

# 多光子 Tavis-Cummings 模型中两纠缠原子的纠缠演化特性\*

张英杰 周 原 夏云杰†

(曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

(2007 年 3 月 15 日收到, 2007 年 4 月 16 日收到修改稿)

研究了两个纠缠的二能级原子通过多光子跃迁与单模相干光场进行耦合相互作用系统中两原子纠缠的演化特性. 计算分析表明, 两个原子之间的纠缠呈现出周期性的演化特性, 初始两原子的状态、原子间的偶极相互作用、相干光场的参数以及跃迁光子数对两个原子的纠缠有着显著的影响; 并发现两原子初始处于某最大纠缠态时, 两原子会永远处于该最大纠缠态, 因此这一类最大纠缠态可以作为一种量子信息存储器.

关键词: 量子纠缠, 部分转置矩阵负本征值, 纠缠原子, 相干态

PACC: 0365, 4250

## 1. 引 言

量子纠缠<sup>[1,2]</sup>现象是量子力学特有的现象, 是量子力学不同于经典物理最奇特、最不可思议的特征之一. 在量子信息学中, 纠缠扮演着极为重要的角色, 在量子信息处理<sup>[3-6]</sup>的量子隐形传态、量子编码及量子纠错、量子密钥分配和量子计算机中具有重要的应用. 量子纠缠态度量也是人们研究的课题之一. 最近几年提出了一些度量纠缠的方法, 如计算纯态系统纠缠的 Von Neumann 熵、纠缠相对熵、密度算符之间的距离<sup>[7]</sup>、共生纠缠度<sup>[8]</sup>、部分转置矩阵负本征值<sup>[9]</sup>等. 原子与场的纠缠最初只是考虑系统处于纯态的情况, 但是系统难免与外界环境发生相互作用, 因此研究混合态的纠缠有更重要的意义. 最近, Caf<sup>[10]</sup>研究了在 J-C 模型中处于混态的原子与压缩场之间的纠缠, 向少华等<sup>[11]</sup>研究了推广的 J-C 模型中原子纠缠的时间演化和热纠缠态, Boukobza 等<sup>[12]</sup>研究了 J-C 模型中的纠缠和熵的变化, 宋军等<sup>[13]</sup>研究了两纠缠原子与二项式光场相互作用的动力学, 单传家等<sup>[14]</sup>对单光子 T-C 模型中两原子之间的纠缠演化进行了研究.

文献[14]考虑的是原子在处于 Fock 态的单模

腔场中发生单光子跃迁, 由于 Fock 态光场不易制备, 所以本文考虑了两纠缠原子通过多光子跃迁与处在相干态的单模光场相互作用, 并且两原子之间存在偶极相互作用的情况, 研究了腔中两原子的纠缠演化特性. 利用数值计算得出腔中两原子的纠缠与初始两原子的状态、原子间的偶极相互作用、跃迁光子数以及相干光场的相干参数有关, 并且发现多光子跃迁比单光子跃迁能更好地保持两纠缠原子的纠缠.

## 2. 理论模型及其体系的波函数

本文考虑两个二能级原子通过多光子跃迁与单模相干光场相互耦合的系统(称之为多光子 T-C 模型), 假设两原子间的距离小于场的波长, 因而原子的偶极-偶极相互作用不可忽略, 这时系统的哈密顿量可写为

$$H = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \omega_i \sigma_i^z + H_I, \quad (1)$$

$$H_I = \sum_{i=1}^2 g_i [(a^\dagger)^m \sigma_i^- + a^m \sigma_i^+] + \Omega \sum_{i \neq j=1}^2 \sigma_i^- \sigma_i^+, \quad (2)$$

\* 国家自然科学基金重点项目(批准号 10534030)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yjxia@mail.qfnu.edu.cn

