

随机共振控制的频率匹配方法*

林 敏† 毛谦敏 郑永军 李东升

(中国计量学院计量技术工程学院 杭州 310018)

(2006 年 9 月 22 日收到, 2006 年 12 月 14 日收到修改稿)

根据非线性双稳系统在噪声和弱周期信号作用下产生随机共振的随机同步条件, 提出了随机共振控制的频率匹配方法. 理论分析和数值仿真结果表明, 随机共振是可控制的, 通过控制输入信号的频率和噪声的统计特性, 不仅能拓宽产生随机共振的频率范围, 而且能增强共振的强度, 从而实现有更多的噪声能量转换为信号能量.

关键词: 随机共振, 非线性双稳系统, 频率匹配, 控制

PACC: 0250, 0545

1. 引 言

随机共振是噪声、微弱周期信号与非线性系统协同作用所产生的, 具有能量由噪声部分向周期信号部分转移的机理和抑制噪声的作用^[1]. 利用随机共振不仅能提取而且还能增强微弱的周期信号. 随机共振现象的产生是基于噪声诱导的跃迁与外作用周期信号的随机同步. 传统的随机共振是将功率谱、信噪比等量作为噪声强度的函数所呈现出的非单调性, 在许多情况下, 作用到双稳系统的噪声强度并不是任意可控的, 即使通过调节噪声强度来控制噪声诱导的 Kramers 逃逸率使其与周期信号的频率相匹配, 其调节的范围也是极其有限的, 而对随机共振效应的控制更是无能为力.

近年来, 人们对随机共振进行了大量的理论和实验研究^[2-4], 但这些研究大多只涉及噪声强度对共振的影响. 为了增强或抑制双稳系统输出信号的功率谱, 人们提出了谐波混频等方法^[5-7], 采用调节相位差改变双稳系统的势垒高度来控制随机共振. 本文根据非线性双稳系统在噪声和周期信号作用下的随机同步条件^[8-12]和绝热近似理论, 分析了作用到双稳系统的输入信号频率和噪声强度对随机共振的产生及共振强烈程度的影响, 提出了采用频率匹配控制随机共振的方法. 理论分析和数值仿真结果表明, 随机共振是可控制的.

2. 随机共振控制原理

2.1. 双稳随机共振模型

作为研究随机共振的经典模型, 考虑一维动力学系统

$$\frac{dx}{dt} = -V'(x) + A \cos(\omega_0 t) + N(t), \quad (1)$$

式中 $V(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{x^4}{4}$ 是双势阱函数, $N(t)$ 是均值为零、自相关函数 $N(t)N(0) = 2D\delta(t)$ 的高斯白噪声, D 代表噪声强度. (1) 式描述了处于双势阱中的粒子受到随机力和周期信号作用时, 在过阻尼条件下的运动方程. 根据 Kramers 逃逸率理论, 粒子在两个势阱间的跃迁率为

$$r_k(D) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a}{4D}}. \quad (2)$$

根据绝热近似理论, 双稳系统输出的功率谱可表示为^[1, 13]

$$S(D, \omega) = S_1(D, \omega) + S_2(D, \omega), \quad (3)$$

式中

$$S_1(D, \omega) = \frac{\pi}{2} \frac{A^2 a^3}{D^2} \frac{4r_k^2}{4r_k^2 + \omega^2} \delta(\omega - \omega_0),$$

$$S_2(D, \omega) \approx \frac{4ar_k}{4r_k^2 + \omega^2},$$

可见, 与输入信号同频的谱 $S_1(\omega)$ 来源于输出信号,

* 国家自然科学基金(批准号: 60671052, 50675214)资助的课题.

† E-mail: linm@cjl. edu. cn

而 $S_2(\omega)$ 则是来源于输出噪声, 且具有洛伦兹分布形式, 说明频谱能量均匀分布的白噪声经过非线性双稳系统作用后, 谱结构发生变化, 不再是均匀分布, 而是向低频区集中. 因此, 能够产生随机共振谱峰的频带, 将局限在系统输出功率谱的低频段. 因为只有在一定噪声能量的驱动下, 布朗粒子才能越过势垒在双稳系统的两势阱之间以信号频率作切换的跃迁运动, 形成随机共振现象. 如能使噪声的能量进一步向低频段集中, 而作用到双稳系统的周期信号的频率也进入噪声能量集中的低频区域, 则在双稳系统内不仅容易产生随机共振, 而且能使所产生的共振效应更加强烈.

