

# 混沌背景中信号参数估计的新方法<sup>\*</sup>

陈 争 曾以成 付志坚

(湘潭大学材料与光电物理学院,湘潭 411105)

(2007 年 2 月 19 日收到,2007 年 4 月 25 日收到修改稿)

怎样提取混沌背景中信号的参数具有重要意义.在重构的相空间中,叠加有其他信号的混沌信号时间序列重构的点集会偏离混沌吸引子所在光滑流形.依据这一性质并综合利用混沌背景中信号本身的特性,提出一种参数估计的新方法:最小相对奇异值(MRSV)法.该方法先建立逆滤波器,由其输出重构相空间,然后改变其参数,使输出信号在嵌入空间中作局部奇异值分解的相对奇异值最小,来实现参数估计.AR 模型参数和正弦信号频率估计的仿真结果验证了该方法的有效性.

关键词:混沌,参数估计,最小相对奇异值(MRSV),逆滤波器

PACC: 0545, 0540

## 1. 引 言

混沌信号是由确定性系统产生的具有类随机性的信号,由于其潜在的应用价值而备受关注.现实中,它通常与其他信号混合,如何将混合信号中各类信号分离开来是混沌信号处理领域的重要课题.根据所关心的对象不同,此类信号分离主要包括混沌信号的噪声抑制<sup>[1-5]</sup>和混沌背景中有效信号的提取等问题<sup>[6-13]</sup>.前者关心的是混沌信号本身,而后者关心的是被混沌信号淹没的其他信号.

通常产生混沌信号的动力系统是未知的,只能观察到叠加有其他信号的混合信号时间序列.充分利用混沌信号的几何性质,即混沌吸引子所在流形的几何性质可以实现信号分离.根据 Takens 嵌入定理<sup>[14]</sup>,观察到的时间序列重构为嵌入空间中的状态向量,这些向量构成嵌入空间中的点集.当混沌信号叠加有弱噪声时,该点集偏离嵌入空间中的混沌光滑流形.光滑流形可以用流形各点的局部切空间近似.通过将点集中位于给定点小邻域内的点向该点的局部切空间投影,可以降低混沌信号中的噪声<sup>[4]</sup>.当小信号与混沌信号直接叠加时,在重构相空间中,由于小信号的影响,混合信号不在原混沌吸引子所在的光滑流形上,但又因其影响很小,混合信号会稍微偏离光滑流形.基于这点,汪芙平等借用文献[4]

的噪声抑制思想实现了混沌背景中弱信号的盲分离<sup>[11,12]</sup>.

上述方法均用到这一事实:纯混沌信号重构的点集位于产生混沌信号的动力系统的流形上,而当叠加有其他信号时,点集会偏离流形.因此,点集偏离流形的程度可以作为混沌信号中混有的其他信号强弱的依据.本文利用这一点,综合考虑叠加在混沌背景中其他信号的特性,讨论一种混沌背景中信号参数估计的新方法.

## 2. 原理及方法

用奇异值分解方法估计的局部切空间可以近似未知混沌光滑流形.时间序列重构相空间后构成的点集中任意一点,用其邻域内的点的相坐标数据构造矩阵,该矩阵奇异值分解后,按照设定的标准,可把奇异值分为显著奇异值和非显著奇异值.显著奇异值所对应奇异向量支起的空间可以作为该点局部切空间的估计,非显著奇异值所对应的奇异向量支起的空间则为相应切空间的正交补空间<sup>[4,11,12]</sup>.矩阵的奇异值可以看成矩阵的列(或行)向量在对应奇异向量方向上游弋的测量,而几个奇异值的和可以看成矩阵的列(或行)向量在对应奇异向量支起的空间中游弋的测量<sup>[4]</sup>.即显著奇异值的和可以认为是点集中给定点局部在其切空间的游弋程度,同样,非显

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号 60772015)、湖南省自然科学基金(批准号 04JJ40047)和湘潭大学科学基金(批准号 KL1054/Z10054)资助的课题.

著奇异值的和对应的是补空间的游弋程度,所以用非显著奇异值与显著奇异值的比值可以当作信号偏离光滑流形的测量.当该测量值越小时,说明信号越接近流形.在这里,定义最小奇异值与最大奇异值的比值为相对奇异值.设计一个逆滤波器,在重构相空间中,计算其输出信号局部奇异值分解的相对奇异值,通过改变逆滤波器的参数使相对奇异值最小.该过程可估计混沌背景中信号的参数,我们暂称该方法为最小相对奇异值(MRSV)方法.

