

一类时变非线性振动系统的同步控制方法*

秦卫阳 王红瑾 张劲夫

(西北工业大学工程力学系, 西安 710072)

(2006 年 11 月 12 日收到, 2007 年 4 月 4 日收到修改稿)

对于一类非自治的非线性振动系统, 设计了控制方法并建立了相应的派生系统, 使得派生系统能与原系统达到同步. 利用 Lyapunov 稳定性理论证明了两个系统在一定条件下可以达到同步. 给出了耦合参数的选择条件. 对于含参数激励与强迫激励的 Mathieu 方程以及拟周期激励的 Duffing 方程进行了实际的仿真计算, 证明了派生系统可以与原系统的拟周期、混沌运动快速实现同步.

关键词: 派生系统, 同步, 差别方程

PACC: 0545

1. 引言

自从 Pecora 和 Carroll^[1]首次证明并且实现了两个混沌系统运动的同步以来, 在非线性系统的混沌同步领域已经开展了大量的研究工作. 一些研究集中在混沌系统同步的控制方法和实现条件上^[2-7], 另外一些研究则探索了混沌同步在实际中的应用^[8-10]. 特别是在激光的混沌同步方面已经开展了有意义的实验研究^[11, 12].

实际的非线性振动系统, 一般包含有随时间变化的强迫激励力以及时变的非线性刚度或者阻尼项. 由于这些时变项的存在, 使得非线性振动系统的同步研究比较困难, 目前常用的仍然是一些数值方法.

本文研究了一类非线性时变振动系统的同步问题. 证明了通过耦合可以实现非线性振动系统与派生系统的同步. 给出了建立派生系统的方法以及耦合矩阵的选择方法, 并且对 Mathieu 系统和 Duffing 系统进行了仿真计算.

2. 派生系统的建立与同步

一般的非自治非线性振动方程, 可以写为如下形式:

$$\dot{x} = Ax + f(x, t) + h(t), \quad (1)$$

式中 $f(x, t)$ 表示系统的非线性项, $h(t)$ 一般表示激励项.

对于方程 (1), 可以建立一个派生方程, 通过耦合实现两个系统之间的同步. 建立的派生方程可以写为如下形式:

$$\dot{y} = Ay + f(y, t) + h(t) + K(y - x). \quad (2)$$

如果满足

$$f(y, t) - f(x, t) = G(x, y, t)(y - x), \quad (3)$$

且矩阵范数有界, 即 $\|G(x, y, t)\| < \gamma$, 那么就有

$$\|f(y, t) - f(x, t)\| < \gamma \|y - x\|. \quad (4)$$

可以证明适当选择矩阵 K , 能够使得派生系统与原系统达到同步.

将方程 (2) 减去方程 (1), 可以得到两个系统的差别方程

$$\begin{aligned} \dot{e} &= Ae + f(y, t) - f(x, t) + Ke \\ &= (A + K)e + f(y, t) - f(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

选择 Lyapunov 函数 $V = e^T P e$, 其中 P 为对称正定矩阵, 那么如果存在下列关系:

$$(A + K)^T P + P(A + K) = -Q, \quad (6)$$

就有

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \dot{e}^T P e + e^T P \dot{e} \\ &= [(A + K)e + f(y, t) - f(x, t)]^T P e \\ &\quad + e^T P [(A + K)e + f(y, t) - f(x, t)] \\ &= e^T [(A + K)^T P + P(A + K)]e \\ &\quad + 2e^T P [f(y, t) - f(x, t)] \end{aligned}$$

* 国家自然科学基金(批准号: 10372079)和航空科学基金(批准号: 03C53016)资助的课题.

$$\begin{aligned}
 &= -e^T Q e + 2e^T H [f(y, t) - f(x, t)] \\
 &\leq -e^T Q e + 2\gamma \lambda_{\max}(P) \|e\|^2 \\
 &\leq -\lambda_{\min}(Q) \|e\|^2 \\
 &\quad + 2\gamma \lambda_{\max}(P) \|e\|^2 \\
 &= \mu \|e\|^2.
 \end{aligned} \tag{7}$$

