第 57 卷 第 1 期 2008 年 1 月
1000-3290/2008/57(01)/0042-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.1, January, 2008

非线性恢复力耦合的振动系统广义同步与参数识别*

秦卫阳　王红瑾　高行山

(西北工业大学工程力学系，西安　710072)

(2007 年 4 月 19 日收到；2007 年 4 月 26 日收到修改稿)

对于一类非线性恢复力无法精确解析表达的简谐激励振动系统，建立了由原系统非线性恢复力激振的派生系统．证明了派生系统与原系统可以达到广义同步．派生系统可以自动与激励力频率、大小变化的原非线性振动系统保持广义同步．证明了由派生系统的广义同步，可以识别出原系统的阻尼系数、激振力幅值与频率．由 Duffing 系统的仿真计算结果可以看出，这种方法是有效的，而且识别精度较高．

关键词：非线性恢复力，广义同步，混沌

PACC：0545

1. 引　　言

近 20 年来，对非线性混沌同步的研究发展很快，取得了很多有意义的成果[1—10]．除了非线性混沌的完全同步以外，还出现了混沌的广义同步、相同步、预先同步、滞后同步等．非线性系统的广义同步指的是两个非线性系统的响应之间保持某种函数关系[11]．由于广义同步的普遍性及易于实现，其研究也受到重视．在应用方面，利用混沌同步来识别系统的未知参数一直是一个研究热点[12—15]，最新的研究成果证明可以利用广义同步诊断平板上的裂纹[16]．目前在实现非线性系统的同步时，往往要求给出系统的精确解析表达式，以便建立准确的控制方法．这对于实际的非线性振动系统是很困难的．振动系统的非线性往往体现在其非线性弹性恢复力上，虽然已经提出了很多模型，但是目前仍然无法给出十分准确的解析表达式．而且实际中振动系统的外激振力的幅值、频率经常会发生波动，如何保证派生系统在这种情况下保持与原系统的同步也是一个问题．这些都给利用同步来识别振动系统参数带来了困难．

但在另一方面，振动测试技术的发展，使得振动系统的弹性恢复力可以利用传感器测量直接得到，这样就有可能在不需要非线性弹性力的精确模型情况下构造同步派生系统．本文基于此，设计了派生系统，采用广义同步的方法来确定系统的参数，如阻尼系数、激振力等．而且派生系统可以随着原系统激振力幅值、频率的变化自动与原系统保持广义同步．

2. 派生系统的建立

含非线性恢复力的简谐激振振动系统一般可以表示为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + p(x) = f\cos\omega t, \tag{1}$$

其中 c 为阻尼系数，$p(x)$ 为等效非线性恢复力，f 为激振力的幅值，ω 为激振力的频率．

可建立如下的派生系统：

$$\ddot{y} + c_2\dot{y} + k_2(y + x) = p(x), \tag{2}$$

其中 c_2，k_2 为正实数，k_2 可以根据需要选择．

如果 $c_2 = c$，那么(1)式加(2)式有

$$\ddot{e} + c\dot{e} + k_2 e = f\cos\omega t, \tag{3}$$

其中 $e = x + y$．令 $c = 2\zeta\omega_0$，$k_2 = \omega_0^2$，则(3)式变为

$$\ddot{e} + 2\zeta\omega_0 e + \omega_0^2 e = f\cos\omega t. \tag{4}$$

这是一个单自由度的线性系统的强迫振动方程，其理论解为

$$e = e_1 + e_2, \tag{5}$$

* 国家自然科学基金(批准号：10372079)和航空科学基金(批准号：03C53016)资助的课题．

e_1 为其齐次方程的解，e_2 为其特解. 其表达式分别为

$$e_1 = \exp(-\zeta\omega_0 t)(B\cos qt + D\sin qt), \quad (6)$$

其中 $q = \sqrt{1-\zeta^2}\,\omega_0$，$B$，$D$ 为常数，可以由初始条件确定. 而

$$e_2 = A\cos(\omega t - \psi), \quad (7)$$

其中，$A = \dfrac{f}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+(2\zeta\omega_0\omega)^2}}$，$\tan\psi = \dfrac{2\zeta\gamma}{1-\gamma^2}$，

而 $\gamma = \dfrac{\omega}{\omega_0}$. 对于 e_1，可以看出，$\exp(-\zeta\omega_0 t)$ 是指数衰减函数，随时间快速衰减. 而 $B\cos qt + D\sin qt$ 是有界函数，因此有 $\lim\limits_{t\to\infty} e_1 = 0$. 所以当时间足够长时，有 $e = e_2$，也就是说，除了初始的一段时间外，有

$$x + y = A\cos(\omega t - \psi). \quad (8)$$

由(8)式可以看出，派生系统的响应与原系统的响应之和始终为一个正弦函数，或者说派生系统与原系统实现了广义同步. 由于派生系统是由原系统的恢复力激振的，与原系统的激振力无直接关系，因此原系统激振力的变化，比如激振力幅值、频率的变化，都不会对这种广义同步产生影响，也就是说派生系统会自动与原系统保持这种广义同步关系. 如果知道原系统的响应，以及计算得到派生系统的响应，利用(8)式，就能够识别出原系统激振力的幅值 f 和频率 ω.

