第 56 卷 第 9 期 2007 年 9 月
1000-3290/2007/56(09)/5037-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.56,No.9,September,2007

机电系统的统一对称性

李元成 夏丽莉 赵 伟 后其宝 王 静 荆宏星

(中国石油大学(华东)物理科学与技术学院,东营 257061)

(2006 年 11 月 27 日收到;2006 年 12 月 13 日收到修改稿)

研究机电系统的统一对称性. 由系统的 Lagrange-Maxwell 方程,给出系统的统一对称性的定义和判据,得到了系统的统一对称性导出 Noether 守恒量,Hojman 守恒量和 Mei 守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词:机电系统,统一对称性,守恒量

PACC:0320

1. 引 言

对称性研究在数学、力学和物理学上都具有重要的意义. 近代寻求守恒量的对称性方法主要有 Noether 对称性[1—3],Lie 对称性[3—8] 和 Mei 对称性[9—13]. 相应地主要的守恒量有 Noether 守恒量,Hojman 守恒量[14] 和 Mei 守恒量[15]. 近几年对力学系统的对称性与守恒量的研究取得了很大进展. 最近,梅凤翔、吴惠彬等研究了各种力学系统的联合对称性和统一对称性[16—25]. 本文在文献[26—30]的基础上,研究机电系统的统一对称性,给出系统的统一对称性的定义和判据,并由此找到系统的 Noether 守恒量、Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.

2. 机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程

假设机电系统由 m 个回路组成,每个回路由线导体和电路组成. 各个电路之间是电无关的,但回路中的电磁过程不是独立的. 用 $i_k(k=1,\cdots,m)$ 表示第 k 个回路中的电流,u_k 为加在第 k 个回路中的电动势. 设 e_k 为电容器中的电荷,它与电流的关系为 $\dot{e}_k=i_k$,R_k 和 C_k 分别为第 k 个回路中的电阻和电容,系统受理想双面完整约束. 将 $e_k(k=1,\cdots,m)$,$q_s(s=1,\cdots,n)$ 取为广义坐标,系统的 Lagrange-Maxwell 函数为

$$L=T(q_s,\dot{q}_s)-V(q_s)+W_{\mathrm{m}}(q_s,\dot{e}_k)-W_{\mathrm{e}}(q_s,e_k). \tag{1}$$

引入电的和机械的耗散函数之和

$$\psi=\psi_{\mathrm{e}}(i_k)+\psi_{\mathrm{m}}(q_s,\dot{q}_s),$$

则机电系统的 Lagrange-Maxwell 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{e}_k}-\frac{\partial L}{\partial e_k}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}=u_k\quad(k=1,\cdots,m),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}+\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}=Q_s\quad(s=1,\cdots,n), \tag{2}$$

其中,W_{m},W_{e},ψ_{e} 分别为磁场能量,电场能量和电耗散函数,即

$$W_{\mathrm{m}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\sum_{r=1}^{m}L_{kr}i_ki_r,$$
$$W_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\frac{e_k^2}{C_k},$$
$$\psi_{\mathrm{e}}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}R_ki_k^2, \tag{3}$$

T,V 分别为系统的动能和势能

$$T=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}a_{sl}\dot{q}_s\dot{q}_l;\quad V=V(q_s), \tag{4}$$

其中系数 $a_{sl}=a_{sl}(q_s)$ 仅依赖于广义坐标. 方程(2)组成对广义坐标 q_s,e_k 的 $n+m$ 个二阶常微分方程组.

假设方程(2)非奇异,即

$$\det\left(\frac{\partial^2L}{\partial\dot{q}_s\partial\dot{q}_l}\right)\neq0,\quad\det\left(\frac{\partial^2L}{\partial\dot{e}_j\partial\dot{e}_k}\right)\neq0. \tag{5}$$

由(2)式可求得所有广义加速度,记作

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}}),$$
$$\ddot{e}_k=\beta_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}}). \tag{6}$$

3. 机电系统的统一对称性

定义 如果机电系统的对称性同时为 Noether

对称性，Lie 对称性和 Mei 对称性，这样的对称性称为系统的统一对称性.

