

# 统一混沌系统的状态 Riccati 方程同步法\*

单 梁<sup>1)</sup> 梁 彦<sup>2)</sup> 李 军<sup>1)</sup> 王执铨<sup>1)</sup>

1) 南京理工大学自动化学院, 南京 210094)

2) 南京理工大学电子工程与光电技术学院, 南京 210094)

(2006 年 12 月 12 日收到, 2007 年 3 月 30 日收到修改稿)

利用改进的状态 Riccati 方程法, 实现了统一混沌系统的状态同步控制. 具有给定稳定度的状态调节器改善了系统同步过程的动态性能. 理论推导和仿真实验均说明误差系统是渐近稳定的, 与传统状态 Riccati 方程法的对比仿真实验表明, 系统同步的动态性能得到了改善.

关键词: 统一混沌系统, 混沌同步, 状态 Riccati 方程

PACC: 0545

## 1. 引 言

2002 年, 吕金虎、陈关荣<sup>[1,2]</sup>提出了一个新的混沌系统——统一混沌系统, 这一系统连接了 Lorenz 吸引子和 Chen 吸引子. 统一混沌系统填补了两个对偶混沌系统 Lorenz 系统<sup>[3]</sup>和 Chen 系统<sup>[4]</sup>连接上的空白<sup>[1,2]</sup>. 对于统一混沌系统动力学行为和控制方法的研究, 不仅有利于理解 Lorenz 系统、Chen 系统和 Lü 系统的本质特性, 而且对于一般的三维二次自治系统的混沌生成、混沌控制和同步都有着十分重要的理论意义. 统一混沌系统的同步控制是近几年混沌同步控制研究中的一个热点问题. 研究者采用反馈同步法<sup>[5-7]</sup>、耦合同步法<sup>[8-10]</sup>、广义同步法<sup>[11]</sup>、自适应同步法<sup>[12]</sup>等实现了统一混沌系统的同步控制.

在混沌同步控制方法研究中, 有些方法设计的控制器过于复杂, 以致实际工程中难以实现. 长期的控制理论研究发现, 线性二次型问题的最优解具有统一的解析表达式, 且可获得一个简单的状态线性反馈控制律, 便于计算和实现闭环反馈控制, 因此引起了控制工程界的极大关注, 成为最优控制理论及应用中最成熟的部分<sup>[13-16]</sup>. 线性二次型最优控制的基本内容可以分为: 最优状态调节、最优输出调节和最优跟踪. 最优输出调节和最优跟踪问题都可以化为最优状态调节问题. 对于最优状态调节器问题, 通过求解状态 Riccati 方程 (state-dependent Riccati

equation, 简记为 SDRE) 来判断最优解的存在性. 在最新的研究中, SDRE 方法已经开始应用于非线性系统的控制中<sup>[13-16]</sup>.

本文从实际工程观点出发, 希望最优调节系统的特征值位于复平面的一定区域内 (例如在  $S$  平面上特征值具有负实部, 位于虚轴左侧的那部分区域内, 即  $\text{Re } s = -\epsilon, \epsilon > 0$ ). 这样, 渐近稳定的最优调节系统可以具备预定的动态性能. 因此本文提出了改进的 SDRE 方法, 利用具有给定稳定度的状态调节器, 实现了统一混沌系统的状态同步. 理论推导和仿真实验均说明误差系统是渐近稳定的, 与传统 SDRE 方法的对比实验也验证统一混沌系统同步的动态性能得到了改善.

## 2. 统一混沌系统 SDRE 同步条件的推导

统一混沌系统的数学模型为<sup>[1,2]</sup>

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (25\alpha + 10) x_2 - x_1, \\ \dot{x}_2 &= (28 - 35\alpha) x_1 + (29\alpha - 1) x_2 - x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 x_2 - (8 + \alpha) x_3 / 3, \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $\alpha$  为系统参数, 当  $\alpha \in [0, 1]$  时系统均为混沌态. 当  $\alpha \in [0, 0.8]$  时, 统一系统属于广义 Lorenz 系统; 当  $\alpha \in [0.8, 1]$  时, 统一系统属于广义 Chen 系统;  $\alpha = 0.8$  属于广义 Lü 系统. 理论分析和数值实验表明, 相比于 Lorenz 吸引子, Chen 吸引子具有类似但不相同、而且是更为复杂的拓扑结构和动力学性

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60574082) 资助的课题.