2.2. 随机共振的控制

在双稳系统中存在着两种时间尺度, 一是噪声控制的特征时间尺度, 二是作用到双稳系统的周期信号的周期. 随机共振可看作满足时间匹配条件时所产生的共振现象. 通过调节噪声强度 D , 可改变特征时间尺度, 其定量关系由 (2) 式确定. 由于 (2) 式的逃逸率 $r_k(D) \leq \frac{a}{\sqrt{2\pi}}$ 是受限的, 因而通过调节 D 并不总能使得噪声控制的特征时间尺度与作用到系统的周期信号的周期相匹配, 因此也就不可能产生共振现象. 反之, 通过引入共振控制器, 使作用到双稳系统的频率成分与粒子在两个势阱间的跃迁率相匹配而达到随机同步, 就能在双稳系统中产生随机共振. 如图 1 所示是随机共振控制原理图, 共振控制

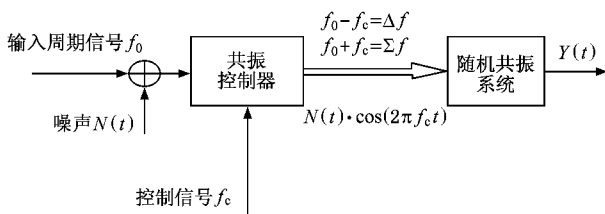


图 1 随机共振控制原理图

器通过对含噪的输入周期信号的作用: 1) 产生不同的频率成分; 2) 改变噪声的统计特性. 共振控制器的作用可用如下关系表示:

$$\begin{aligned} & [A \cos(2\pi f_0 t) + N(t)] \cdot \cos(2\pi f_c t) \\ &= \frac{A}{2} \cos(2\pi \cdot \Delta f \cdot t) + \frac{A}{2} \cos(2\pi \cdot \Sigma f \cdot t) \\ &+ N(t) \cos(2\pi f_c t), \end{aligned} \quad (4)$$

(4) 式产生了低、高两种新的频率成分, 并使白噪声

的有效强度降为原来的 $1/2$, 新的低频成分的形成和噪声强度的变化对随机共振起着决定性的作用^[14]. 通过调节控制信号的频率 f_c 总能使 $\Delta f \sim r_k$ 而满足时间匹配条件产生随机共振. 经共振控制器作用后形成的频率与原输入信号频率 f_0 的关系为

$$(f_0 - f_c = \Delta f) < f_0 < (f_0 + f_c = \Sigma f). \quad (5)$$

根据 (3) 式, 输出信号功率

$$P_s = \int_0^\infty S_1(\omega) d\omega = \frac{\pi}{2} \frac{A^2 a^3}{D^2} \frac{4r_k^2}{4r_k^2 + \omega^2}.$$

双稳系统在不同频率信号作用下的输出信号功率有如下关系:

$$\begin{aligned} P_s(2\pi \cdot \Delta f) &\gg P_s(2\pi \cdot f_0) \\ &\gg P_s(2\pi \cdot \Sigma f), \end{aligned} \quad (6)$$

而高斯白噪声经共振控制器作用后仍然是高斯白噪声^[14], 但噪声的有效强度变为原来的 $1/2$, 使得与噪声强度相关的逃逸率发生了变化

$$r_k(D/2) < r_k(D), \quad (7)$$

则共振控制器对输出噪声功率谱的影响具有如下关系:

$$\begin{aligned} S_2(D/2, \Delta f) &= \frac{4a \cdot r_k(D/2)}{4r_k^2(D/2) + (2\pi \cdot \Delta f)^2} \gg S_2(D, f_0) \\ &= \frac{4a \cdot r_k(D)}{4r_k^2(D) + (2\pi f_0)^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

可见, 输出噪声的频谱进一步向低频区集中, 噪声能量向低频区的聚集, 为布朗粒子越过势垒提供了更大的驱动能量, 使得系统在低频区产生共振存在着“一触即发”之势, 一旦输入信号的频率与之相匹配, 极易产生共振.