其中  $\omega_1, \omega_2$  分别为两原子的本征跃迁频率,  $|e\rangle$  和  $|g\rangle$  分别为二能级原子的激发态和基态, 且

$$\begin{aligned}\sigma_1^z &= |e_1\rangle\langle e_1| - |g_1\rangle\langle g_1|, \\ \sigma_1^- &= |g_1\rangle\langle e_1|, \quad \sigma_1^+ = |e_1\rangle\langle g_1| \quad (3)\end{aligned}$$

分别为第一个原子的赝自旋算符,

$$\begin{aligned}\sigma_2^z &= |e_2\rangle\langle e_2| - |g_2\rangle\langle g_2|, \\ \sigma_2^- &= |g_2\rangle\langle e_2|, \quad \sigma_2^+ = |e_2\rangle\langle g_2| \quad (4)\end{aligned}$$

分别为第二个原子的赝自旋算符;  $g_i$  为原子与相干光场的耦合系数,  $\Omega$  为原子间的偶极-偶极相互作用, 取  $\hbar = 1$ .

为简单起见, 考虑  $\omega_1 = \omega_2 = m\omega$ ,  $g_1 = g_2 = g$  的情况, 初始时刻 ( $t = 0$ ), 两原子处于纠缠态, 光场处于相干态  $|\alpha\rangle$ , 则原子与光场总的态矢可以表示为

$$|\psi(0)\rangle = (\cos\theta|e_1\rangle|g_2\rangle + \sin\theta|g_1\rangle|e_2\rangle) \otimes |\alpha\rangle, \quad (5)$$

其中  $|\alpha\rangle = \sum_n F_n |n\rangle$ ,  $F_n = e^{-|\alpha|^2/2} \alpha^n / \sqrt{n!}$ .

随着时间的演化, 在相互作用绘景中  $t > 0$  时刻系统态矢可以表示为

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n \{C_{1n}|e_1\rangle|e_2\rangle|n-m\rangle + C_{2n}|e_1\rangle|g_2\rangle|n\rangle + C_{3n}|g_1\rangle|e_2\rangle|n\rangle + C_{4n}|g_1\rangle|g_2\rangle|n+m\rangle\}. \quad (6)$$

将(2)和(6)式代入相互作用绘景的薛定谔方程

$$i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H_I|\psi(t)\rangle, \quad (7)$$

并利用  $|e_1\rangle|e_2\rangle|n-m\rangle, |e_1\rangle|g_2\rangle|n\rangle, |g_1\rangle|e_2\rangle|n\rangle, |g_1\rangle|g_2\rangle|n+m\rangle$  之间的正交性关系得

$$\begin{aligned}i\frac{\partial C_{1n}}{\partial t} &= g\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}(C_{2n} + C_{3n}), \\ i\frac{\partial C_{2n}}{\partial t} &= g\sqrt{\frac{(n+m)!}{n!}}C_{4n} \\ &\quad + g\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}C_{1n} + \Omega C_{3n}, \\ i\frac{\partial C_{3n}}{\partial t} &= g\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}C_{1n} \\ &\quad + g\sqrt{\frac{(n+m)!}{n!}}C_{4n} + \Omega C_{2n}, \\ i\frac{\partial C_{4n}}{\partial t} &= g\sqrt{\frac{(n+m)!}{n!}}(C_{2n} + C_{3n}). \quad (8)\end{aligned}$$

考虑到初始条件(5)式, 则上述微分方程的解为

$$C_{1n} = \frac{g\sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}}}{\Delta} F_n (\cos\theta + \sin\theta) (e^{iat} - e^{ibt}),$$

$$\begin{aligned}C_{2n} &= \frac{\cos\theta - \sin\theta}{2} F_n e^{i\Omega t} + \frac{-2\alpha(\cos\theta + \sin\theta)}{2\Delta} F_n e^{iat} \\ &\quad + \frac{\kappa(\cos\theta + \sin\theta)}{2\Delta} F_n e^{ibt}, \\ C_{3n} &= \frac{\sin\theta - \cos\theta}{2} F_n e^{i\Omega t} + \frac{-2\alpha(\cos\theta + \sin\theta)}{2\Delta} F_n e^{iat} \\ &\quad + \frac{\kappa(\cos\theta + \sin\theta)}{2\Delta} F_n e^{ibt}, \\ C_{4n} &= \frac{g\sqrt{\frac{(n+m)!}{n!}}}{\Delta} (\cos\theta + \sin\theta) \\ &\quad \times F_n (e^{iat} - e^{ibt}), \quad (9)\end{aligned}$$