设混合信号为

$$x_n = s_n(\theta) + c_n, \quad (1)$$

其中  $c_n$  为混沌信号,  $s_n(\theta)$  为有用信号,  $\theta$  为一组待估计的信号参数.建立逆滤波

$$u_n = x_n - s_n(\hat{\theta}) = (s(\theta) - s(\hat{\theta})) + c_n, \quad (2)$$

其中  $\hat{\theta}$  为参数估计值,  $s_n(\hat{\theta})$  为估计信号.(2)式右边可以看出,当  $\hat{\theta} \rightarrow \theta$  时,  $u_n \rightarrow c_n$ . 用其输出信号  $u_n$  重构相空间,比较局部相对奇异值,当该值最小时,估计的参数就等于有用信号的参数,即  $\theta = \hat{\theta}$ .

参数估计的具体步骤如下:

1)构造逆滤波系统  $u_n = x_n - s_n(\hat{\theta})$ .

2)将  $u_n$  进行  $d$  ( $d$  的选取满足 Takens 嵌入定理)维相空间重构,重构向量  $U_n = (u_n, u_{n+\tau}, \dots, u_{n+(d-1)\tau})^T$ , 其中  $\tau$  为延时.

3)对  $d$  维空间中的重构相点  $U_n$ , 选它邻域内的  $Q$  个临近相点,记为  $U_{n,1}, U_{n,2}, \dots, U_{n,Q}$ .

4)构造  $d \times Q$  阶矩阵  $W_n = [U_{n,1} - \bar{U}, U_{n,2} - \bar{U}, \dots, U_{n,Q} - \bar{U}]$ , 其中  $\bar{U} = \frac{1}{Q} \sum_{i=1}^Q U_{n,i}$ , 计算矩阵  $W_n$  的奇异值.保存其相对奇异值,记为  $\xi_n$ .

5)对重构点集中的各个相点,重复步骤 3) A). 计算相对奇异值的和  $\xi = \sum \xi_n$ .

6)在参数空间中搜索  $\hat{\theta}$ , 使  $\xi$  达最小.

### 3. 仿真和讨论

为了验证 MRSV 方法的有效性,我们对三种典型混沌源背景下的 AR 模型的参数和正弦信号频率的估计问题进行仿真.

这三种混沌源分别为

① Logistic 映射,  $y_{n+1} = 4y_n(1 - y_n)$ , 初始值  $y_0 \in (0, 1)$  取  $c_n = y_n$ ;

② Henon 映射,  $y_1(n) = 1 - ay_1(n-1) + y_2(n-1)$ ,  $y_2(n) = by_1(n-1)$ , 其中  $a = 1.4$ ,  $b = 0.3$ , 取  $c_n = y_1(n)$ ;

③ Duffing 系统,  $\ddot{y} + \gamma \dot{y} + y^3 - y = b \cos(t)$ , 其中  $\gamma = 0.5$ ,  $b = 0.6$ . 选取  $y$  的采样值作为混沌信号,采样间隔  $t_s = 0.01$  s, 即  $c_n = y(nt_s)$ .

为了便于进行比较分析,首先对混沌信号归一化,使其均值为 0, 方差为 1.

#### 3.1. AR 模型参数估计

AR 模型为

$$x_n = \sum_{i=1}^p a_i x_{n-i} + c_n, \quad (3)$$

其中  $p$  为 AR 模型的阶数,  $a_i$  为待估计的参数.此处考虑一个参数  $a_1 = 0.6$ ,  $a_2 = -0.95$  的稳定二阶 AR 模型.

首先构造一个逆 AR 模型  $u_n = x_n - \sum_{i=1}^p b_i x_{n-i}$ , 通过改变  $b_i$  的值,使  $\xi$  达到最小,从而有  $b_i \rightarrow a_i$ . 实验参数如下:混沌背景 ① 下取  $d = 2$ ,  $Q = 6$ ,  $N = 600$ ,  $\tau = 1$  (其中  $N$  为数据长度);混沌背景 ② 下  $d = 4$ ,  $Q = 6$ ,  $N = 600$ ,  $\tau = 1$ ;混沌背景 ③ 下  $d = 4$ ,  $Q = 8$ ,  $N = 6000$ ,  $\tau = 1$ . 实验结果如图 1 所示.为了清晰可见,该图绘出的是  $1/\xi$  随估计参数的变化曲线(图中只画出了搜索参数的局部).从图中可以看出在三种混沌背景下都有一尖峰恰好位于实际参数处.