如果 $c_2 \neq c$，令 $\Delta c = c_2 - c$ 那么(1)式加(2)式有

$$\ddot{e} + c_2\dot{e} + k_2 e = \Delta c \cdot \dot{x} + f\cos\omega t. \quad (9)$$

如果原系统的响应是混沌的，那么 $\dot{x}$ 就是混沌运动，所以(9)式为一个线性系统在混沌与简谐激励下的响应，其响应也必然是混沌的. 如果原系统不是混沌运动，则可以调整激振力，使得原系统出现复杂的非线性响应，此时由于 $\dot{x}$ 的复杂非线性，(9)式也会出现复杂的非线性响应，与只有简谐激振下的响应会截然不同. 利用这一特点，可以识别出原系统的阻尼系数.

由上面的分析可以看出，对于含非线性恢复力的简谐激振的振动系统，可以构造一个由原系统非线性恢复力激振的派生系统，派生系统可以自动与原系统保持广义同步. 利用存在的广义同步关系，可以由原系统与派生系统的响应来识别出原系统的阻尼系数、激振力幅值和频率.

3. 仿真计算

采用 Duffing 系统进行仿真计算. Duffing 系统的表达式为

$$\ddot{x} + c\dot{x} + x - x^3 - f \cdot a = f\cos\omega t, \quad (10)$$

其非线性恢复力为 $p(x) = x - x^3 - f \cdot a$. 在 $c = 0.5$，$a = 0.2$，$\omega = 0.8$，$f = 0.317$ 时，此 Duffing 系统会出现混沌运动(图 1).

建立派生系统如下：

$$\ddot{y} + c_2\dot{y} + y + x = p(x), \quad (11)$$

此时 $k_2 = 1$，其响应也为混沌运动(图 2). 如果两个系统的阻尼系数相同，则会出现广义同步现象，两个系统响应之和为一周期函数(图 3).

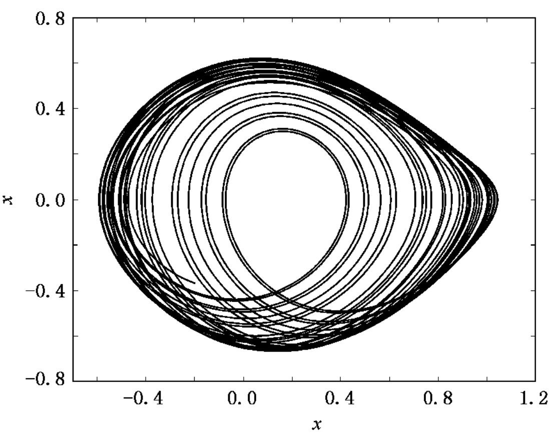

图 1　原 Duffing 系统的混沌响应(相轨迹图)

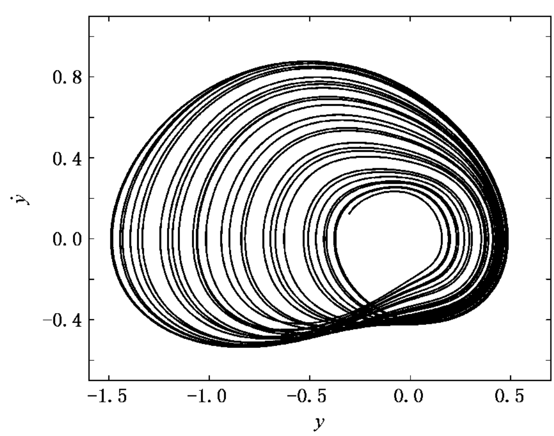

图 2　派生系统的混沌响应(相轨迹图)

3.1. 原系统阻尼系数的识别

由前面的分析可知，当 $c_2 = c = 0.5$ 时，两个系统的响应会保持广义同步，即两个系统的响应之和为一正弦函数(图 4)；而当 $c_2 \neq c$ 时，比如 $c = 0.5$，$c_2 = 0.501$ 时，两个系统响应的和会表现为混沌运动(图 5). 因此可以通过改变派生系统的阻尼系数，观察

两个系统是否广义同步来识别出原系统的阻尼系数.