这里 Q 为正定矩阵,

$$\mu = -\lambda_{\min}(Q) + 2\gamma \lambda_{\max}(P).$$

注意到 P 与 K 矩阵可以选择, 也就是可以通过选择 P 与 Q 矩阵, 使得

$$\mu = -\lambda_{\min}(Q) + 2\gamma \lambda_{\max}(P) < 0,$$

即

$$\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} > 2\gamma,$$

那么 $\dot{V} < 0$, 即差别系统的零点是渐近稳定的, 两个系统的响应最终会达到一致, 实现同步.

3. 具体例子的仿真计算

应用上述分析结果, 对有立方非线性、参数激励与强迫激励同时存在的 Mathieu 方程以及拟周期参数激励振动的对称 Duffing 振子进行了仿真计算.

3.1. 立方非线性、参数激励与强迫激励的 Mathieu 方程

考虑含有立方非线性项及时变激励项的 Mathieu 方程^[13]

$$\begin{aligned}
 \ddot{x} + 0.173\dot{x} + (2.62 - 0.456\alpha + 0.456\alpha \cos 2t)x \\
 + 25x^3 = 0.92\alpha(1 - \cos 2t).
 \end{aligned} \tag{8}$$

将方程 (8) 写成状态空间形式, 即

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2, \\
 \dot{x}_2 &= -0.173x_2 - (2.62 - 0.456\alpha \\
 &\quad + 0.456\alpha \cos 2t)x_1 - 25x_1^3 + 0.92\alpha(1 - \cos 2t),
 \end{aligned} \tag{9}$$

则

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2.62 + 0.456\alpha & -0.173 \end{bmatrix}, \\
 f(x, t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.456\alpha \cos 2t \cdot x_1 - 25x_1^3 \end{bmatrix}, \\
 h(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.92\alpha(1 - \cos 2t) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

所以建立的派生方程为

$$\begin{aligned}
 \dot{y}_1 &= y_2 + \beta(y_1 - x_1), \\
 \dot{y}_2 &= -0.173y_2 - (2.62 - 0.456\alpha + 0.456\alpha \cos 2t)y_1
 \end{aligned}$$

$$-25y_1^3 + 0.92\alpha(1 - \cos 2t) + \beta(y_2 - x_2). \tag{10}$$

选择 $Q = I, K = \beta I$, 利用 Matlab 中的 Lyap 函数, 可以求出 P . 如果 $\beta < -5$, P 与 Q 可以满足条件, 此时可以实现两个系统的同步.

具体计算时先不施加控制项, 在不同的初值情况下两个系统的响应完全不同. 然后, 在某一时刻施加控制, 可以观察到派生 Mathieu 系统很快与原 Mathieu 系统同步. 对于方程 (8) 的 Mathieu 系统, 在初值 $x_1|_{t=0} = 0.2, x_2|_{t=0} = -1.05$, 会出现混沌运动, 而在初值 $x_1|_{t=0} = 2, x_2|_{t=0} = 1.2$, 响应为周期运动. 对原 Mathieu 系统取初值 $x_1|_{t=0} = 0.2, x_2|_{t=0} = -1.05$, 对派生 Mathieu 系统取初值 $x_1|_{t=0} = 2, x_2|_{t=0} = 1.2$, 如果不施加控制 ($\beta = 0$), 则原 Mathieu 系统为混沌运动 (图 1), 派生 Mathieu 系统为周期运动 (图 2). 在 $t = 15.8$ s 时开始施加控制 ($\beta = -5.1$), 则两个系统很快达到同步 (图 3).