其中  $a = \frac{-\Omega - \Delta}{2}$ ,  $b = \frac{-\Omega + \Delta}{2}$ , 而

$$\Delta = \sqrt{8g^2 \frac{n!}{(n-m)!} + \Omega^2 + 8g^2 \frac{(n+m)!}{n!}}. \quad (10)$$

这样将(9)式代入(6)式, 我们就得到了任意  $t > 0$  时刻的耦合系统的态矢.

### 3. 数值计算与理论分析

本文考虑的是两个子系统构成的复合系统的混态, 我们采用了 A. Press 提出的用部分转置矩阵的负本征值判断纠缠的方法, 即对于用密度矩阵  $\rho$  表示的两个子系统, 纠缠可以用部分转置矩阵的负本征值来定义

$$E = -2 \sum_i \mu_i^-, \quad (11)$$

其中  $\mu_i^-$  是部分转置矩阵  $\rho$  的负本征值, 若  $E = 0$ , 两个子系统是分离的; 若  $E = 1$ , 则说明两个子系统处于最大纠缠; 若  $0 < E < 1$ , 两个子系统是纠缠的.

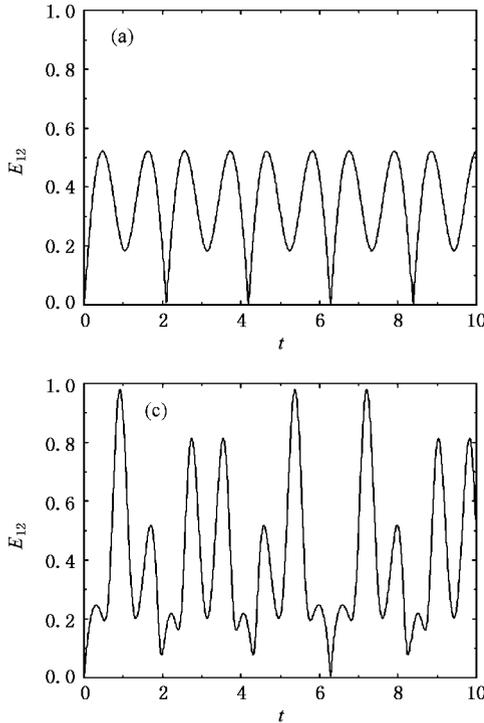
对(6)式中的光场求迹可得到两原子的约化密度矩阵

$$\begin{aligned}\rho_{12} &= \sum_n \{ |C_{1n}|^2 |e_1\rangle\langle e_2| |e_2\rangle\langle e_1| \\ &\quad + |C_{2n}|^2 |e_1\rangle\langle g_2| |g_2\rangle\langle e_1| \\ &\quad + |C_{3n}|^2 |g_1\rangle\langle e_2| |e_2\rangle\langle g_1| \\ &\quad + |C_{4n}|^2 |g_1\rangle\langle g_2| |g_2\rangle\langle g_1| \\ &\quad + C_{2n}C_{3n}^* |e_1\rangle\langle g_2| |e_2\rangle\langle g_1| \\ &\quad + C_{3n}C_{2n}^* |g_1\rangle\langle e_2| |g_2\rangle\langle e_1| \}, \quad (12)\end{aligned}$$

