

Taub-NUT 时空视界附近自旋场的热力学量^{*}

刘晓莹[†]

(湛江师范学院物理系, 湛江 524048)

(2006 年 10 月 30 日收到, 2007 年 3 月 9 日收到修改稿)

利用 Wentzel-Kramers-Brillouin 近似计算了 Taub-NUT 时空事件视界附近自旋为 $1/2, 1, 3/2, 2$ 等无质量场的熵密度、压强和能量密度. 结果表明, 自旋场附近的热力学量不仅具有与平直时空相同的主导项, 还多了两项自旋依赖的附加项.

关键词: Taub-NUT 时空, 自旋场, 热力学量

PACC: 0470, 9760L

1. 引 言

自 20 世纪 70 年代 Hawking^[1] 发现黑洞热辐射以来, 黑洞热力学的研究一直都是理论物理研究的重要课题之一, 其中黑洞热力学量特别是黑洞熵的研究更是人们关注的重点. 当前关于黑洞量子熵的研究绝大多数的工作只考虑量子熵的主导项, 认为量子场对黑洞熵的贡献形式与标量场的贡献形式相同^[2-5]. 但是近年来各种理论证明^[6,7] 黑洞量子熵存在对数修正项, 特别是文献 [8-12] 的研究发现, 黑洞附近的量子熵不仅依赖于时空的几何特性, 也依赖于场的自旋, 这些结论表明弯曲时空中的热力学量存在着不同于平直时空的自旋效应. 最近文献 [13-16] 利用 Wentzel-Kramers-Brillouin (WKB) 近似研究了黑洞附近自旋场的热力学量, 发现黑洞视界附近的熵密度、能量密度与压强公式除了具有与已有的研究^[17-19] 相同的主导项外, 还具有与局域温度相关的自旋依赖项, 这再一次表明量子场与标量场有着不同的热力学特性.

Taub-NUT 时空是一个轴对称渐近非平坦时空, 其时空性质比较特殊, 因而对其自旋场热力学特性的研究具有一定的特殊意义. 本文采用 WKB 近似研究 Taub-NUT 时空事件视界附近自旋为 $1/2, 1, 3/2, 2$ 等无质量场的熵密度、能量密度和压强等热力学量, 结果进一步证实了自旋场的热力学量存在着自旋依赖项.

2. Taub-NUT 时空视界附近自旋场

Taub-NUT 时空的线元为^[20]

$$ds^2 = V(r) \left[dt + 2N \cos\theta d\varphi \right]^2 - [V(r)]^{-1} dr^2 - (r^2 + N^2) \left[d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2 \right], \quad (1)$$

其中

$$V(r) = 1 - \frac{\chi(Mr + N^2)}{r^2 + N^2}, \quad (2)$$

M, N 分别代表引力“电”型质量和“磁”型质量. 由 $V(r) = 0$ 可以得到黑洞的事件视界位于 $r_+ = M + \sqrt{M^2 + N^2}$ 处.

由线元可得度规行列式和逆变度规张量

$$g = |g_{\mu\nu}| = -(r^2 + N^2) \sin^2\theta, \quad (3)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 10375051)资助的课题.

[†] E-mail: xjylyliu@tom.com

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{V(r)} - \frac{4N^2 \cot^2 \theta}{r^2 + N^2} & 0 & 0 & \frac{2N \cos \theta}{(r^2 + N^2) \sin^2 \theta} \\ 0 & -V(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{(r^2 + N^2)} & 0 \\ \frac{2N \cos \theta}{(r^2 + N^2) \sin^2 \theta} & 0 & 0 & -\frac{1}{(r^2 + N^2) \sin^2 \theta} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

由于 Taub-NUT 时空是 Petrov D 类的^[12], 所以自旋为 $s = 1/2, 1, 3/2, 2$ 无质量场方程可用微扰方法简化为^[21]

$$\begin{aligned} & \{ [D - 2s\rho - \rho^* \{ \Delta - 2s\gamma + \mu \} \\ & - [\delta - (2s - 1)\beta - \alpha^* \{ \bar{\delta} - 2s\alpha \} \\ & - (2s - 1)\{ s - 1 \} \psi_2] \Phi_{+s} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \{ [\Delta + (2s - 1)\gamma - \gamma^* + 2s\mu + \mu^* \{ D - \rho \} \\ & - [\bar{\delta} + (2s - 1)\alpha + \beta^* \{ \delta + 2s\beta \} \\ & - (2s - 1)\{ s - 1 \} \psi_2] \Phi_{-s} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