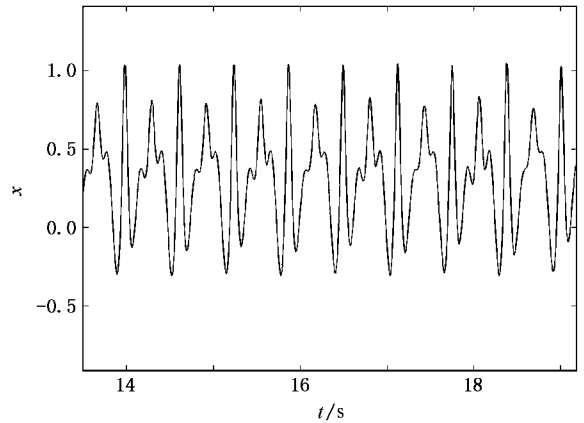


图 1 原 Mathieu 系统 (方程 (8)) 随时间的响应 (混沌运动)

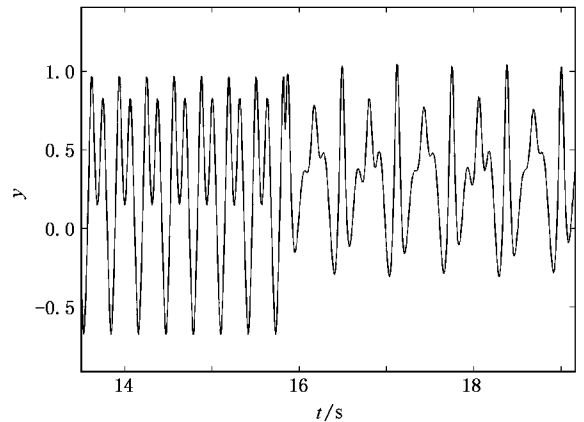


图 2 派生 Mathieu 系统 (方程 (10)) 在 $t = 15.8$ s 时施加控制前后响应变化 (由周期到混沌)

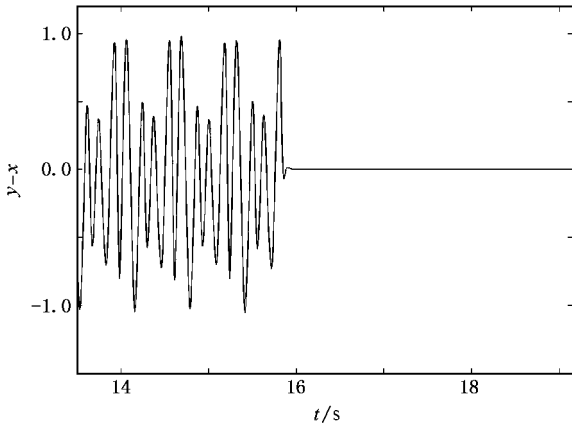


图3 派生 Mathieu 系统(方程(10))响应与原 Mathieu 系统(方程(8))响应在 $t = 15.8\text{ s}$ 控制前后的差别变化

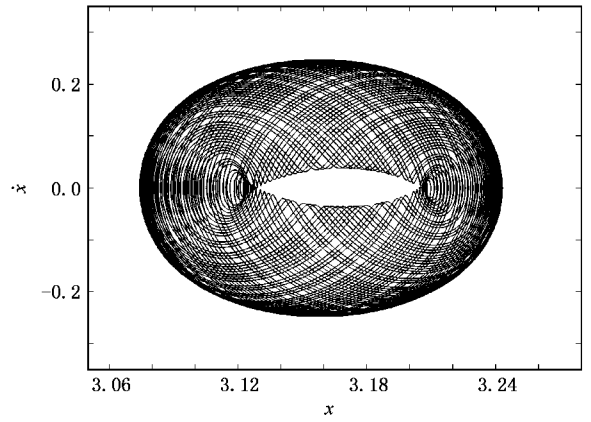


图4 原 Duffing 系统(方程(11))的响应相轨迹图

3.2. 拟周期激励的 Duffing 方程

考虑拟周期激励的 Duffing 方程^[14]

$$\ddot{x} + \varepsilon\delta\dot{x} - (a + \varepsilon f \cos\omega_1 t + \varepsilon f \cos\omega_2 t)x + cx^3 = 0. \quad (11)$$