为考察数据长度  $N$  对估计值精度的影响,我们对混沌背景 ① 下的不同长度的数据进行仿真.其中,参数搜索采用随机的方法,在 3000 对按标准高斯分布的二维参数中,使  $\xi$  最小的参数作为估计值.同一数据长度进行 100 次 Monte Carlo 实验,计算统计平均值.作为比较,同时给出了同样方式最小二乘(LS)参数估计,比较结果如图 2 所示(选取参数  $d = 2$ ,  $Q = 4$ ,  $\tau = 1$ ).从图中可以看出,随着数据序列长度增大,两种方法的估计值均逐渐逼近真实值,但 MRSV 方法更快地逼近真实值,数据序列长度为 50 时,就已经逼近得相当好,而 LS 方法则要数据长度在 200 以后才能很好地逼近真实值.

#### 3.2. 正弦信号频率估计

考虑在混沌背景中单一频率谐波信号的频率估计,其模型如下:

$$x_n = A \sin(2\pi f n) + c_n, \quad (4)$$

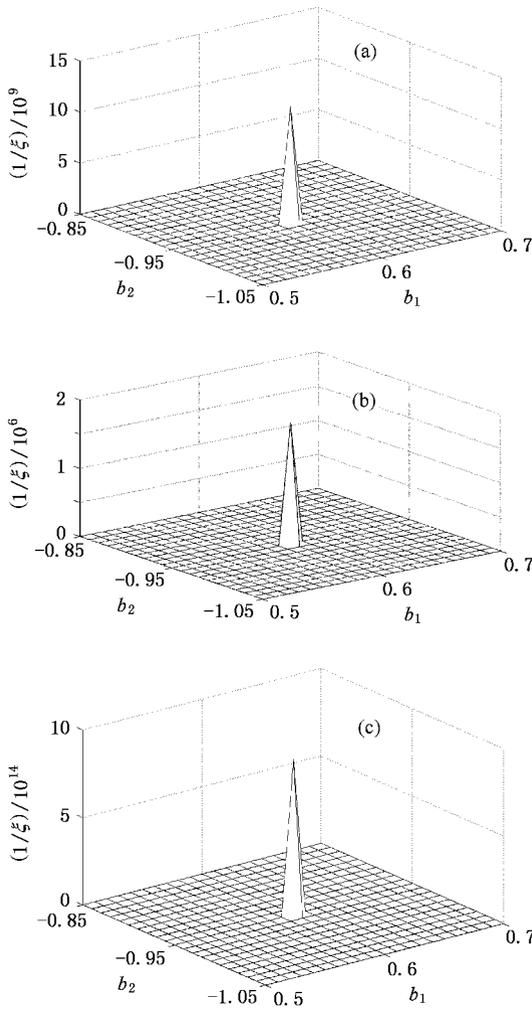


图 1 在不同混沌背景下,  $1/\xi$  随搜索参数  $b_1, b_2$  变化的曲线 (a) 混沌背景为 Logistic 映射 (b) 混沌背景为 Henon 映射 (c) 混沌背景为 Duffing 系统

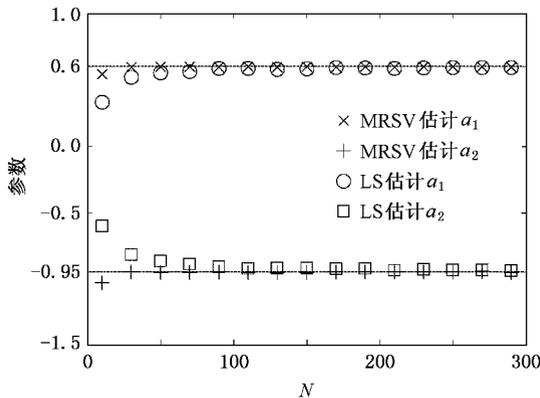


图 2 数据长度  $N$  不同的条件下, MRSV 和 LS 的对比 (真实值  $a_1 = 0.6, a_2 = -0.95$ )

其中  $A$  为正弦信号的幅值,  $f$  为待估计的归一化频率,

$c_n$  为混沌信号. 根据三角函数关系, 该模型可变为

$$\begin{aligned} x_n - 2\cos(2\pi f)x_{n-1} + x_{n-2} \\ = c_n - 2\cos(2\pi f)c_{n-1} + c_{n-2}. \end{aligned} \quad (5)$$

构造逆滤波系统

$$u_n = x_n - 2\cos(2\pi\hat{f})x_{n-1} + x_{n-2}, \quad (6)$$

其中  $\hat{f}$  为估计参数, 当  $f = \hat{f}$  时 (5) 式表明, 其输出信号为与  $c_n$  有相同拓扑维数的混沌信号. 因此, 可以在频率空间中搜索使  $\xi$  最小的  $f$  估计频率.

