

# 色噪声驱动的非对称双稳系统的平均首次穿越时间\*

张娜敏<sup>†</sup> 徐 伟 王朝庆

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2006 年 10 月 23 日收到, 2006 年 12 月 26 日收到修改稿)

研究了由关联乘性色噪声及加性白噪声驱动的非对称双稳系统中势阱的非对称性及噪声对系统两个方向平均首次穿越时间的影响. 首先利用一致有色噪声近似推导了系统的稳态概率密度的表达式, 根据最速下降法推导了平均首次穿越时间的表达式. 数值结果表明, 势阱的非对称性对两个方向的平均首次穿越时间的影响是不同的; 由于噪声的关联性, 即使对于关联乘性色噪声及加性白噪声驱动的对称双稳系统, 两个方向的平均首次穿越时间也不再相等. 在  $\ln T_{+ \rightarrow -}$  和  $\ln T_{- \rightarrow +}$  曲线上都存在极小值, 不同的是在  $\ln T_{+ \rightarrow -}$  曲线上极小值的位置随  $\lambda$  增大逐渐右移, 而在  $\ln T_{- \rightarrow +}$  曲线上极小值的位置随  $\lambda$  增大逐渐左移.

关键词: 平均首次穿越时间, 非对称双稳系统, 乘性色噪声, 加性白噪声

PACC: 0540, 0250

## 1. 引 言

真正的白噪声是不存在的, 因为它需要无穷大的功率才能产生出来. 在随机振动理论中, 为了简化计算, 常将宽带或者记忆时间很短的激励模型化为白噪声. 然而在许多实际问题中噪声的相关时间较长而不能当作白噪声处理, 所以近年来色噪声驱动的非线性系统受到了人们的广泛关注<sup>[1-9]</sup>. Jung 等<sup>[1]</sup>对乘性色噪声驱动的双稳模型进行了研究并推导出了一致有色噪声近似(UCNA). Cao 等<sup>[2-4]</sup>推导了由关联色噪声驱动的双稳系统的稳态概率密度的表达式. Jia 等<sup>[5]</sup>分别研究了由白关联和色关联加性和乘性白噪声驱动的双稳系统的平均首次穿越时间. 上述文献主要研究的是对称的双稳系统, 但在许多实际的物理系统中对称性是不能保证的, 所以势阱的非对称性被引入磁通量闸门磁力计测量器和超导量子干涉设备中来探测弱的信号. 靳艳飞等<sup>[10]</sup>研究了互不关联的加性白噪声及乘性白噪声驱动的非对称双稳系统的平均首次穿越时间. Li<sup>[11]</sup>研究了白噪声激励下的双稳系统中势阱的非对称性

对随机共振的影响.

本文研究了由关联乘性色噪声及加性白噪声驱动的非对称双稳系统的平均首次穿越时间. 当  $r = 0$  时退化为文献 1—5 研究的模型, 当关联时间  $\tau \rightarrow 0$  时退化为关联加性及乘性白噪声驱动的非对称双稳模型. 根据统一色噪声近似方法和最速下降法, 分别得到了系统的稳态概率密度函数和平均首次穿越时间的表达式, 讨论了势阱的非对称性及噪声对两个方向的平均首次穿越时间的影响.

## 2. 平均首次穿越时间的表达式

受关联的乘性色噪声及加性白噪声激励的非对称双稳系统可由下列微分方程表示:

$$\frac{dx}{dt} = x - x^3 - r + x\xi(t) + \Gamma(t), \quad (1)$$

其中  $\xi(t)$  是高斯色噪声,  $\Gamma(t)$  是高斯白噪声. 其统计性质为

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \Gamma(t) = 0, \\ \Gamma(t)\Gamma(t') &= 2\alpha\delta(t-t'), \\ \xi(t)\xi(t') &= \frac{D}{\tau} \exp\left\{-\frac{1}{\tau} |t-t'|\right\}, \end{aligned}$$