将方程(11)写成状态空间形式,即

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -\varepsilon\delta x_2 + (a + \varepsilon f \cos\omega_1 t + \varepsilon f \cos\omega_2 t)x_1 - cx_1^3, \end{aligned} \quad (12)$$

则

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & -\varepsilon f \end{bmatrix},$$

$$f(x, t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varepsilon f (\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)x_1 - cx_1^3 \end{bmatrix}.$$

在 $a = 5, \delta = 0.5, c = 0.5, \varepsilon = 0.1, f = 1, \omega_1 = 5, \omega_2 = \sqrt{5}$ 时, Duffing 系统的响应为拟周期运动. 如果选择 $Q = I, K = \beta I$, 建立的派生系统为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + \beta(y_1 - x_1), \\ \dot{y}_2 &= -\varepsilon\delta y_2 + (a + \varepsilon f \cos\omega_1 t + \varepsilon f \cos\omega_2 t)y_1 - cy_1^3 + \beta(y_2 - x_2). \end{aligned} \quad (13)$$

利用方程(6)和 Matlab 的 Lyap 函数可以求出 P . 如果 $\beta < -6, P$ 与 Q 满足条件, 可以实现两个系统的同步.

具体仿真计算时, 取原 Duffing 系统(方程(12))的初值 $x_1|_{t=0} = 3.17, x_2|_{t=0} = 0.038$, 则系统响应为拟周期运动(图4). 对派生 Duffing 系统(方程(13))取初值 $y_1|_{t=0} = -0.2, y_2|_{t=0} = 0$, 则系统响应也为拟周期运动(图5). 比较图4与图5可以看出, 两个系统的相平面图有明显的差异, 而且它们的横坐标

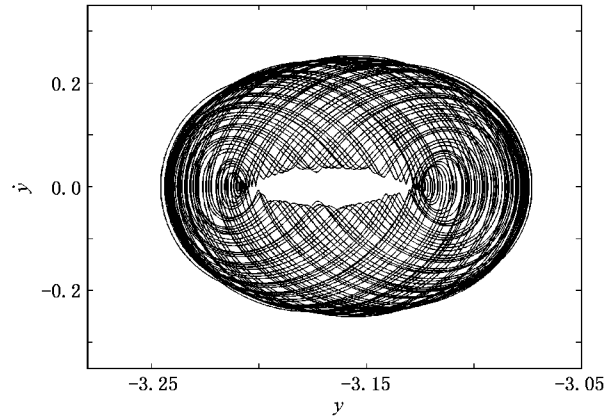


图5 派生 Duffing 系统(方程(13))的响应在未控制时的相轨迹图

差别很大, 可以判断它们之间没有达到同步. 先不对派生 Duffing 系统施加控制, 然后在某一时刻 t 施加控制, 可以观察到两个系统很快达到同步. 图6显示的是在 $t = 43.3\text{ s}$ 施加控制后, 派生 Duffing 系统与原 Duffing 系统响应之间差别随时间的变化. 从图6

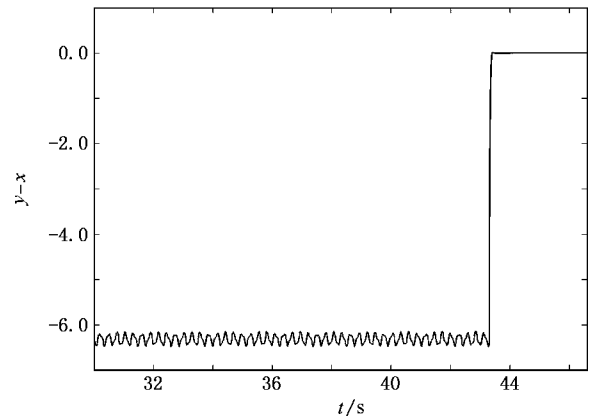


图6 派生 Duffing 系统(方程(13))与原 Duffing 系统(方程(11))在 $t = 43.3\text{ s}$ 施加控制前后的响应差别变化

可以看出,在未施加控制时两个系统响应的差别很大(- 6.0— - 7.0 之间),而在施加控制后这两个系统响应的差别很快趋近于零,显示两个系统达到了同步.