其中 $D = l^\mu \partial_\mu, \Delta = n^\mu \partial_\mu, \delta = m^\mu \partial_\mu$ 为方向导数. 方程(5)对应自旋态为 $p = s$, 方程(6)对应自旋态为 $p = -s$. 由于 Taub-NUT 时空是稳态时空, 故可采用 WKB 近似. 在黑洞事件视界附近的薄层区域内, 方程(5)和(6)的解可写为

$$\chi_p = \exp[-iEt + iS_p(r, \theta, \varphi)], \quad (7)$$

其中 p 是自旋态, 即 $p = \pm s = \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2, \pm 2$. 由文献[13]知, 在坐标系 $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$ 中选择零标架

$$\begin{aligned} l^\mu &= ([V(r)]^{-1}, 1, 0, 0), \\ n^\mu &= \frac{1}{2}(1, -V(r), 0, 0), \\ m^\mu &= \frac{1}{\sqrt{\chi}(N - ir)} \\ &\times (-2N \cos \theta \csc \theta, 0, -i, \csc \theta); \end{aligned} \quad (8)$$

非零旋系数

$$\begin{aligned} \rho &= -\frac{1}{r - iN}, \\ \mu &= -\frac{V(r)}{\chi(r - iN)}, \\ \alpha &= -\frac{\cot \theta}{2\sqrt{\chi}(r - iN)}, \\ \beta &= \frac{\cot \theta}{2\sqrt{\chi}(r + iN)}, \\ \gamma &= \frac{1}{4} \frac{dV(r)}{dr} - \frac{iNV(r)}{\chi(r^2 + N^2)}; \end{aligned} \quad (9)$$

Weyl 张量的非零张量

$$\psi_2 = -\frac{M - iN}{(r - iN)^3}. \quad (10)$$

将(7)–(9)式代入方程(5)(6)取实部并化简后得动量满足的方程

$$\begin{aligned} & V(r) \{ (r^2 + N^2) P_{r_{+s}}^2 + N(2s - 1) \\ & \times V(r) P_{r_{+s}} + P_{\theta_{+s}}^2 + NE(2s + 1) \\ & + \csc^2 \theta [P_{\varphi_{+s}} + (2NE + s) \cos \theta] \\ & + \frac{MN^2 r - 2N^2 r^2 - Mr^3}{(N^2 + r^2)^2} - s + 1 - \frac{E^2(r^2 + N^2)}{V(r)} \\ & + \frac{4(N^4 + 3MN^2 r - 3N^2 r^2 - Mr^3)}{(r^2 + N^2)^2} \\ & \times (2s^2 - 3s + 1) = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & V(r) \{ (r^2 + N^2) P_{r_{-s}}^2 + N(4s - 1) \\ & \times V(r) P_{r_{-s}} + P_{\theta_{-s}}^2 - EM(4s + 1) - s - 2 \\ & + \csc^2 \theta [P_{\varphi_{-s}} + (2NE - s) \cos \theta] \\ & + \frac{4Mr(1 + s)^2 + N^2(12s^2 - 4s + 7)}{N^2 + r^2} \\ & - \frac{E^2(r^2 + N^2)}{V(r)} - \frac{2N^2(N^2 + Mr)}{(r^2 + N^2)^2} \\ & \times (8s^2 - 4s + 3) = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

(11)(12)式中 P_r, P_θ, P_φ 是相应坐标的动量分量, 可分别表示为

$$\begin{aligned} P_r &= \frac{\partial S_p}{\partial r}, \\ P_\theta &= \frac{\partial S_p}{\partial \theta}, \\ P_\varphi &= \frac{\partial S_p}{\partial \varphi}, \end{aligned} \quad (13)$$

3. 自旋场的热力学量

在 Taub-NUT 黑洞视界附近系统能量小于 E 的微观态数 $g(E)$ 可由下式确定:

$$g_p(E) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int dr d\theta d\varphi dP_r dP_\theta dP_\varphi. \quad (14)$$

将(11)(12)式代入(14)式, 在保证被积函数为实数

的前提下,完成对 $P_r, P_\theta, P_\varphi, \theta, \varphi$ 的积分,可得总量子态数

$$g(E) = g_{++}(E) + g_{--}(E) \\ \approx \frac{2}{3\pi} \int dr \left\{ \frac{\chi(r^2 + N^2)E^3}{V^2(r)} + \frac{3NsE^2}{V(r)} - \frac{3E\mathcal{I}(r,s)}{V(r)} \right\}, \quad (15)$$