\* 国家自然科学基金(批准号: 10472091, 10332030)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: nmzhang\_0909@sohu.com

$$\begin{aligned} \xi(t)\Gamma(t') &= \Gamma(t)\xi(t') \\ &= 2\lambda\sqrt{D\alpha}\xi(t-t'), \quad (2) \end{aligned}$$

其中  $D$  和  $\alpha$  分别为乘性和加性噪声强度,  $\lambda$  为噪声  $\xi(t)$  和  $\Gamma(t)$  之间的互关联强度,  $0 < \lambda < 1$ ,  $\tau$  为噪声  $\xi(t)$  的自相关时间. 由统一色噪声近似方法可得其近似的 FPK 方程为

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}A(x)P(x,t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}B(x)P(x,t), \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{x-x^3-r}{1+2\tau x^2-\frac{\tau r}{x}} + \frac{1}{2}B'(x), \\ B(x) &= \frac{1}{\left(1+2\tau x^2-\frac{\tau r}{x}\right)^2} [Dx^2 + 2\lambda\sqrt{D\alpha}x + \alpha], \end{aligned}$$

从而可得到系统的稳态概率密度函数为

$$P(x) = \frac{N}{\sqrt{B(x)}} \exp\left\{\int \frac{A(x)}{B(x)} dx\right\}, \quad (4)$$

其中  $N$  为归一化常数. 广义势函数为

$$\begin{aligned} \tilde{V}(x) &= -\int \frac{(x-x^3-r)\left(1+2\tau x^2-\frac{\tau r}{x}\right)}{x^2+2\lambda\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x+\frac{\alpha}{D}} dx \\ &= \frac{\tau x^4}{2} - \frac{4}{3}\lambda\tau\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x^3 + \frac{mx^2}{2} + nx - \frac{D\tau r^2}{\alpha}\ln|x| \\ &\quad - \frac{1}{2}\left[2\lambda n\sqrt{\frac{\alpha}{D}} + \frac{m\alpha}{D} + 1 - \frac{D\tau r^2}{\alpha}\right] \\ &\quad \times \ln\left|x^2+2\lambda\sqrt{\frac{\alpha}{D}}x+\frac{\alpha}{D}\right| \\ &\quad + \left[\tau r + r - \frac{n\alpha}{D} + \lambda\tau r^2\sqrt{\frac{D}{\alpha}}\right. \\ &\quad \left.+ 2\lambda^2 n\frac{\alpha}{D} + \lambda m\left(\frac{\alpha}{D}\right)^{3/2} + \lambda\sqrt{\frac{\alpha}{D}}\right] \\ &\quad \times \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha(1-\lambda^2)}{D}}}\arctan\frac{x+\lambda\sqrt{\alpha/D}}{\sqrt{\frac{\alpha(1-\lambda^2)}{D}}}, \quad (5) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} m &= 8\tau\lambda^2\frac{\alpha}{D} - 2\tau\frac{\alpha}{D} + 1 - 2\tau, \\ n &= -2\lambda m\sqrt{\frac{\alpha}{D}} + 4\lambda\tau\left(\frac{\alpha}{D}\right)^{3/2} + \tau r. \end{aligned}$$

由(1)式可知,系统的确定性势函数为  $V(x) = -x^2/2 + x^4/4 + rx$ , 其中  $r$  代表势阱的非对称性, 在  $-2\sqrt{3}/9 < r < 2\sqrt{3}/9$  的条件下  $V(x)$  表示一个非对称双稳势函数. 通过解方程  $V'(x) = 0$  可得它的一

个不稳定点和两个稳定点分别为

$$\begin{aligned} x_{s1} &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) - \frac{\pi}{3}\right), \\ x_{s2} &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right)\right), \\ x_u &= -\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}r\right) + \frac{\pi}{3}\right), \quad (6) \end{aligned}$$

其中  $x_{s1}$  和  $x_{s2}$  代表稳定点,  $x_u$  代表不稳定点.