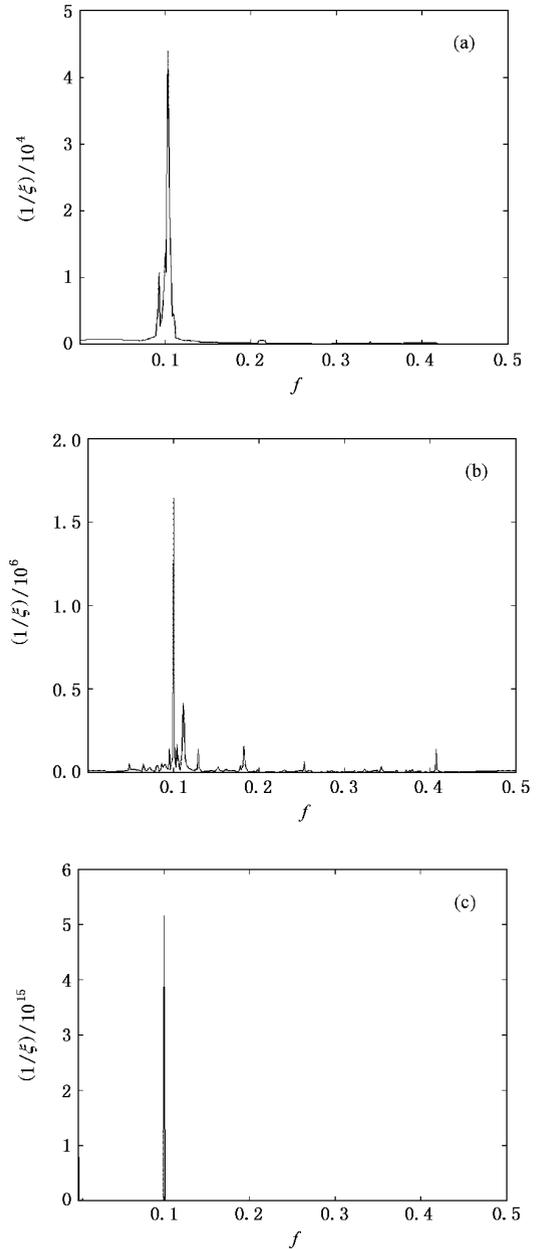


图 3 在不同混沌背景下,  $1/\xi$  随估计频率变化的曲线 (a) 混沌背景为 Logistic 映射 (b) 混沌背景为 Henon 映射 (c) 混沌背景为 Duffing 系统

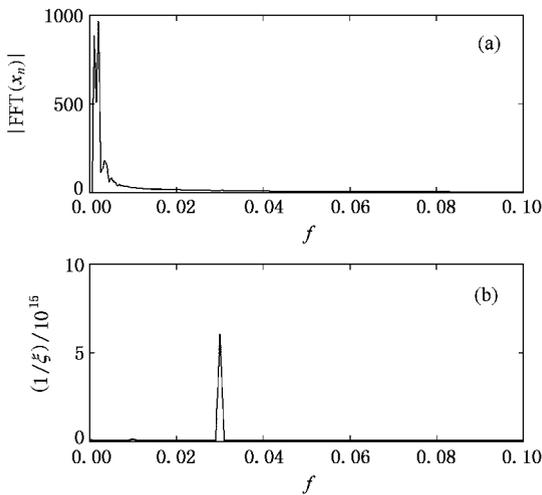


图4 MRSV 和 FFT 频率估计比较

同样在上述三种混沌背景中进行仿真,参数如下混沌背景①中  $d=2, Q=6, N=600, \tau=1$  ;混沌背景②中  $d=4, Q=6, N=600, \tau=1$  ;混沌背景③中  $d=4, Q=8, N=10000, \tau=1$  .正弦信号的参数为  $A=0.01, f=0.1$  ,此时信噪比为  $-43$  dB (混沌背景视为噪声).  $\xi$  在频率域中随频率的变化曲线如图3所

示.从图中可以看出,虽然在有些情况下  $1/\xi$  会出现多个局部极大值,但最大值均位于真实频率处,由此表明频率能很好地估计.