引入无限小变换

$$t^{*}=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}}),$$

$$q_s^{*}(t^{*})=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}}),$$

$$e_k^{*}(t^{*})=e_k(t)+\varepsilon\eta_k(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}}),\qquad(7)$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_0，ξ_s，η_k 为无限小生成元.

对机电系统，Noether 等式为

$$L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+X^{(1)}(L)+\left(Q_s-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\left(u_k-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}\right)(\eta_k-\dot{e}_k\xi_0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N=0.\qquad(8)$$

Lie 对称性的确定方程为

$$X^{(2)}\{\bar{\mathrm{E}}_s(L)\}=X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right),$$

$$X^{(2)}\{\bar{\mathrm{E}}'_k(L)\}=X^{(1)}\left(u_k-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}\right).\qquad(9)$$

Mei 对称性的判据方程为

$$\bar{\mathrm{E}}_s\{X^{(1)}(L)\}=X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right),$$

$$\bar{\mathrm{E}}'_k\{X^{(1)}(L)\}=X^{(1)}\left(u_k-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}\right),\qquad(10)$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\eta_k\frac{\partial}{\partial e_k}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\eta_k-\dot{e}_k\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{e}_k},$$

$$X^{(2)}=X^{(1)}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s-2\ddot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\eta_k-2\ddot{e}_k\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0-\dot{e}_k\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0\right)\frac{\partial}{\partial\ddot{e}_k},$$

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\dot{e}_k\frac{\partial}{\partial e_k}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}+\beta_k\frac{\partial}{\partial\dot{e}_k},$$

$$\bar{\mathrm{E}}_s=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}-\frac{\partial}{\partial q_s},$$

$$\bar{\mathrm{E}}'_k=\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\dot{e}_k}-\frac{\partial}{\partial e_k}.$$

判据　对于机电系统，如果存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}})$，无限小生成元 ξ_0，ξ_s，η_k 满足如下等式：

$$\left\{L\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_0+X^{(1)}(L)+\left(Q_s-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\left(u_k-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}\right)(\eta_k-\dot{e}_k\xi_0)+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}G_N\right\}^2$$
$$+\left\{X^{(2)}[\bar{\mathrm{E}}_s(L)]-X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right)\right\}^2+\left\{X^{(2)}[\bar{\mathrm{E}}'_k(L)]-X^{(1)}\left(u_k-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}\right)\right\}^2$$
$$+\left\{\bar{\mathrm{E}}_s[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}\left(Q_s-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right)\right\}^2+\left\{\bar{\mathrm{E}}'_k[X^{(1)}(L)]-X^{(1)}\left(u_k-\frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}\right)\right\}^2=0,\qquad(11)$$

则相应对称性为机电系统的统一对称性.

4. 机电系统的统一对称性导致的守恒量

机电系统的统一对称性在一定条件下可导出 Noether 守恒量，Hojman 守恒量和 Mei 守恒量.

命题 1　对于机电系统，统一对称性可导致 Noether 守恒量

$$I_{\mathrm{N}}=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\frac{\partial L}{\partial\dot{e}_k}(\eta_k-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{N}}=\mathrm{const}.\qquad(12)$$

证明　因为机电系统的统一对称性一定是 Noether 对称性，则存在一个规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}})$满足 Noether 等式(8)，根据 Noether 定理系统存在守恒量(12).

命题 2　对于机电系统，在特殊无限小变换下($\xi_0=0$)，如果存在函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}},\boldsymbol{e},\dot{\boldsymbol{e}})$，满足

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial\beta_k}{\partial\dot{e}_k}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0,\qquad(13)$$

则统一对称性可导致 Hojman 守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial e_k}(\mu\eta_k)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{e}_k}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\eta_k\right)=\mathrm{const}.\qquad(14)$$

证明　因为机电系统的统一对称性一定是 Lie 对称性，因此 Lie 对称性确定方程(9)成立，利用(9)，(13)两式，根据机电系统 Hojman 守恒量的证明方法，能证明系统存在守恒量(14).