利用平均首次穿越时间的定义和最速下降法可得两个不同方向的平均首次穿越时间的表达式为

$$\begin{aligned} T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r) &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{B(x)P(x)} \int_{-\infty}^x P(y)\lambda dy \\ &= \frac{2\mathcal{I} |V'(x_u)V''(x_{s1})| \mathcal{I}^{-1/2}}{\sqrt{B(x_{s1})}} \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{\tilde{V}(x_u) - \tilde{V}(x_{s1})}{D}\right\}, \\ T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r) &= \int_{x_{s1}}^{x_{s2}} \frac{dx}{B(x)P(x)} \int_x^{+\infty} P(y)\lambda dy \\ &= \frac{2\mathcal{I} |V'(x_u)V''(x_{s2})| \mathcal{I}^{-1/2}}{\sqrt{B(x_{s2})}} \\ &\quad \times \exp\left\{\frac{\tilde{V}(x_u) - \tilde{V}(x_{s2})}{D}\right\}, \quad (7) \end{aligned}$$

其中  $V(x)$ ,  $B(x)$ ,  $\tilde{V}(x)$  及  $x_{s1}$ ,  $x_{s2}$ ,  $x_u$  均同前文中定义.

### 3. 非对称性及噪声对平均首次穿越时间的影响

下面根据平均首次穿越时间的表达式(7)讨论乘性噪声强度  $D$ , 加性噪声强度  $\alpha$ , 噪声关联强度  $\lambda$  和势阱的非对称性  $r$  对平均首次穿越时间的影响.

图1和图2分别给出了不同方向的平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同的势阱非对称性  $r$  变化的情况. 由图1和图2可见, 平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随加性噪声强度  $\alpha$  的增加都在单调减小. 在图1中,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  随势阱的非对称性  $r$  的增加而单调增加, 当加性噪声强度  $\alpha$  增加到 0.31 时,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  随势阱的非对称性  $r$  的增加而增加的情形不再保持, 当  $\alpha > 0.41$  时,  $r = -0.1$  所对应的那一条曲线成为三条曲

线中最大的一条. 而在图 2 中,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随势阱的非对称性  $r$  的增加而单调减小, 当  $\alpha$  逐渐增大到 0.29 时, 单调性不再保持,  $r = 0.0$  对应的曲线成为三条中最大的一条. 从两图中还可以看出, 当  $r = 0.0$  时,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  也不再相等, 这是由乘性色噪声和加性白噪声之间存在关联性引起的. 这与文献 [4] 中得出的对于受不相关的加性白噪声及乘性白噪声激励的对称双稳系统中两个方向的平均首次穿越时间相等是不同的.

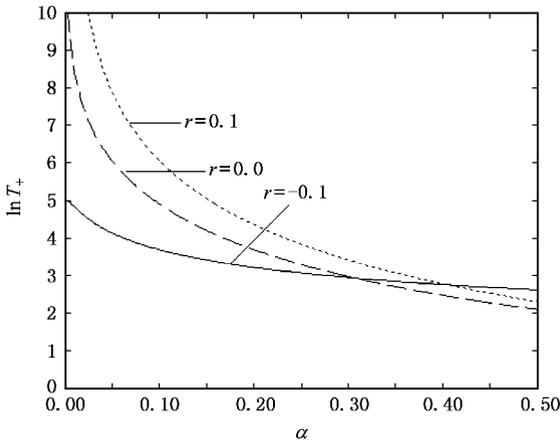


图 1 平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同的势阱非对称性  $r$  变化的曲线 ( $D = 0.4, \tau = 0.3, \lambda = 0.3$ )