因此, 共振控制器既改变了作用到双稳系统的频率成分, 又降低了噪声的有效强度, 使双稳系统在低频区不仅容易产生随机共振, 而且所产生的共振效应也更加强烈. 只要调节控制信号的频率 f_c , 就能有效地控制随机共振.

3. 数值研究与分析

3.1. 输入信号直接作用到随机共振系统

3.1.1. 输入信号频率较高

对于由 (1) 式确定的随机共振系统, 若系统参数 $a = 0.3$, 输入周期信号的幅值取 $A = 0.05$, 则对输入频率 f_0 较高的信号, 由于受噪声强度 D 与逃逸率 r_k

关系的制约, 无论怎样调节噪声强度 D 的大小, 都不可能产生与输入信号同步的共振现象. 如图 2 所示, 是输入频率 f_0 为 5 Hz, 噪声强度分别 $D = 0.72$, $D = 1.445$ 和 $D = 5.12$ 时的输出响应, 可见无论怎样调节噪声强度, 都不可能使得 r_k 与 f_0 匹配而达到随机同步, 从而也就不可能产生随机共振. 图 2 (a) 是由于噪声太弱不能在两势阱间跃迁 (b) 噪声强度虽能产生跃迁, 但跃迁率极小 (c) 噪声强度较大诱导了较高的跃迁率, 但跃迁率还远小于输入信号的变化频率, 因而不可能达到随机同步. 因此, 通过调节噪声强度 D 产生的随机共振其适用的对象是极其有限的.

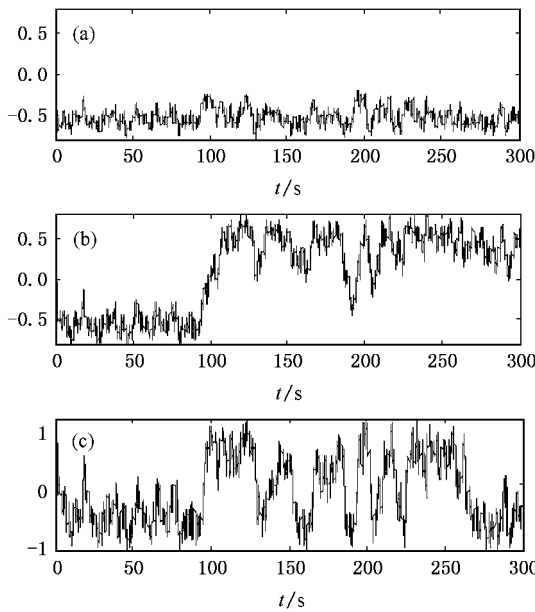


图 2 较高频率 $f_0 = 5$ Hz 时输入信号产生的输出响应 (a) $D = 0.72$ (b) $D = 1.445$; (c) $D = 5.12$

3.1.2. 输入信号频率较低

当输入信号频率较低时, 通过调节噪声强度 D 能产生随机共振. 如图 3 所示, 当输入信号频率 $f_0 = 0.001953$ Hz, 调节噪声强度能使逃逸率 r_k 与输入信号频率相匹配而达到随机同步. 图 3 (a) 是噪声强度较小时, 噪声诱导的逃逸率小于输入信号频率. 图 3 (b) 是适量的噪声强度, 噪声诱导的跃迁率与输入信号频率匹配而达到随机同步. 图 3 (c) 是噪声强度较大时, 逃逸率大于输入信号频率.