质,统一混沌系统本质上是 Lorenz 系统和 Chen 系统的凸组合,代表了由中间无穷多个混沌系统组成的整个族,具有连接 Lorenz 系统和 Chen 系统的重要作用<sup>[1,2]</sup>.

当参数  $\alpha$  由 0 增加到 1 时,系统(1)由 Lorenz 吸引子穿过临界吸引子然后连续演变到 Chen 吸引子.当  $\alpha = 0.8$  时,统一混沌系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  达到 Lyapunov 指数谱的最高峰,  $\lambda_{\max} = 2.39607$ .

SDRE 方法可以方便有效地求取控制律,参数  $(A(x), B(x))$  可以有无穷多组选择,只要保证系统是逐点稳定即可.在应用 SDRE 方法实施控制的过程中,主要任务是求取状态 Riccati 方程的可行解,使用 Matlab 工具箱可以方便地求取解值,求解过程完全可以在线实时进行.SDRE 控制方法的另一个优点是:通过调整  $Q(x)$  和  $R(x)$ ,可以直接控制系统性能,并可以使系统表现出不同的被控行为,供实际需求选择.虽然 SDRE 方法源于线性系统控制理论,但是对于非线性系统,并不需要像模糊 Takagi-Sugeno 方法一样进行线性重构,只需简单地改写为貌似线性系统的数学形式即可,研究者称其为外观线性化(apparent linearization)<sup>[13,14]</sup>. Jayaram 等<sup>[16]</sup>用 SDRE 方法实现了 Lorenz 系统和 Hénon-Helies 系统的同步控制.

SDRE 方法源于线性系统的控制,设线性定常系统形式为

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= AX(t) + BU(t), \\ X(0) &= X_0; \end{aligned} \quad (2)$$

性能指标为

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} [X^T(t)QX(t) + rU^T(t)U(t)] dt. \quad (3)$$

这里  $X(t) \in R^n$ ,  $U(t) \in R^m$  且无约束,矩阵  $A, B$  为适当维数的常阵,  $Q$  为适当维数的非负定矩阵,  $r$  为

正常数.若阵对  $\{A, B\}$  完全可控,阵对  $\{C, A\}$  完全可观,  $C$  为任一使  $CC^T = Q$  的矩阵,存在唯一最优控制

$$U^*(t) = -r^{-1}B^T P X(t). \quad (4)$$

这是下列 Riccati 代数方程的唯一解:

$$PA + A^T P - r^{-1}PBB^T P + Q = 0, \quad (5)$$

式中  $P$  为正定对称矩阵.

考虑如下非线性系统:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= A(t, X(t))X(t) + BU(t), \\ X(0) &= X_0. \end{aligned} \quad (6)$$

可将(6)式中的  $A(t, X(t))$  简记为  $A(X)$ .

引理 1<sup>[14,15]</sup> 假设非线性系统(6)中,所有函数是连续光滑的,矩阵  $A(X)$  也是连续光滑的,同时阵对  $\{A(X), B\}$  在所有时刻都是逐点可控的,  $\{C, A(X)\}$  在所有时刻都是逐点可观的,则利用(4)和(5)式 SDRE 方法控制的系统(6)是局部渐近稳定的.