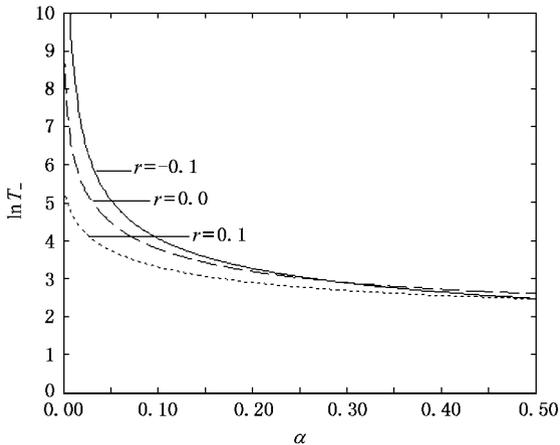


图 2 平均首次穿越时间  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同的势阱非对称性  $r$  变化的曲线 ( $D = 0.4, \tau = 0.3, \lambda = 0.3$ )

图 3 和图 4 给出了两个不同方向的平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的势阱非对称性  $r$  变化

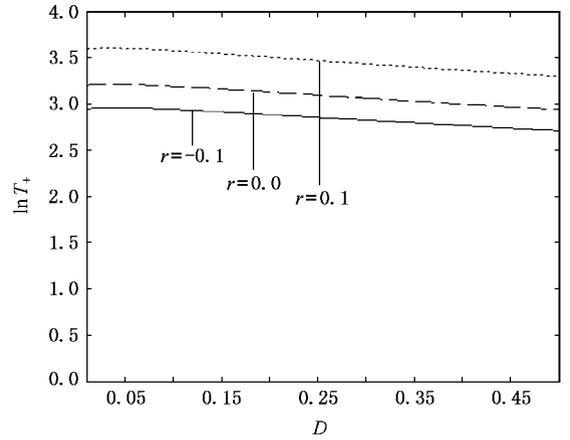


图 3 平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的势阱非对称性  $r$  变化的曲线 ( $\tau = 0.3, \lambda = 0.3, \alpha = 0.4$ )

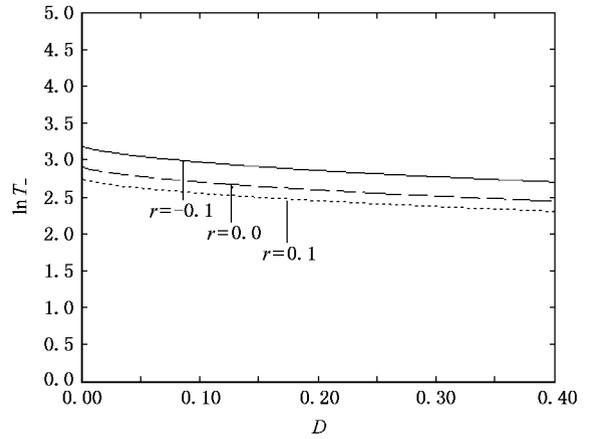


图 4 平均首次穿越时间  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同的势阱非对称性  $r$  变化的曲线 ( $\tau = 0.3, \lambda = 0.3, \alpha = 0.4$ )

的情况.  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  都随  $D$  的增加而减小, 但不同的是, 前者随  $r$  的增加而增大, 后者随  $r$  的增加而减小.

图 5 和图 6 给出了两个不同方向的平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为势阱非对称性  $r$  的函数随不同关联噪声强度  $\lambda$  的变化情况. 在图 5 和图 6 中,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  开始都随着  $r$  的增加而减小, 当  $r > -0.18$  时  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  随  $r$  的增加而增大, 而当  $r > 0.24$  时  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  才随  $r$  的增加而增大, 所以在  $\ln T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r) - r$  和  $\ln T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r) - r$  曲线上都存在一个极小值, 形成了一个抑制平台, 不同的是