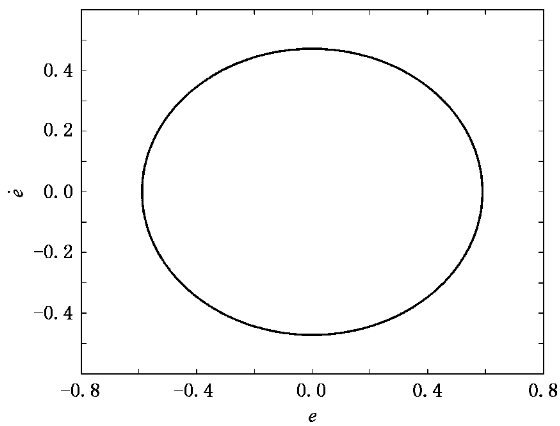

图 3 广义同步时两个系统响应之和的相轨迹图

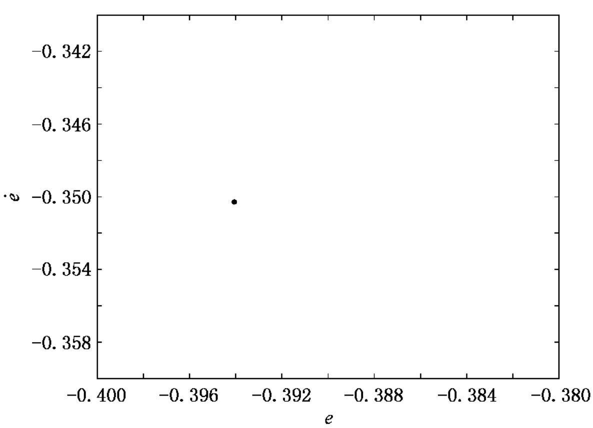

图 4 阻尼系数相同时($c_2 = c$)两个系统响应之和的 Poincare 图

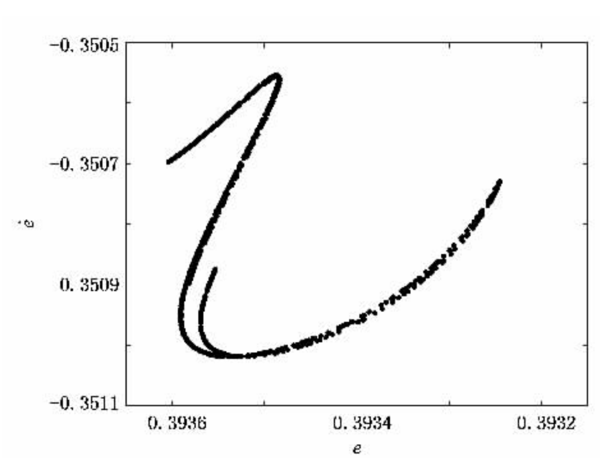

图 5 阻尼系数不同时($c_2 - c = 0.001$)两个系统响应之和的 Poincare 图

3.2. 原系统激振力幅值与频率的识别

识别出系统的阻尼系数后,可以进一步识别出系统的激振力.由前面的分析,有

$$e = x + y = A\sin(\omega t - \psi).$$

由于两个系统响应之和的频率与激振力频率完全一样,因而对两个系统响应之和进行功率谱分析就可以得到激振力的频率 $\omega = 0.8\mathrm{rad/s}$(图 6).此时

$$A = \frac{f}{\sqrt{(1 - 0.8^2)^2 + (0.5 \times 0.8)^2}} = \frac{f}{0.5381}.$$

由实际的 $e = x + y$ 响应得到其振动幅值 $A = 0.5891$(图 7),则可以计算出 $f = 0.5381 \times 0.5891 = 0.316995$,与实际的激振力幅值($f = 0.3170$)十分接近.