对(12)式中的第二个原子做转置, 可以求出部分转置矩阵  $\rho_{12}^T$  的负本征值, 然后利用(11)式计算出两原子纠缠量  $E_{12}$  的表达式

$$E_{12} = \sqrt{\left(\sum_n |C_{1n}|^2\right)^2 + 4\sum_n C_{2n} C_{3n}^* \sum_n C_{3n} C_{2n}^* - 2\sum_n |C_{4n}|^2 \sum_n |C_{1n}|^2 + \left(\sum_n |C_{4n}|^2\right)^2 - \sum_n |C_{1n}|^2 - \sum_n |C_{4n}|^2}, \quad (13)$$

然后对(13)式作数值计算,可得到两原子纠缠量



$E_{12}$  的演化规律如图 1 至图 4 所示。

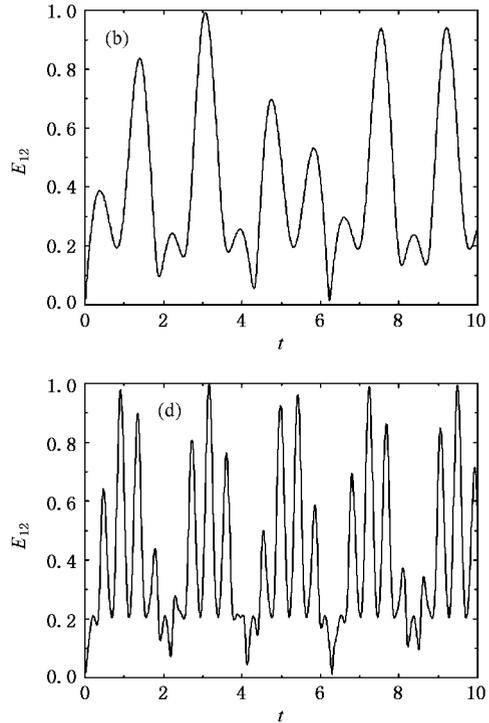


图 1 两原子纠缠量随时间的演化(其中  $g=1, \Omega=1, \alpha=0$ ) (a)  $m=1, \theta=0$  (b)  $m=2, \theta=0$  (c)  $m=3, \theta=0$  (d)  $m=4, \theta=0$

比较图 1 至图 4 可以看出两原子纠缠量呈现以下的演化特性。

### 3.1. 两原子的纠缠量与跃迁光子数 $m$ 有关

图 1 和图 2 描述的是改变跃迁光子数  $m$  后,腔中两原子纠缠量随时间的演化,可以看出:当  $\theta=0$  时,两原子初始处于分离状态,当原子进入腔中后,对于  $m=1$  的情况,在文献[14]中描述到两原子的纠缠出现了明显的周期性变化(图 1(a)),纠缠度先增加后减少,减少到某值后继续增大,然后再减小直到完全分离,但不能达到最大纠缠。而从图 1(b), (c)(d)可以看出,在  $m>1$  (多光子跃迁)的情况下,原子纠缠的周期随着  $m$  的增加变小,但是不如单光子跃迁下的周期变化明显,并且多光子跃迁下纠缠度的变化幅度也变大了((a)与(b)),有时甚至可以接近最大纠缠,而且两原子纠缠相对于单光子跃迁来说不容易退纠缠。

当  $\theta = \frac{\pi}{8}, \theta = \frac{5\pi}{8}$  时,两原子初始处于非最大纠缠态,当原子进入腔中后,从纠缠度的演化曲线明显可以看出,随着  $m$  的增大演化周期明显变短(图 2(a)和(c)),初始两原子的纠缠量是相同的,但进入腔后,却发生了很大的变化。图 2(a)和(c)中的原子纠缠量一直减小到 0,达到退纠缠状态,而图 2(b)和(d)却正好相反,两原子的纠缠量增大并且纠缠度不会低于两原子初始的纠缠度。这是由于当  $\theta > \frac{\pi}{2}$  时,

$\cos\theta$  和  $\sin\theta$  异号,两原子都处在基态的概率很小,会出现图形中的现象。这里需要指出的是,比较图 2(a)和(c),可以看出单光子跃迁纠缠度永远不会大于初始两原子的纠缠度,可是多光子跃迁时在很多时刻两原子的纠缠度都可以大于初始两原子的纠缠度,甚至可以达到最大纠缠。比较图 2(b)和(d),单光子跃迁情况下两原子纠缠度永远不会达到最大纠缠。