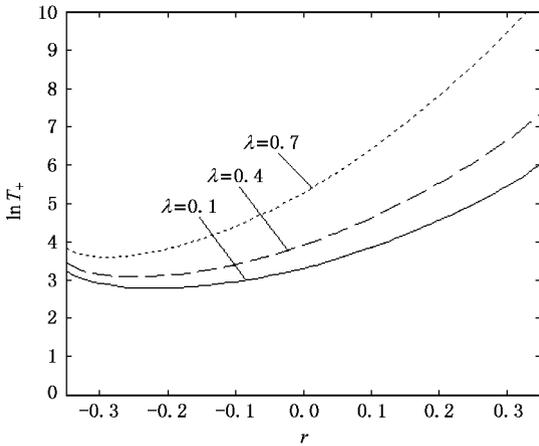


图5 平均首次穿越时间  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  作为势阱非对称性  $r$  的函数随不同的噪声关联强度  $\lambda$  变化的曲线 ( $D=0.4, \alpha=0.2, \tau=0.3$ )

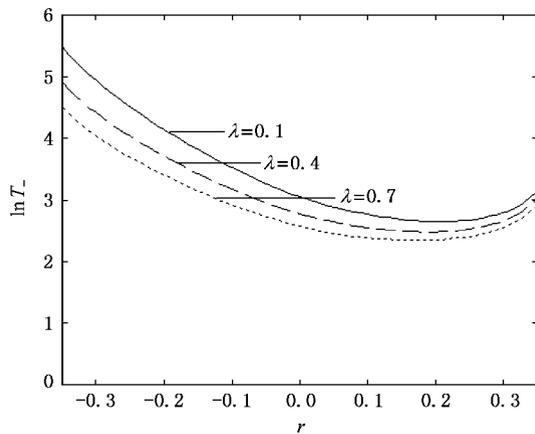


图6 平均首次穿越时间  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  作为势阱非对称性  $r$  的函数随不同的噪声关联强度  $\lambda$  变化的曲线 ( $D=0.4, \alpha=0.2, \tau=0.3$ )

在  $\ln T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$ - $r$  曲线中极小值的位置随着  $\lambda$  的增大而逐渐向右移,而在图6中,极小值的位置随着  $\lambda$  的增大而逐渐向左移.同时从两图中也可以看出,  $\lambda$  对  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  和  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  的影响是完全不同的,  $T_+(x_{s1} \rightarrow x_{s2}, r)$  随  $\lambda$  的增大而增大,  $T_-(x_{s2} \rightarrow x_{s1}, r)$  随  $\lambda$  的增大而减小.

图7给出了两个方向的平均首次穿越时间之比  $\ln T_+ / \ln T_-$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同的势

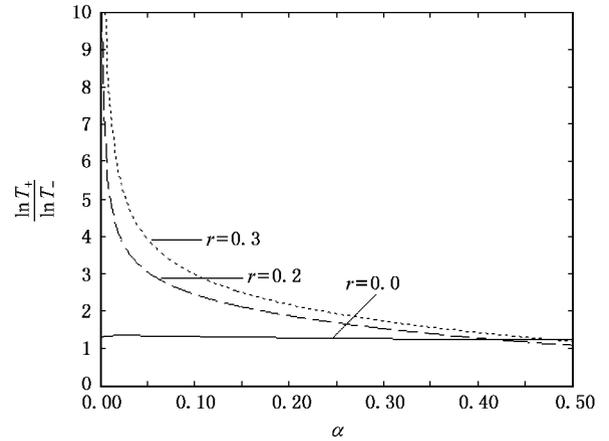


图7 两个方向的平均首次穿越时间之比  $\ln T_+ / \ln T_-$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同的势阱非对称性  $r$  变化的曲线 ( $D=0.4, \lambda=0.3, \tau=0.3$ )

阱非对称性  $r$  变化的情况.当  $r=0.0$  时,  $\ln T_+ / \ln T_-$  恒为常数 1.3,从而证明了前文中提出的对于关联乘性色噪声及加性白噪声驱动的对称双稳系统两个方向的平均首次穿越时间不再相等的结论.  $\ln T_+ / \ln T_-$  随着  $\alpha$  的增加而减小,但是随着  $r$  ( $r \neq 0$ ) 的增大而增大,从而又证明了势阱的非对称性对两个方向的平均首次穿越时间的影响是不相同的.