3.2. 共振控制器的作用

3.2.1. 随机同步的实现

当输入信号的频率较高时, 如直接作用到双稳

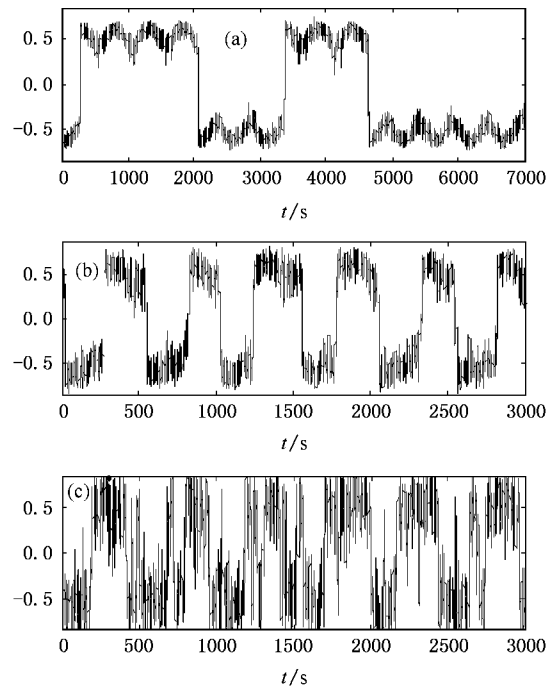


图 3 低频信号与不同噪声强度作用下的输出响应 (a) $D = 0.0072$ (b) $D = 0.045$; (c) $D = 0.18$

系统难以产生随机共振, 即使能产生共振其效应也是极其微弱的. 通过调节共振控制器的控制信号频率 f_c , 可改变作用到双稳系统的噪声的统计特性和信号的频率成分, 如图 4 所示是输入信号频率 $f_0 = 5$ Hz 时通过共振控制器作用后双稳系统产生的输出, 图 4 (a) (b) (c) 分别对应 $(f_0 - f_c) < r_k$, $(f_0 - f_c) \sim r_k$, $(f_0 - f_c) > r_k$ 三种情况. 可见, 调节共振控制器的控制频率 f_c 能使 $(f_0 - f_c) \sim r_k$ 达到随机同步而产生共振.

对于低频输入信号直接作用到双稳系统能产生随机共振, 如图 3 (b) 所示, 但经共振控制作用后, 能使共振的效应更加强烈. 图 5 是输入信号频率为 $f_0 = 0.001953$ Hz 时经共振控制器作用后产生的输出响应. 通过引入双稳系统输出总功率和输出信号功率在总功率中所占的比例, 可定量地反映共振控制器对共振效应的影响, 计算结果表明, 未采用共振控制器时双稳系统的输出总功率为 0.295, 而输出信号功率在总功率中所占的比例为 62.4%, 采用共振器当 $f_0 - f_c = 0.0000458$ Hz 时, 输出总功率变为 0.312, 输出信号功率在总功率中所占的比例高达 77.3%. 可见, 共振控制器能有效地增强输出信号的功率.

3.2.2 噪声与信号的能量转换

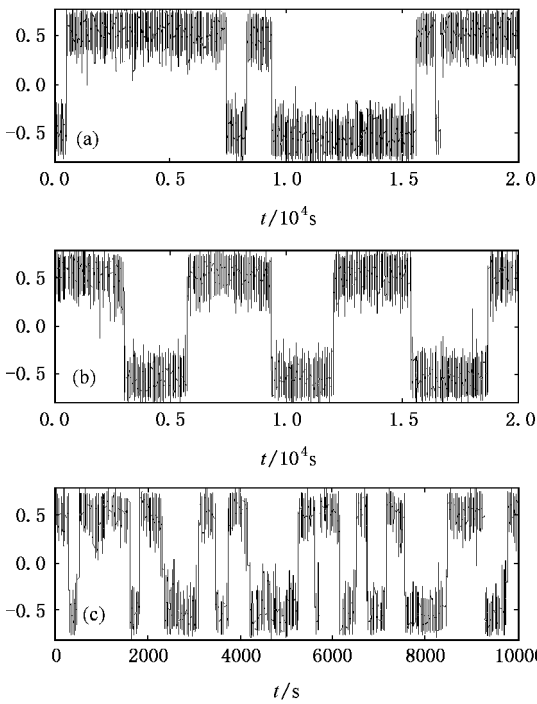


图 4 共振控制器作用后不同控制信号频率下的输出响应 (a) $(f_0 - f_c) < r_k$; (b) $f_0 - f_c \sim r_k$; (c) $f_0 - f_c > r_k$