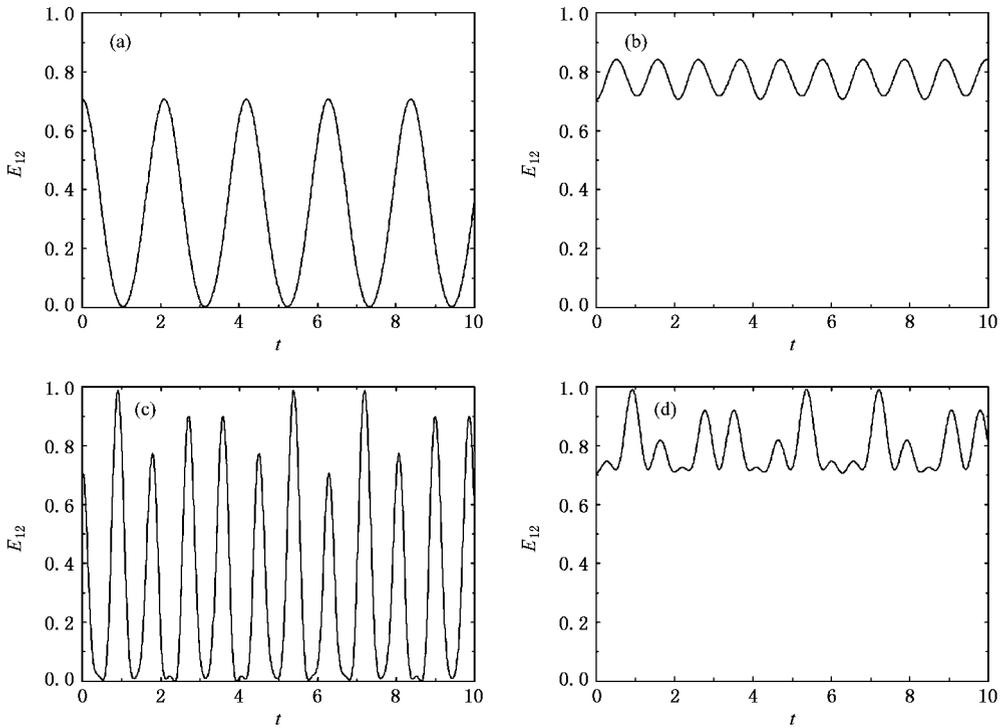


图2 两原子纠缠量随时间的演化( $g=1, \Omega=1, \alpha=0$ ) (a)  $m=1, \theta=\frac{\pi}{8}$  (b)  $m=1, \theta=\frac{5\pi}{8}$  (c)  $m=3, \theta=\frac{\pi}{8}$  (d)

$$m=4, \theta=\frac{5\pi}{8}$$

缠,可是多光子跃迁时两原子的纠缠度可以达到最大纠缠.

### 3.2. 相干光场的相干参数对两原子纠缠量的影响

图3描述的是两原子纠缠量随时间和相干态参数的演化,可以看出(a)描述的是 $\theta=0$ 时两原子的纠缠演化,此种情况下,两原子的初始纠缠为零,但演化过程中,仍能达到较大的纠缠量,甚至在 $\alpha=0$ 附近有时可能达到最大纠缠.随着 $|\alpha|$ 的增大,两原子纠缠量的变化幅度逐渐变小,甚至长时间达到退纠缠(c)描述的是 $\theta=\frac{5\pi}{8}$ 时两原子的纠缠演化,两原子一直处于较大的纠缠,有时可以达到最大纠缠.(b)和(d)分别描述的是 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 和 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时两原子纠缠的演化,两原子初始时纠缠量都处于最大纠缠,但是两原子纠缠量的演化绝然不同.在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时,原子纠缠量随时间发生振荡,而 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时,两原子纠缠始终处在最大纠缠.这是由于