以统一混沌系统(1)作为驱动系统,采用驱动-响应的同步思路,设计响应系统结构为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (25\alpha + 10)(y_2 - y_1) + u_1, \\ \dot{y}_2 &= (28 - 35\alpha)y_1 + (29\alpha - 1)y_2 \\ &\quad - y_1 y_3 + u_2, \\ \dot{y}_3 &= y_1 y_2 - (8 + \alpha)y_3/3 + u_3. \end{aligned} \quad (7)$$

令误差系统  $E = Y - X$ , 于是驱动系统(1)和响应系统(7)的误差为

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= (25\alpha + 10)(e_2 - e_1) + u_1, \\ \dot{e}_2 &= (28 - 35\alpha)e_1 + (29\alpha - 1)e_2 \\ &\quad - e_1 e_3 - e_1 x_3 - x_1 e_3 + u_2, \\ \dot{e}_3 &= e_1 e_2 + e_1 x_2 + x_1 e_2 \\ &\quad - (8 + \alpha)e_3/3 + u_3. \end{aligned} \quad (8)$$

对(8)式进行外观线性化处理,得到以下形式:

$$\dot{E} = \begin{bmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \\ \dot{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(25\alpha + 10) & (25\alpha + 10) & 0 \\ (28 - 35\alpha) - e_3 - x_3 & (29\alpha - 1) & -x_1 \\ e_2 + x_2 & x_1 & -(8 + \alpha)/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

记

$$\begin{aligned} A(X) &= \begin{bmatrix} -(25\alpha + 10) & (25\alpha + 10) & 0 \\ (28 - 35\alpha) - e_3 - x_3 & (29\alpha - 1) & -x_1 \\ e_2 + x_2 & x_1 & -(8 + \alpha)/3 \end{bmatrix}, \\ U &= [u_1 \quad u_2 \quad u_3]^T. \end{aligned}$$

于是针对误差系统(9),设计具有给定稳定度  $\epsilon$  的无限时间状态调节器问题,其最优性能指标为

$$J_{\min} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{2\epsilon t} [E^T Q E + r U^T U] dt, \quad (10)$$

式中  $Q$  为适当维数的非负定矩阵,  $r$  为正常数.

若  $C$  为任一使  $CC^T = Q$  的矩阵,阵对  $\{A(X) + \epsilon I, B\}$  完全可控,  $\{C, A(X) + \epsilon I\}$  完全可观,则存在唯一最优控制

$$U^*(t) = -r^{-1} B^T P E(t). \quad (11)$$

这是下列 Riccati 代数方程的唯一解:

$$P(A(X) + \epsilon I) + (A(X)^T + \epsilon I)P - r^{-1} P B B^T P + Q = 0, \quad (12)$$

式中  $P$  为正定对称矩阵.

取  $B = [0 \ 1 \ 0]^T, C = [0 \ 0 \ 1]$ , 令  $A_1(X) = A(X) + \epsilon I$ , 于是有

$$[B|A_1(X)B|A_1(X)^2 B] = \begin{bmatrix} 0 & 25\alpha + 10 & (25\alpha + 10)(4\alpha - 11 + 2\epsilon) \\ 1 & 29\alpha - 1 + \epsilon & \phi_1(25\alpha + 10) + (29\alpha - 1 + \epsilon)^2 - x_1^2 \\ 0 & x_1 & \phi_2(25\alpha + 10) + (86\alpha - 11 + 6\epsilon)x_1/3 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$[C^T|(CA_1(X))^T|(CA_1(X))^2]^T = \begin{bmatrix} 0 & \phi_2 & (6\epsilon - 76\alpha - 38)\phi_2/3 + x_1\phi_1 \\ 0 & x_1 & (25\alpha + 10)\phi_2 + x_1(86\alpha - 11 + 6\epsilon)/3 \\ 1 & -(8 + \alpha)/3 + \epsilon & -x_1^2 + (8 + \alpha - 3\epsilon)^2/9 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

式中

$$\phi_1 = 28 - 35\alpha - \epsilon_3 - x_3,$$

$$\phi_2 = \epsilon_2 + x_2.$$

当  $\alpha \in [0, 1]$  时系统(1)处于混沌状态,选择  $\epsilon = 0, 1, 2, 3$  时(12)和(13)式在任一时刻均是满秩的,于是  $\{A(X) + \epsilon I, B\}$  和  $\{C, A(X) + \epsilon I\}$  也是满秩的,保证系统(9)是局部渐近稳定的.因此利用 SDRE 方法,依照(11)和(12)式获得同步控制量,实现系统(1)和(7)的渐近同步.