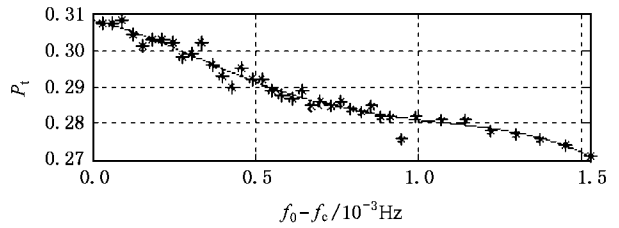


图 6 频率 $f_0 = 5\text{Hz}$ 时, $D = 0.08$, P_t 随 $f_0 - f_c$ 的变化曲线

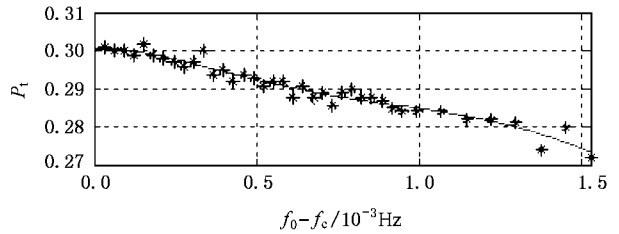


图 7 频率 $f_0 = 5\text{Hz}$ 时, $D = 0.10$, P_t 随 $f_0 - f_c$ 的变化曲线

0.10 时 P_s/P_t 随 $f_0 - f_c$ 的变化. P_s/P_t 对频率的变化比较敏感, 其幅值随着频率呈现出单调下降, 比较图 8 和图 9 可得出低噪声强度和低频有更大的输出信号功率.

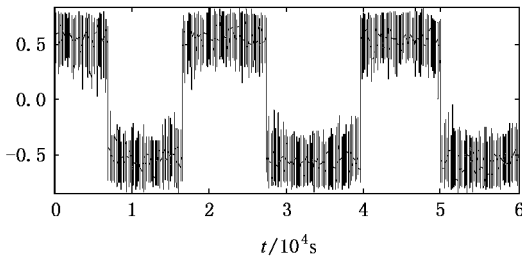


图 5 共振控制器产生更强烈的共振 ($f_0 - f_c = 0.0000458\text{ Hz}$, $D = 0.045$)

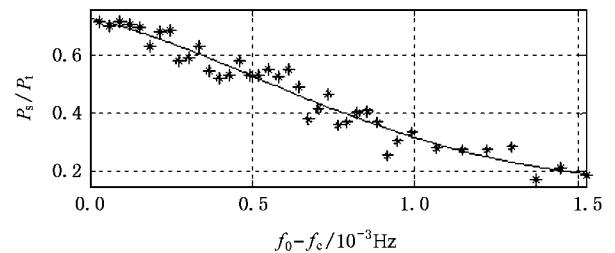


图 8 频率 $f_0 = 5\text{Hz}$ 时, $D = 0.08$, P_s/P_t 随 $f_0 - f_c$ 的变化曲线

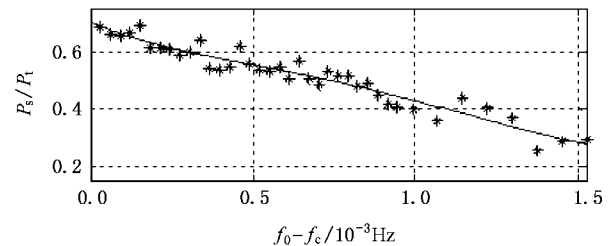


图 9 频率 $f_0 = 5\text{Hz}$ 时, $D = 0.10$, P_s/P_t 随 $f_0 - f_c$ 的变化曲线

记 P_t 为双稳系统的输出总功率, P_s 为输出信号功率, 则 P_s/P_t 为输出信号功率在总输出中所占的比例, 它定量地反映了噪声与周期信号间的能量转换. 图 6、图 7 是输入信号频率 $f_0 = 5\text{ Hz}$, 而噪声强度分别为 $D = 0.08$ 和 $D = 0.10$ 时输出总功率 P_t 随 $f_0 - f_c$ 的变化.

从图中可见, 在低频区域内, 输出总功率随着频率呈现出单调下降. 比较图 6 和图 7 表明在 $0 - 0.5 \times 10^{-3}$ 频率区间低噪声 ($D = 0.08$) 的功率较大, 而在 $0.5 - 1.5 \times 10^{-3}$ 区间低噪声的功率又较小, 反映了噪声强度越小功率谱越向低频段集中.