其中

$$\mathcal{I}(r,s) = \left[\frac{N^2 + Mr}{N^2 + 2Mr - r^2} (2s^2 - 4s + 3) \right]$$

$$- \frac{N^2}{4(N^2 + r^2)} (26s^2 - 46s + 19) - \frac{1}{2}(2s + 1) \mathcal{V}(r). \quad (16)$$

按照标准的统计热力学,自由能可表示为

$$- \beta F = \pm \sum_j \ln(1 \pm \exp(-\beta E_j)), \quad (17)$$

其中正号表示费米子的自由能,负号表示玻色子的自由能, β 为 Hawking 温度的倒数.用(15)式所确定的量子态数可求得自由能

$$F = \mp \frac{1}{\beta} \int_0^\infty dE \frac{dg(E)}{dE} \ln(1 \pm \exp(-\beta E)) \\ = \begin{cases} - \frac{7\pi^3}{90\beta^4} \int \frac{(r^2 + N^2)}{V^2(r)} dr - \frac{3\zeta(3)}{\pi\beta^3} \int \frac{Ns}{V(r)} dr + \frac{\pi}{6\beta^2} \int \frac{\mathcal{I}(r,s)}{V(r)} dr & \text{(费米子)}, \\ - \frac{4\pi^3}{45\beta^4} \int \frac{(r^2 + N^2)}{V^2(r)} dr - \frac{4\zeta(3)}{\pi\beta^3} \int \frac{Ns}{V(r)} dr + \frac{\pi}{3\beta^2} \int \frac{\mathcal{I}(r,s)}{V(r)} dr & \text{(玻色子)}. \end{cases} \quad (18)$$

令 $\alpha(r)$ 为熵密度, $u(r)$ 为能量密度, $P(r)$ 为压强,由熵 S 和能量 U 的公式^[22]及熵密度、能量密度、压强之间的关系式^[23]可求得热力学量,

$$S = \beta^2 \frac{\partial F}{\partial \beta} = \int \alpha(r) \frac{4\pi(r^2 + N^2)}{\sqrt{V(r)}} dr, \quad (19)$$

$$U = \frac{\alpha(\beta F)}{\partial \beta} = \int 4\pi(r^2 + N^2)u(r) dr, \quad (20)$$

$$P(r) = \frac{\alpha(r)}{\beta \sqrt{V(r)}} - u(r). \quad (21)$$

利用以上计算的自由能及(19)–(21)式得到黑洞事件视界附近的熵密度、能量密度和压强

$$\alpha(r) = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{90} T^3(r) + \frac{9\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{NsV^{1/2}(r)}{(r^2 + N^2)} T^2(r) - \frac{1}{12} \frac{\mathcal{I}(r,s)}{(r^2 + N^2)} \mathcal{T}(r) & \text{(费米子)}, \\ \frac{4\pi^2}{45} T^3(r) + \frac{3\zeta(3)}{\pi^2} \frac{NsV^{1/2}(r)}{(r^2 + N^2)} T^2(r) - \frac{1}{6} \frac{\mathcal{I}(r,s)}{(r^2 + N^2)} \mathcal{T}(r) & \text{(玻色子)}; \end{cases} \quad (22)$$

$$u(r) = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{120} T^4(r) + \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} \frac{NsV^{1/2}(r)}{(r^2 + N^2)} T^3(r) - \frac{1}{24} \frac{\mathcal{I}(r,s)}{(r^2 + N^2)} T^2(r) & \text{(费米子)}, \\ \frac{\pi^2}{15} T^4(r) + \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} \frac{NsV^{1/2}(r)}{(r^2 + N^2)} T^3(r) - \frac{1}{12} \frac{\mathcal{I}(r,s)}{(r^2 + N^2)} T^2(r) & \text{(玻色子)}; \end{cases} \quad (23)$$

$$P(r) = \begin{cases} \frac{7\pi^2}{360} T^4(r) + \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{NsV^{1/2}(r)}{(r^2 + N^2)} T^3(r) - \frac{1}{24} \frac{\mathcal{I}(r,s)}{(r^2 + N^2)} T^2(r) & \text{(费米子)}, \\ \frac{\pi^2}{45} T^4(r) + \frac{\zeta(3)}{\pi^2} \frac{NsV^{1/2}(r)}{(r^2 + N^2)} T^3(r) - \frac{1}{12} \frac{\mathcal{I}(r,s)}{(r^2 + N^2)} T^2(r) & \text{(玻色子)}. \end{cases} \quad (24)$$

这里 $\zeta(3)$ 为 zeta 函数, $\mathcal{T}(r)$ 为局域温度^[17],

$$\mathcal{T}(r) = \frac{1}{\beta \sqrt{V(r)}}. \quad (25)$$

从(22)–(24)式可以看出,轴对称时空 Taub-NUT 黑洞视界附近的热力学量比平直时空的热力学

量^[17–19]多了两项,它除了与黑洞自身的特性及局域温度有关外,还与粒子的自旋有关.