命题 3　对于机电系统，如果存在规范函数 $G_M = G_M(t, q, \dot{q}, e, \dot{e})$，满足方程

$$X^{(1)}(L)\frac{\bar{d}}{dt}\xi_0 + X^{(1)}[X^{(1)}(L)] + X^{(1)}\left(Q_s - \frac{\partial\psi}{\partial\dot{q}_s}\right)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + X^{(1)}\left(u_k - \frac{\partial\psi}{\partial\dot{e}_k}\right)(\eta_k - \dot{e}_k\xi_0) + \frac{\bar{d}}{dt}G_M = 0, \quad (15)$$

则统一对称性可导致 Mei 守恒量

$$I_M = X^{(1)}(L)\xi_0 + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \frac{\partial X^{(1)}(L)}{\partial\dot{e}_k}(\eta_k - \dot{e}_k\xi_0) + G_M = \text{const}. \quad (16)$$

证明　因为机电系统的统一对称性一定是 Mei 对称性，则系统的 Mei 对称性判据方程(10)成立，利用(10)，(15)两式能够证明系统存在 Mei 守恒量(16).

5. 说明性例子

研究一带电容机电系统，电源电压为 U，q，e 为系统的广义坐标，其 Lagrange 函数可表示为 $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\dot{e}^2 - k\dot{q} - \frac{1}{2}Ae^2$，电耗散函数为 $\psi = \frac{1}{2}R\dot{e}^2$，电容两端电压 $u = R\dot{e}$，其中 R 为电阻，k，A 为常量. 试研究此力学系统的统一对称性.

系统的运动方程为

$$\ddot{q} = 0, \quad \ddot{e} = -Ae + U, \quad (17)$$

选择无限小生成元

$$\xi_0 = 0, \quad \xi = t, \quad \eta = 0, \quad (18)$$

通过计算，有

$$X^{(1)}(L) = \dot{q} - k, \quad X^{(1)}[X^{(1)}(L)] = 1,$$
$$\bar{E}_s(L) = \ddot{q}, \quad \bar{E}'_k(L) = \ddot{e} + Ae,$$
$$\bar{E}_s(X^{(1)}(L)) = \bar{E}'_k(X^{(1)}(L)) = 0,$$
$$X^{(2)}(\bar{E}_s(L)) = 0, \quad X^{(2)}(\bar{E}'_k(L)) = 0. \quad (19)$$

生成元(18)满足(11)式，可知生成元(18)是机电系统的统一对称性.

将(18)式和(19)式代入 Noether 等式(8)，有规范函数

$$G_N = kt - q. \quad (20)$$

由命题 1 得

$$I_N = \dot{q}t - q = \text{const}. \quad (21)$$

即由统一对称性得到的 Noether 守恒量.

将(18)式和(19)式代入(13)式，有

$$\frac{d}{dt}\ln\tilde{\mu} = 0, \quad \tilde{\mu} = \dot{q}. \quad (22)$$

由命题 2 得

$$I_H = \frac{1}{\dot{q}} = \text{const}. \quad (23)$$

则由统一对称性可导致 Hojman 守恒量.

将(18)式和(19)式代入(15)式，有

$$G_M = \dot{q} - t. \quad (24)$$

由命题 3 得

$$I_M = \dot{q} = \text{const}. \quad (25)$$

即由统一对称性得到的 Mei 守恒量.