4. 结 论

通过以上分析以及对于 Mathieu 系统与 Duffing 系统的仿真计算结果,可以得到下列结论:

1)对于含有时变项的非线性强迫振动系统,可以通过原系统与派生系统的单向耦合,实现两个系统的同步.

2)这种方法可以实现两个系统任何形式运动的同步,包括拟周期、混沌运动的同步.

3)耦合矩阵的选择可以有多种形式,甚至可以选择为对角阵的形式.耦合参数的选择范围比较大,易于实现,施加控制后的派生系统能够很快达到与原系统同步,并且保持稳定.

-
- [1] Pecora L M ,Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [2] Yanchuka S ,Maistrenko Y ,Mosekilde E 2003 *Chaos* **13** 388
- [3] Guan S G ,Li K ,Lai C H 2006 *Chaos* **16** 023107
- [4] Liu Z Z ,Tian Y T ,Song Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3945 (in Chinese)[刘振泽、田彦涛、宋 彦 2006 物理学报 **55** 3945]
- [5] Li F ,Hu A H ,Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 590 (in Chinese) [李 芳、胡爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]
- [6] Chen B ,Liu G H ,Zhang Y ,Zhou Z O 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5039 (in Chinese)[陈 滨、刘光祜、张 勇、周正欧 2005 物理学报 **54** 5039]
- [7] Liu Z R 2004 *Nat. Mag.* **26** 298 (in Chinese)[刘曾荣 2004 自然杂志 **26** 298]
- [8] Ge Z M ,Wu H W 2003 *J. Sound Vib.* **259** 585
- [9] Moez F 2003 *Chaos Soliton Fract.* **18** 141
- [10] Wang S H ,Liu W Q , Ma B J , Xiao J H , Jiang D Y 2005 *Chin. Phys.* **14** 55
- [11] Terry J R ,Thornburg K S ,DeShazer J D J , Van Wiggeren G D , Zhu S Q , Ashwin P 1999 *Phys. Rev. E* **59** 4036
- [12] Zhu S Q ,Luo X Q ,Fang J X 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 727
- [13] Hong L ,Xu J X 2001 *Acta Mech. Sin.* **33** 423 (in Chinese)[洪 灵、徐健学 2001 力学学报 **33** 423]
- [14] Chen L Q 1995 *Shanghai J. Mech.* **16** 35 (in Chinese)[陈立群 1995 上海力学 **16** 35]

Synchronization of a class of time-varied nonlinear vibration system *

Qin Wei-Yang Wang Hong-Jin Zhang Jin-Fu

(Department of Engineering Mechanics ,Northwestern Polytechnical University ,Xi'an 710072 ,China)

(Received 12 November 2006 ; revised manuscript received 4 April 2007)

Abstract

For a class of nonautonomous nonlinear vibration system ,a corresponding derived system is constructed. A novel control method to realize the synchronization between the derived and the original system is presented. The method is proved by Lyapunov stability theory. The principle for choosing coupling parameters is given. For a Mathieu system excited by parameters and external force ,the simulation is carried out. The result shows that the derived system can achieve fast synchronization with the original system under the action of chaos. The simulation for Duffing system excited by quasi-periodic force shows that the derived system can reach synchronization with the original system under the quasi-periodic motion.

Keywords : derived system , synchronization , difference equation

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10372079) and the Aeronautical Science Foundation of China (Grant No. 03C53016).