$$H_I |\psi(0)\rangle = g \sum_n F_n \left\{ \sqrt{\frac{(n+m)!}{n!}} (\cos\theta + \sin\theta) \right.$$

$$\begin{aligned} & \times |g_1, g_2, n+m\rangle \\ & \left. + \sqrt{\frac{n!}{(n-m)!}} (\cos\theta - \sin\theta) |e_1, e_2, n-m\rangle \right\} \\ & + \Omega \sum_n F_n (\cos\theta |g_1, e_2, n\rangle \\ & + \sin\theta |e_1, g_2, n\rangle). \end{aligned} \quad (14)$$

由(14)式可以看到只有在 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时, $\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,  
 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,满足

$$H_I |\psi(0)\rangle = -\Omega |\psi(0)\rangle. \quad (15)$$

可见此时 $|\psi(0)\rangle$ 是相互作用绘景中系统相互作用哈密顿量的本征态,所以在演化过程中两原子始终处于该最大纠缠.从物理图像上看,当 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 时,一方面两原子被激发到高能态和辐射到基态时都有可能,故过程发生后系统的状态不发生改变,处于初始的最大纠缠态;另一方面,在这一过程中一个原子被激发和另一个原子辐射的概率幅大小相等,相位相反,两者产生干涉相消.所以在演化过程中两原子始终处于最大纠缠态. $|\psi(0)\rangle$ 态在腔中演化的这种不变性,我们可用来作为一种量子存储器.

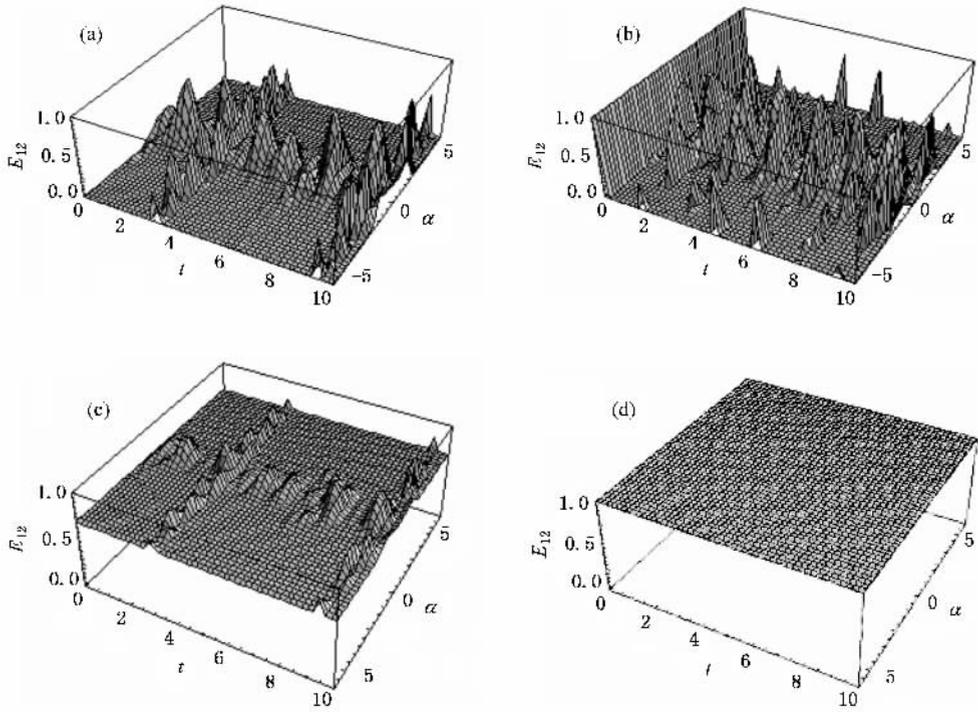


图3 两原子纠缠量随时间和相干态参数的演化(其中  $g=1, \mu=1, m=2$ ) (a)  $\theta=0$  (b)  $\theta=\frac{\pi}{4}$  (c)  $\theta=\frac{5\pi}{8}$  (d)  $\theta=\frac{3\pi}{4}$