4. 结 论

本文利用 WKB 近似计算了轴对称 Taub-NUT 黑洞事件视界附近自旋场的热力学量. 结果表明熵密度、能量密度和压强这三个热力学量均包含三项. 第一项具有与平直时空相同的形式, 即熵密度与局域温度的三次方成正比, 能量密度和压强与局域温度的四次方成正比; 第二、第三项均有自旋因子 s , 而且熵密度的第二、第三项分别与局域温度的二次方、一次方成正比, 能量密度和压强的第二、第三项与局域温度的三次方、二次方成正比. 这一结果告诉我们

Taub-NUT 黑洞事件视界附近的热力学量除了与局域温度有关外, 还与粒子的自旋有关, 当自旋 s 不同时, 其值也不同. 与文献 [13] 比较后发现 Taub-NUT 时空的热力学量比 Schwarzschild 时空的热力学量均多了一项, 即熵密度的局域温度的二次方项和能量密度、压强的局域温度的三次方项, 这种差异恰好是 Taub-NUT 时空结构的特殊性造成的. 这也进一步证实了量子场与标量场有着不同的热力学特性, 并且不同的时空背景下的自旋场对热力学量的影响是不同的.

本工作得到黎忠恒教授的指导和帮助, 在此表示衷心感谢.

-
- [1] Hawking S W 1974 *Nature* **248** 30
- [2] Luo Z X , Zhu J Y 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 395 (in Chinese) [罗智坚、朱建阳 1999 物理学报 **48** 395]
- [3] Liu W B , Zhao Z 2000 *Phys. Rev. G* **61** 063003
- [4] He H , Zhao Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2661 (in Chinese) [贺 晗、赵 峥 2002 物理学报 **51** 2661]
- [5] Sun M C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1665 (in Chinese) [孙鸣超 2004 物理学报 **53** 1665]
- [6] Carlip S 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 4175
- [7] Das S , Majumdar P , Bhaduri R K 2002 *Class. Quantum Grav.* **19** 2355
- [8] Li Z H 2000 *Phys. Rev. D* **62** 024001
- [9] Jing J L , Yan M L 2001 *Phys. Rev. D* **63** 84028
- [10] Li Z H 2002 *Mod. Phys. Lett. A* **17** 887
- [11] Mi L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2065 (in Chinese) [米丽琴 2004 物理学报 **53** 2065]
- [12] Liu X Y , Xiao S F , Li F Y 2005 *J. Chongqing Univ. (Eng. Ed.)* **4** 243
- [13] Li Z H 2004 *Class. Quantum Grav.* **21** 1181
- [14] Li Z H 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1321
- [15] Mi L Q , Li Z H 2006 *Chin. Phys.* **15** 1184
- [16] Liu X Y , Zhang J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5638 (in Chinese) [刘晓莹、张 甲 2006 物理学报 **55** 5638]
- [17] Tolman R C 1934 *Relativity , Thermodynamics and Cosmology* (Oxford : Oxford University Press)
- [18] Unruh W G , Wald R M 1983 *Phys. Rev. D* **27** 2271
- [19] Demiański M 1985 *Relativistic Astrophysics* (Oxford : Pergamon)
- [20] Carmeli G 1982 *General Relativity and Gauge Theory* (New York : Jone Wiley Sons) p386
- [21] Torres del Castillo G F 1988 *J. Math. Phys.* **29** 2078
- [22] Mukohyama S , Israel W 1998 *Phys. Rev. D* **58** 104005
- [23] Unruh W G , Wald R M 1982 *Phys. Rev. D* **25** 942

Thermodynamic quantities of the spin fields near the event horizon in Taub-NUT spacetime ^{*}

Liu Xiao-Ying[†]

(*Department of Physics ,Zhanjiang Normal College ,Zhanjiang 524048 ,China*)

(Received 30 October 2006 ; revised manuscript received 9 March 2007)

Abstract

The entropy density ,energy density and pressure of the spin fields near the event horizon in Taub-NUT spacetime are investigated by using the Wentzel-Kramers-Brillouin approximation . It is shown that any one of the thermodynamic quantities has three terms . The first term has the same form as that in flat spacetime ,the second and the third terms are spin-dependent terms due to the spin fields .

Keywords : Taub-NUT spacetime , spin field , thermodynamic quantity

PACC : 0470 , 9760L

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10375051).

[†] E-mail : zjxyliu@tom.com