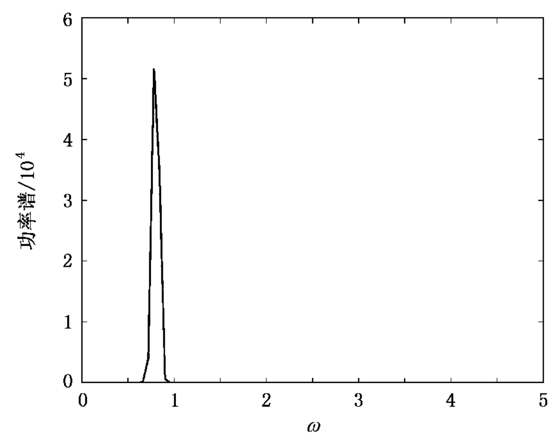

图 6 原 Duffing 系统与派生系统响应之和的功率谱图

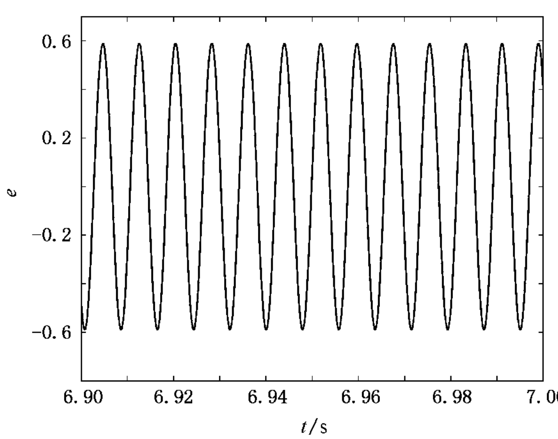

图 7 原 Duffing 系统与派生系统响应之和随时间的变化

4. 结 论

通过以上的分析及对于 Duffing 系统的仿真计算,可以得到以下结论:

1. 对于非线性振动系统,一般情况下很难得到精确的线性恢复力表达式,但是可以利用非线性恢

复力的可测性来设计派生系统，使得派生系统与原系统达到广义同步.

2. 派生系统与原系统的广义同步不受原系统激振力幅值、频率变化的影响，也就是说派生系统会自动与激振力变化的原系统保持广义同步.

3. 由派生系统与原系统的广义同步关系，可以识别原系统的阻尼系数，并进而识别出原系统的激振力频率与幅值.

[1] Boccaletti S *et al* 2002 *Phys*. *Rep*. **366** 1

[2] Cross M C *et al* 2004 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **93** 224101

[3] Carroll T L 2004 *Phys*. *Rev*. E **69** 046202

[4] Hramov A E, Koronovskii A A 2005 *Phys*. *Rev*. E **71** 67201

[5] Voss H U 2003 *Chaos* **13** 327

[6] Chen B, Liu G H, Zhang Y, Zhou Z O 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5039 (in Chinese) [陈 滨、刘光祜、张 勇、周正欧 2005 物理学报 **54** 5039]

[7] Li F, Hu A H, Xu Z Y 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 590 (in Chinese) [李 芳、胡爱花、徐振源 2006 物理学报 **55** 590]

[8] Zhang Y, Chen T Q, Chen B 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 56 (in Chinese) [张 勇、陈天麒、陈滨跃 2007 物理学报 **56** 56]

[9] Chen F X, Zhang W D 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 937

[10] Li Y *et al* 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 2890

[11] Kocarev L, Parlitz U 1996 *Phys*. *Rev*. *Lett*. **76** 1816

[12] Konnur R 2003 *Phys*. *Rev*. E **67** 027204

[13] Huang D B, Guo R W 2004 *Chaos* **14** 151

[14] Zhang Y, Tao C, Jiang J J 2006 *Chaos* **16** 043122

[15] Lü L, Guo Z A, Li Y, Xia X L 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 95 (in Chinese) [吕 翎、郭治安、李 岩、夏晓岚 2007 物理学报 **56** 95]

[16] Moniz L *et al* 2005 *Chaos* **15** 023106

Generalized synchronization by coupling of restoring force and determination of parameters in vibration systems*

Qin Wei-Yang Wang Hong-Jin Gao Hang-Shan

(*Department of Engineering Mechanics*, *Northwestern Polytechnical University*, *Xi'an* 710072, *China*)

(Received 19 April 2007; revised manuscript received 26 April 2007)

Abstract

For a class of vibration systems excited by external harmonic force, generally the restoring force cannot be given an accurate analytical expression. For such system, a derived system of generalized synchronization (GS) is set up. The GS between the two systems is proved. Since there is no time element in the equations of the derived system, the derived system can reach GS with the original system automatically, even if the frequency and amplitude of external force are varied. By using GS, a novel method to determine parameters in a vibration system, e.g., the damping coefficient and the amplitude and frequency of external exciting force, is presented and proved. From the simulation of Duffing system, it can be seen that the presented method is effective and can give a result of high accuracy.

Keywords: nonlinear restoring force, generalized synchronization, chaos

PACC: 0545

* Project supported by the National Nature Science Foundation of China (Grant No. 10372079), and the Aeronautic Science Foundation of China (Grant No. 03C53016).