需要指出的是,矩阵  $B, C$  的选择是与统一混沌系统结构紧密相关的.例如,选择  $B = [1 \ 0 \ 0]^T$  等形式时,无法保证阵对  $\{A(X) + \epsilon I, B\}$  完全可控,阵对  $\{C, A(X) + \epsilon I\}$  完全可观.同时,稳定度参数  $\epsilon$  的选择也会改变系统的可控可观性.针对(11)和(12)式,当  $\epsilon > 3.4$  时会出现不满秩的情况.因此,SDRE 方法应用于其他混沌系统同步控制时,必须根据具体的系统结构特点,选择合适的矩阵  $B, C$  和稳定度参数  $\epsilon$ .

### 3. 仿真实验

仿真实验目的在于验证基于 SDRE 的统一混沌系统同步方法的有效性.同步过程对系统的初值没有特殊要求,图1—图8均设定驱动系统(6)和响应系统(7)的初值为(5, 6, 7)和(1, 2, 3),龙格-库塔函

数步长取 0.01. SDRE 方法中取  $B = [0 \ 1 \ 0]^T, C = [0 \ 0 \ 1]$  给定稳定度  $\epsilon = 3$ ,图1和图2取参数  $\alpha = 0.5$ ,图3和图4取参数  $\alpha = 0.9$ .  $B = [0 \ 1 \ 0]^T$  时控制量仅有  $u_2(t)$ ,控制量  $u_1(t) = u_3(t) = 0$ .

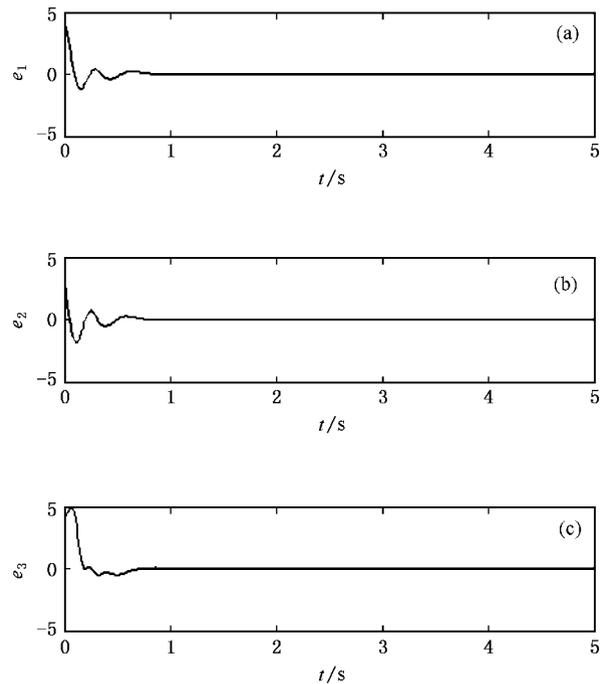


图1  $\alpha = 0.5, \epsilon = 3$  同步误差曲线 (a) 误差信号  $e_1$  (b) 误差信号  $e_2$  (c) 误差信号  $e_3$