## 4. 结 论

文中得到了由关联乘性色噪声及加性白噪声驱动的非对称双稳系统的平均首次穿越时间的表达式,讨论了势阱的非对称性及噪声对系统的两个方向的平均首次穿越时间的影响.研究发现,势阱的非对称性对两个方向的平均首次穿越时间的影响是不同的,在非对称双稳系统中两个方向的平均首次穿越时间不相等,而且即使在对称双稳系统中由于乘性色噪声及加性白噪声之间的关联性,两个方向的平均首次穿越时间也不再相等;在  $\ln T_+$ - $r$  和  $\ln T_-$ - $r$  曲线上都出现了极小值,不同的是在  $\ln T_+$ - $r$  曲线中极小值的位置随着  $\lambda$  的增大而逐渐向右移,而在  $\ln T_-$ - $r$  曲线中极小值的位置随着  $\lambda$  的增大而逐渐向左移.



- [ 1 ] Jung P ,Hanggi P 1987 *Phys. Rev. A* **35** 4464
- [ 2 ] Cao L , Wu D J , Kw S Z 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3228
- [ 3 ] Wu D J , Cao L , Ke S Z 1994 *Phys. Rev. E* **50** 2496
- [ 4 ] Wang J , Cao L , Wu D J 2003 *Phys. Lett. A* **308** 23
- [ 5 ] Jia Y , Li J R 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5764
- [ 6 ] Luo X Q , Zhu S Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 977 ( in Chinese ) [ 罗晓琴、朱士群 2002 物理学报 **51** 977 ]
- [ 7 ] Luo X Q , Zhu S Q 2001 *Chin. Phys.* **10** 1011
- [ 8 ] Xie C W , Mei D C 2003 *Chin. Phys.* **12** 1208
- [ 9 ] Xie W X , Xu W , Cai L 2002 *Chin. Phys.* **11** 1639
- [ 10 ] Jin Y F , Xu W , Ma S J , Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3480 ( in Chinese ) [ 靳艳飞、徐伟、马少娟、李伟 2005 物理学报 **54** 3480 ]
- [ 11 ] Li J H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 031104
- [ 12 ] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear Systems* ( Shanghai : Shanghai Scientific and Technological Education Publishing House ) ( in Chinese ) [ 胡岗 1994 随机力与非线性系统(上海 : 上海科技教育出版社) ]

## The mean first-passage time for an asymmetric bistable system driven by multiplicative colored and additive white noise with a correlated noise<sup>\*</sup>

Zhang Na-Min<sup>†</sup> Xu Wei Wang Chao-Qing

( Department of Applied Mathematics , Northwestern Polytechnical University , Xi 'an 710072 ,China )

( Received 23 October 2006 ; revised manuscript received 26 December 2006 )

### Abstract

We investigated the effects of asymmetry of the potential and noises on the mean first-passage time ( MFPT ) in two opposite directions in an asymmetric bistable system subjected to multiplicative colored and additive white noise with a correlated noise. The expression of the stationary probability distribution is obtained by means of an extended unified colored-noise approximation and the expressions of the MFPTs are derived through the steepest-descent approach. Numerical results show that the influence of the asymmetry coefficient  $r$  on  $T_{\pm}$  is different and because of the correlated noise ,even for  $r = 0$  ,  $T_{+}( x_{s1} \rightarrow x_{s2} , r )$  is not equal to  $T_{-}( x_{s2} \rightarrow x_{s1} , r )$ . The curves of  $\ln T_{\pm}$  versus  $r$  in both cases have mono-valleys but the mono-valleys move to the opposite directions with increasing correlation intensity  $\lambda$ .

**Keywords :** mean first-passage time , asymmetric bistable system , multiplicative colored noise , additive white noise

**PACC :** 0540 , 0250

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos :10472091 , 10332030 ).

<sup>†</sup> E-mail : nmzhang\_0909@sohu.com