[1] Noether E 1918 *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys.* **KI II** 235

[2] Luzky M 1979 *J. Phys. A：Math. Gen.* **19** 105

[3] Mei F X 2000 *J. Beijing Inst. Technol.* **9** 120

[4] Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 177

[5] Li Z P 1993 *Classical and quantal dynamics of constrained systems and Their symmetrical properties* (Beijing：Beijing Polytechnic University press)(in Chinese)[李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[6] Mei F X 1999 *Application of Lie Group and Lie Algebras to Constrained Mechanical systems* (Beijing：Science Press)(in Chinese)[梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[7] Bahar L Y，Kwatny H G 1987 *Int. J. Non-Linear Mech.* **22** 125

[8] Mei F X 2000 *Acta Mech. Sin.* **141** 135

[9] Mei F X 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1048 (in Chinese)[梅凤翔 2003 物理学报 **52** 1048]

[10] Zhang Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1832 (in Chinese)[张　毅 2003 物理学报 **52** 1832]

[11] Wang S Y，Mei F X 2001 *Chin. Phys.* **10** 373

[12] Lou Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2046 (in Chinese)[楼智美 2004 物理学报 **53** 2046]

[13] Luo S K，Guo Y X，Mei F X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2418 (in Chinese)[罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2418]

[14] Hojman S A 1992 *J. Phys. A：Math. Gen.* **25** L291

[15] Xu X J，Mei F X，Qin M C 2004 *Chin. Phys.* **13** 1999

[16] Mei F X, Xu X J, Zhang Y F 2004 *Acta Mech. Sin.* **20** 668

[17] Wu H B 2005 *Chinese Physics* **14** 452

[18] Xu X J, Qin M C, Mei F X 2005 *Chin. Phys.* **14** 1287

[19] Xu X J, Qin M C, Mei F X 2005 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **44** 769

[20] Fang J H, Wang P, Ding N 2006 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China) **45** 882

[21] Xia L L, Wang J, Hou Q B, Li Y C 2006 *Chin. Phys.* **15** 467

[22] Xia L L, Li Y C, Wang J, Hou Q B 2006 *Chin. Phys.* **15** 903

[23] Xia L L, Li Y C, Wang J, Hou Q B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4995 (in Chinese) [夏丽莉、李元成、王 静、后其宝 2006 物理学报 **55** 4995]

[24] Xia L L, Li Y C, Hou Q B, Wang J 2006 *Commun. Theor. Phys.* (Beijing, China), **46** 683

[25] Wang J, Li Y C, Xia L L, Hou Q B. 2006 *Chin. Phys.* **15** 1665

[26] Qiu J J 1992 *Analysis Mechanics of Mechanico-Electrical System* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [邱家俊 1992 机电分析动力学 (北京: 科学出版社)]

[27] Fu J L, Chen X W, Luo S K 2000 *Acta Mechanica Solida Sinica* **21** 157 (in Chinese) [傅景礼、陈向炜、罗绍凯 2000 固体力学学报 **21** 157]

[28] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1998 *Journal of Electric Power* **13** 233 (in Chinese) [傅景礼、陈向炜、罗绍凯 1998 电力学报 **13** 233]

[29] Zheng S W, Fu J L, Li X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5511 (in Chinese) [郑世旺、傅景礼、李显辉 2005 物理学报 **54** 5511]

[30] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *The Research of Dynamics, Oscillation and Control* (Changsha: Hunan University Press) (in Chinese) [傅景礼、陈向炜、罗绍凯 1998 动力学、振动与控制的研究 (长沙 湖南大学出版社)]

Unified symmetry of mechanico-electrical systems

Li Yuan-Cheng Xia Li-Li Zhao Wei Hou Qi-Bao Wang Jing Jing Hong-Xing

(*College of Physics Science and Technology, China University of Petroleum Dongying* 257061, *China*)

(Received 27 November 2006; revised manuscript received 13 December 2006)

Abstract

The unified symmetry of mechanico-electrical systems are studied in this paper. The definition and criterion of unified symmetry of mechanico-electrical systems are derived from the Lagrange-Maxwell equations. The Noether conserved quantity, Hojman conserved quantity and a new conserved quantity deduced from the unified symmetry are obtained. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: mechanico-electrical systems, unified symmetry, conserved quantity

PACC: 0320