为了体现稳定度  $\epsilon$  的作用,对比实验中按照文

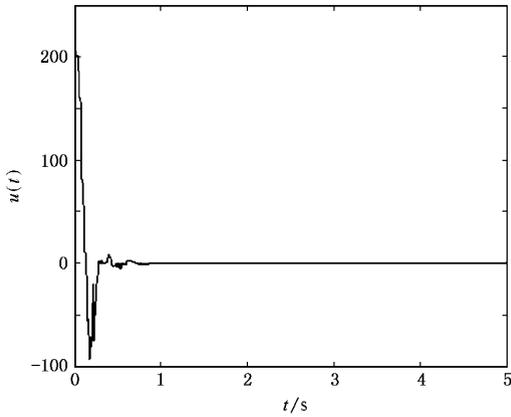


图2  $\alpha = 0.5, \epsilon = 3$  控制量曲线

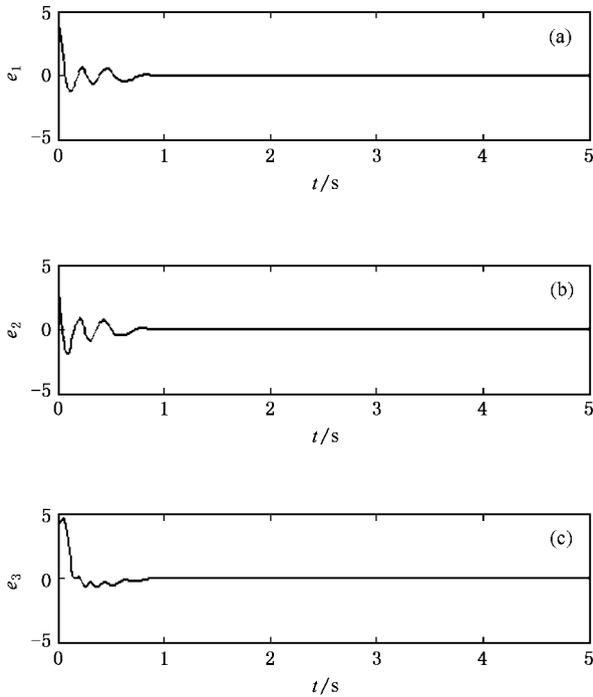


图3  $\alpha = 0.9, \epsilon = 3$  同步误差曲线 (a) 误差信号  $e_1$  (b) 误差信号  $e_2$  (c) 误差信号  $e_3$

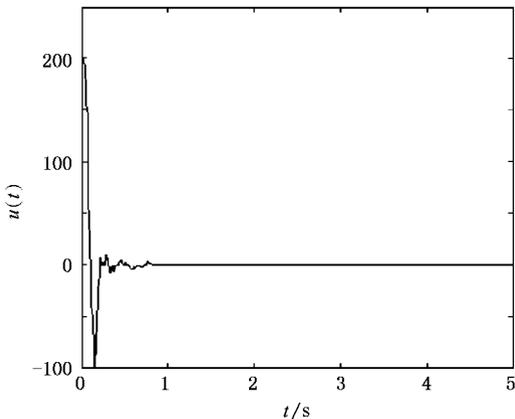


图4  $\alpha = 0.9, \epsilon = 3$  控制量曲线

取  $\epsilon = 0$ . 图 5 和图 6 为  $\alpha = 0.5, \epsilon = 0$  时统一系统的状态误差和控制量  $u(t)$  的曲线. 图 7 和图 8 为  $\alpha = 0.9, \epsilon = 0$  时的误差和控制量  $u(t)$  的曲线. 与图 1—图 4 进行同步结果的对比较可知:  $\epsilon = 0$  时系统的同步时间明显变长, 在 2.5 s 左右才实现了状态完全同步, 同步过程中误差曲线的波动较大, 振荡次数和幅度远大于  $\epsilon = 3$  时的情况, 这一点从控制量  $u(t)$  的曲线中也可以体现出来.