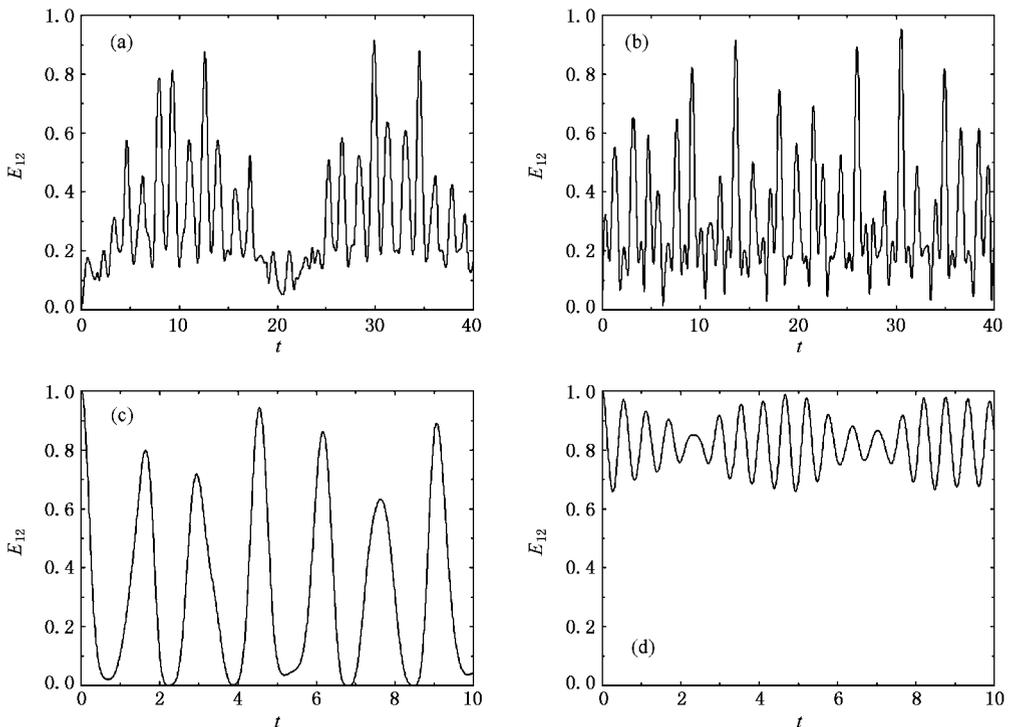


图4 两原子纠缠量随时间的演化(其中  $g=1, m=2, \alpha=0.5$ ) (a)  $\Omega=0.1, \theta=0$  (b)  $\Omega=1, \theta=0$  (c)  $\Omega=1, \theta=\frac{\pi}{4}$  (d)  $\Omega=10, \theta=\frac{\pi}{4}$

### 3.3. 原子纠缠受原子间偶极-偶极相互作用强度的影响

图 4 描述的是改变原子间偶极-偶极相互作用强度后,腔中两原子纠缠随时间的演化.随着原子间偶极-偶极相互作用强度  $\Omega$  的减小,从图 4(a)和(b)可以看出,原子的纠缠量变化周期变长,并且当原子间偶极-偶极相互作用强度  $\Omega$  远小于原子与场的耦合常数时,两原子纠缠量变化出现相对稳定的振荡,较好的使两原子处于纠缠状态.随着原子间偶极-偶极相互作用强度  $\Omega$  的增加,纠缠度演化的周期明显变短,初始纠缠的两原子在偶极-偶极相互作用较小时可以演化为退纠缠,偶极-偶极相互作用变大后,两原子一直处在较大纠缠的状态(如图 4(c)和(d)).这是由于原子间偶极-偶极相互作用强度  $\Omega$  远大于原子与场的耦合常数时,使两原子与场之间的作用减弱,从而两原子间强烈纠缠.可见,原子间偶极-偶极相互作用对两原子纠缠的影响是一种非线性效应.

