H 2000 *Phys. Rev. A* **62** 32305
- [24] Chizhov A V ,Knoll L ,Welsh D J 2002 *Phys. Rev. A* **65** 22310

Fidelity of the scheme of continuous variables quantum teleportation via minimum-correlation mixed quantum states^{*}

Xia Yun-Jie^{1)†} Wang Guang-Hui¹⁾ Du Shao-Jiang²⁾

¹⁾ *College of Physics and Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China*

²⁾ *Department of Physics, Jining Teacher's College, Qufu 273155, China*

(Received 29 November 2006; revised manuscript received 29 March 2007)

Abstract

Based on the proposal of Braunstein and Kimble, we studied the continuous variables quantum teleportation via minimum-correlation mixed state. The results show that the mixed entangled state as a generalized type of Einstein-Podolsky-Rosen entangled states is a good quantum channel. As an example, we analyzed in detail teleporting a coherent state by means of this channel. When the parameters of minimum-correlation mixed state are chosen properly, the fidelity will almost reach to unity. The minimum-correlation mixed state as a quantum channel is better than the two-mode squeezed vacuum state.

Keywords : quantum teleportation, two-mode minimum-correlation states, fidelity

PACC : 0365, 4250

^{*} Project supported by the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10534030).

[†] E-mail: yjxia@mail.qfnu.edu.cn