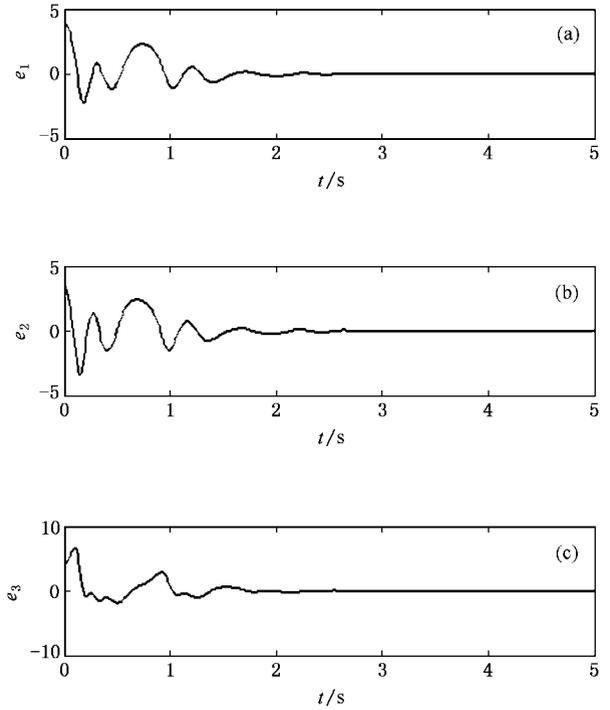


图5  $\alpha = 0.5, \epsilon = 0$  同步误差曲线 (a) 误差信号  $e_1$  (b) 误差信号  $e_2$  (c) 误差信号  $e_3$

分析表明, 统一混沌系统的 SDRF 方法可以实

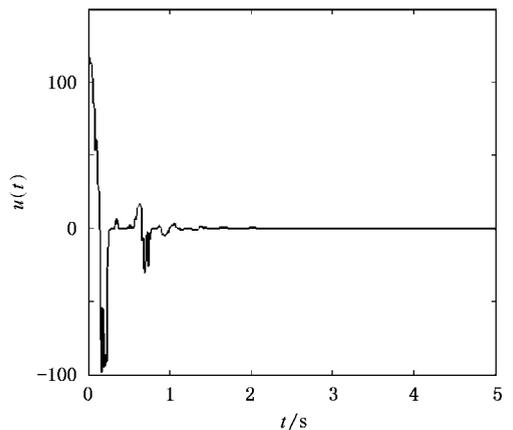


图6  $\alpha = 0.5, \epsilon = 0$  控制量曲线

现误差系统的全局渐近稳定,同步的精度高,同步的建立时间短.适当增大稳定度  $\epsilon$  有利于改善同步的动态过程,加快同步速度.具有给定稳定度的状态调节器使误差系统渐近稳定,并改善了同步的动态性能.

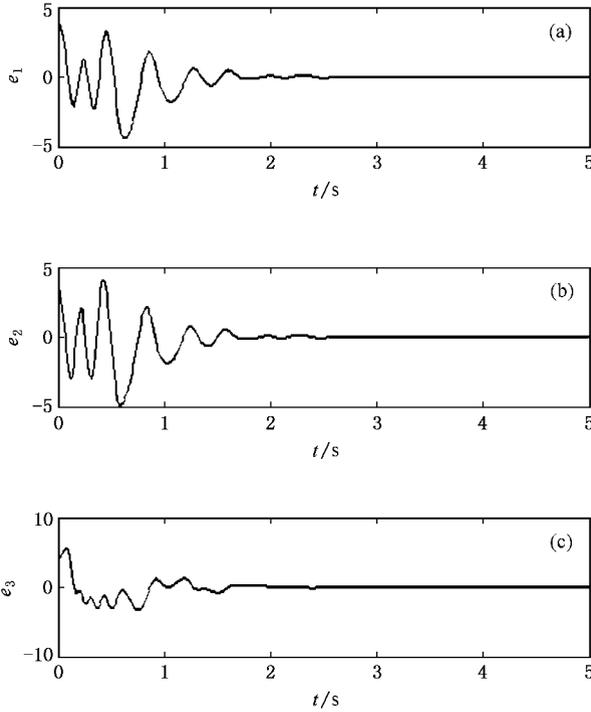


图7  $\alpha = 0.9, \epsilon = 0$  同步误差曲线 (a) 误差信号  $e_1$  (b) 误差信号  $e_2$  (c) 误差信号  $e_3$