## 4. 结 论

本文通过对多光子 T-C 模型中两纠缠二能级原

子与单模相干光场相互作用系统状态波函数的计算和对两原子纠缠演化特性的分析,我们得到纠缠原子的初始状态、相干光场的相干参数、跃迁光子数以及原子间的偶极-偶极相互作用对两原子间的纠缠量有影响.结果表明:当初始相干光场为真空场时,随着跃迁光子数的增加,两原子纠缠量的演化周期变短,在纠缠原子的初始状态不同时( $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{8}, \theta = \frac{5\pi}{8}$ )多光子跃迁比单光子跃迁的情况下的纠缠量的变化幅度变大,有时甚至可以达到最大纠缠;当  $\theta = \frac{3\pi}{4}$  时,两原子可以始终处于最大纠缠,与相干参数和跃迁光子数无关,这一最大纠缠态可以作为一种量子信息存储器;原子间偶极-偶极相互作用变大,会减弱原子与场之间的耦合作用,使两原子一直处于纠缠态.本文对两原子与腔的相互作用的纠缠量问题进行了研究,对于纠缠态的制备和量子远程通讯等领域的研究可提供一定的指导意义.

- [ 1 ] Zhang Y ,Cao W C ,Long G L 2005 *Commun. Theor. Phys.* **44** 625  
 [ 2 ] Zhang Y ,Cao W C ,Long G L 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 2143  
 [ 3 ] Bennett C H ,Brassard G ,Crépeau C *et al* 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895  
 [ 4 ] Zhang Q ,Zhang E Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1684 ( in Chinese )  
 [ 张 权、张尔扬 2002 物理学报 **51** 1684 ]  
 [ 5 ] Ye L ,Guo G C 2002 *Chin. Phys.* **11** 996  
 [ 6 ] Grover L K 1997 *Phys. Rev. Lett.* **79** 325  
 [ 7 ] Knoll L 1995 *Phys. Rev. A* **51** 1622  
 [ 8 ] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245

- [ 9 ] Lee J Y ,Kim M S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4236  
 [ 10 ] Cai J F ,Zou J 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1584  
 [ 11 ] Xiang S H ,Yang X ,Song K H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1289 ( in Chinese ) [ 向少华、杨 雄、宋克慧 2004 物理学报 **53** 1289 ]  
 [ 12 ] Boukobza E ,Tannor D J 2005 *Phys. Rev. A* **71** 63821  
 [ 13 ] Song J ,Cao Z L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 696 ( in Chinese )  
 [ 宋 军、曹卓良 2005 物理学报 **54** 696 ]  
 [ 14 ] Shan C J ,Xia Y J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1585 ( in Chinese ) [ 单 传家、夏云杰 2006 物理学报 **55** 1585 ]

# The entanglement character of two entangled atoms in multiphoton Tavis-Cummings model<sup>\*</sup>

Zhang Ying-Jie Zhou Yuan Xia Yun-Jie<sup>†</sup>

( College of Physics and Engineering ,Qufu Normal University ,Qufu 273165 ,China )

( Received 15 March 2007 ; revised manuscript received 16 April 2007 )

## Abstract

We investigated the entanglement time evolution of two entangled two-level atoms. The two atoms can undergo multiphoton transition when they interact resonantly with a single-mode field in the coherent state. The results show that the two-atom entangled state evolves periodically. The influence of the two-atom initial state, the dipole-dipole coupling intensity between two atoms, the parameter of the coherent state and the number of the transitional photons on the entanglement degree of two atoms are revealed. When the initial state is a maximum entangled state, the state of the two entangled atoms will forever stay in this maximum entangled state. So this kind of entanglement state can be used for quantum information storage.

**Keywords** : quantum entanglement , negative eigenvalues of the partial transposition , entangled atoms , coherent state

**PACC** : 0365 , 4250

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Key Program of National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 10534030 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail : yjxia@mail.qfnu.edu.cn