图 8 和图 9 是噪声强度分别为 $D = 0.08$ 和 $D =$

4. 结 论

分析了非线性双稳系统在噪声和弱周期信号作用下的随机同步条件, 并根据双稳系统输出的噪声

谱和周期信号谱与噪声强度和信号频率的关系,提出了随机共振控制的频率匹配方法.该方法能有效地控制随机共振的产生和所产生的共振强烈程度.

在双稳系统的输出中,输出噪声的频谱是“软的”,它可以受到输入信号频率的微调,即使施加的输入信号频率与噪声诱导的逃逸率有一定差别,输入

周期信号仍有可能通过共振强迫噪声的频谱改变自己的频率成分而将其锁到输入信号频率上,从而增强输出的周期信号,并能使输出噪声水平大大降低.因此,采用共振控制器既改变作用到双稳系统的频率成分,又降低噪声的有效强度,这对随机共振的控制具有极大的主动性和可控制能力.

- [1] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev. Mod. Phys.* **70** 223
- [2] Qin G R, Gong D C, Hu G, Wen X D 1992 *Acta Phys. Sin.* **41** 360 (in Chinese) [秦光戎、龚德纯、胡 岗、温孝东 1992 物理学报 **41** 360]
- [3] Zhu H J, Li R, Wen X D 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2404 (in Chinese) [祝恒江、李 蓉、温孝东 2003 物理学报 **52** 2404]
- [4] Leng Y G, Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2432 (in Chinese) [冷永刚、王太勇 2003 物理学报 **52** 2432]
- [5] Gammaitoni L, Löcher M, Bulsara A R, Hänggi P, Neff J, Wiesenfeld K, Ditto W L, Inchiosa M E 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4574
- [6] Löcher M, Inchiosa M E, Neff J, Bulsara A R, Wiesenfeld K, Gammaitoni L, Hänggi P, Ditto W L 2000 *Phys. Rev. E* **62** 317
- [7] Lindner J F, Mason J, Neff J, Breen B J, Ditto W L, Bulsara A R 2001 *Phys. Rev. E* **63** 041107
- [8] Li F, Hu A H, Xu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 590 (in Chinese) [李 芳、胡爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]
- [9] Li S, Xu W, Li R H, Li Y P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5681 (in Chinese) [李 爽、徐 伟、李瑞红、李玉鹏 2006 物理学报 **55** 5681]
- [10] Zhu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6248 (in Chinese) [朱志宇 2006 物理学报 **55** 6248]
- [11] Wu C L, Ma S J, Sun Z K, Fang T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6253 (in Chinese) [吴存利、马少娟、孙中奎、方 同 2006 物理学报 **55** 6253]
- [12] Wu X J, Wang X Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6261 (in Chinese) [武相军、王兴元 2006 物理学报 **55** 6261]
- [13] Hu G 1994 *Stochastic Forces and nonlinear systems* (Shanghai: Shanghai Science & Technology Education Press) p222 (in Chinese) [胡 岗 1994 随机力与非线性系统 (上海:上海教育出版社), 1994]
- [14] Lin M, Huang Y M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3277 (in Chinese) [林 敏、黄咏梅 2006 物理学报 **55** 3277]

Frequency matching method for stochastic resonance control^{*}

Lin Min[†] Mao Qian-Min Zheng Yong-Jun Li Dong-Sheng

(College of Metrology Technology and Engineering, China Jiliang University, Hangzhou 310018, China)

(Received 22 September 2006; revised manuscript received 14 December 2006)

Abstract

A frequency matching method for stochastic resonance control is presented on the assumption that stochastic synchronization of stochastic resonance will be generated when the nonlinear bistable system is stimulated by noise and weak periodic signal. Theoretical analysis and numerical simulation show that stochastic resonance can be controlled. Not only the frequency range of stochastic resonance can be broadened, but also the intensity of stochastic resonance can be strengthened by controlling the frequency of the input signal and statistical characteristics of noise, resulting in more noise energy being converted into signal energy.

Keywords: stochastic resonance, nonlinear bistable system, frequency matching, control

PACC: 0250, 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60671052, 50675214).

[†] E-mail: linn@cjlu.edu.cn