为研究该方法的优越性,我们将 MRSV 方法与傅里叶变换(FFT)法进行比较.在混沌背景③中选择参数  $d=4, Q=6, N=2048, \tau=1$  ,估计  $A=0.01, f=0.03$  的正弦信号频率,信噪比为  $-43$  dB (意义同前)结果如图4所示.由图可见,在该信噪比下 FFT 变换不能区分出该频率(图4(a)),而用 MRSV 方法则有明显的尖峰落在正确频率的位置处(图4(b)).

## 4. 结 论

本文提出了一种估计混沌背景中信号参数的新方法:最小相对奇异值(MRSV)法.实例仿真表明该方法能够有效地估计出混沌背景中的 AR 模型的参数和正弦信号的频率.在估计 AR 模型参数时,通过与 LS 方法的比较,较短的数据长度,本方法也能很好地估计出参数;在估计正弦信号的频率时,与 FFT 进行比较可知,本方法能有效地将 FFT 不能分辨的强混沌背景中的正弦信号的频率估计出来.

- [1] Hammel S M 1990 *Phys. Lett. A* **148** 421
- [2] Lee C, Williams D B 1997 *IEEE Trans. Circ. Syst.* **1** **44** 501
- [3] Cawley R, Hsu G H 1992 *Phys. Rev. A* **46** 3057
- [4] Grassberger P, Hegger R, Kantz H, Shaffrath C, Schreiber T 1993 *Chaos* **3** 127
- [5] Li X X, Feng J C 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 701 (in Chinese) [李雪霞、冯久超 2007 物理学报 **56** 701]
- [6] Broomhead D S, Huke J P, Jones R 1995 *Physica D* **80** 413
- [7] Leung H, Huang X P 1996 *IEEE Trans. Sig. Proc.* **44** 2456
- [8] Haykin S, Li X B 1995 *Proc. IEEE* **83** 94
- [9] Haykin S, Principe J 1998 *IEEE Signal Processing Magazine* **15** 67
- [10] Huang X G, Xu J X, He D H, Xia J L, Li Z J 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 1810 (in Chinese) [黄显高、徐健学、何岱海、夏军利、吕泽均 1999 物理学报 **48** 1810]
- [11] Wang F P, Guo J B, Wang Z J, Xiao D C, Li M T 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1019 (in Chinese) [汪芙平、郭静波、王赞基、萧达川、李茂堂 2001 物理学报 **50** 1019]
- [12] Wang F P, Wang Z J, Guo J B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 474 (in Chinese) [汪芙平、王赞基、郭静波 2002 物理学报 **51** 474]
- [13] Jiang B, Wang H Q, Li X, Guo G R 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3985 (in Chinese) [姜 斌、王宏强、黎 湘、郭桂蓉 2006 物理学报 **55** 3985]
- [14] Takens F 1981 Detecting strange attractors in turbulence, In: *Dynamical Systems and Turbulence*, Rand D, Young (ED) (Berlin: Springer) **898** 366



# A novel parameter estimation method of signal in chaotic background<sup>\*</sup>

Chen Zheng Zeng Yi-Cheng Fu Zhi-Jian

( Faculty of Material and Photoelectric Physics ,Xiangtan University ,Xiangtan 411105 ,China )

( Received 19 February 2007 ; revised manuscript received 25 April 2007 )

## Abstract

To estimate the parameters of signal in chaotic background is very important. A novel method named minimization of relative singular value ( MRSV ) is proposed in this paper , which is based both on the fact that points reconstructed from the mixed signal time series typically lie off the embedded image of the manifold for the dynamics underlying the chaotic time series , and also on the characteristic of the signal in chaotic background. The parameter estimation can be achieved by minimizing the relative singular value of the output of an inverse filter of the received signal in a reconstructed phase space. Several experiments of estimating the AR model parameters and sinusoidal signal frequency are carried out to confirm the effectiveness of the method.

**Keywords** : chaos , parameter estimation , minimization of relative singular value , inverse filter

**PACC** : 0545 , 0540

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No.60772015 ) , the Natural Science Foundation of Hunan Province ,China ( Grant No. 04JJ40047 ) and the Science Foundation of Xiangtan University ( Grant No. KL1054/Z10054 ).