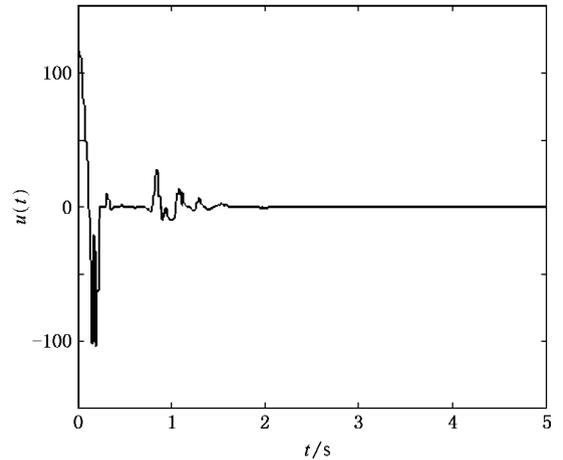


图8  $\alpha = 0.9, \epsilon = 0$  控制量曲线

## 4. 结 论

本文基于给定稳定度的状态调节器原理,提出了统一混沌系统的 SDRE 同步方法.理论分析和对比仿真实验均表明:适当增大稳定度  $\epsilon$  有利于加快同步速度,减小误差系统的超调量,改进的 SDRE 方法改善了系统同步的动态过程.

实验中也发现,当  $\epsilon > 3.4$  时无法求得满足条件的矩阵  $P$ ,从而不存在同步控制的解值.因此,如何选取合适的矩阵参数  $B, C$  和稳定度参数  $\epsilon$ ,改进算法增大稳定度的范围,使同步的动态过程进一步改善,还有待深入研究.

- [ 1 ] Lü J H ,Chen G R ,Cheng D Z 2002 *Int. J. Bifurc. Chaos* **12** 2917
- [ 2 ] Lü J H ,Chen G R ,Yu X 2003 *Discrete Impulsive Syst.* **10** (Supp) 115
- [ 3 ] Wu X J ,Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 [ 武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261 ]
- [ 4 ] Li D Q 2006 *Chin. Phys.* **15** 2541
- [ 5 ] Tao C H ,Lu J A ,Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 ( in Chinese ) [ 陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497 ]
- [ 6 ] Tao C H ,Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5058 ( in Chinese ) [ 陶朝海、陆君安 2005 物理学报 **54** 5058 ]
- [ 7 ] Min F H ,Wang Z Q 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4026 ( in Chinese ) [ 闵富红、王执铨 2005 物理学报 **54** 4026 ]
- [ 8 ] Lü J H ,Zhou T S ,Zhang S C 2002 *Chaos Solitons Fract.* **14** 529
- [ 9 ] Li D M ,Lu J A ,Wu X Q 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 79
- [ 10 ] Ju H P 2005 *Chaos Solitons Fract.* **23** 13195
- [ 11 ] Shan L ,Li J ,Wang Z Q 2004 *Inform. Contr.* **33** 689 ( in Chinese ) [ 单 梁、李 军、王执铨 2004 信息与控制 **33** 689 ]
- [ 12 ] Sun K H ,Chen Z S ,Zhang T S 2005 *Inform. Contr.* **34** 40 ( in Chinese ) [ 孙克辉、陈志盛、张泰山 2005 信息与控制 **34** 40 ]
- [ 13 ] Smereka P 1998 *Physica D* **124** 104
- [ 14 ] Chandrasekar J ,Aaron R ,Dennis S B 2005 *Am. Contr. Conf.* **15** 3630
- [ 15 ] Mracek C P ,Cloutier J R 1998 *Int. J. Robust Nonlin. Contr.* **8** 401
- [ 16 ] Jayaram A ,Tadi M 2006 *Chaos Solitons Fract.* **28** 707

# State-dependent Riccati equation synchronization method of unified chaotic system \*

Shan Liang<sup>1)</sup> Liang Yan<sup>2)</sup> Li Jun<sup>1)</sup> Wang Zhi-Quan<sup>1)</sup>

1 *School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*

2 *School of Electronic Engineering and Optoelectronic Technology, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*

( Received 12 December 2006 ; revised manuscript received 30 March 2007 )

## Abstract

Using improved state-dependent Riccati equation method, the state synchronization of unified chaotic systems is achieved. The state adjusters with given stability improve the dynamic performance of system synchronization. Theoretical deduction and simulation researches show that the error systems are asymptotically stable. The comparative simulations with the traditional state-dependent Riccati equation method verify the improvement in dynamic performance of system synchronization.

**Keywords** : unified chaotic system , chaotic synchronization , state-dependent Riccati equation

**PACC** : 0545