

# 连续搅拌槽式反应器中自催化化学反应的延迟同步\*

李 勇 毕勤胜†

(江苏大学理学院, 镇江 212013)

(2008 年 2 月 27 日收到, 2008 年 5 月 8 日收到修改稿)

讨论了由两个连续搅拌槽式反应器组成的化学反应系统的延迟同步问题. 基于 Lyapunov 稳定性理论, 通过选择适当的输出和同步信号得到了使反应实现延迟同步的控制函数, 并用数值模拟验证了方法的有效性. 最后指出延迟同步误差系统存在着两种不同的时间尺度.

关键词: 延迟同步, 化学反应, 连续搅拌槽式反应器, 时间尺度

PACC: 0545

## 1. 引 言

近年来, 混沌研究一直是国内外研究的前沿课题之一<sup>[1,2]</sup>, 而混沌的同步与控制由于其在物理、通信、信息科学、医学、化学等领域的巨大应用潜力和发展前途, 引起了人们的广泛关注<sup>[3-6]</sup>. 实际上, 由于信息在传递过程中需要一定的时间, 即延迟总是存在的, 因此延迟同步的研究逐渐成为一个热点问题<sup>[7-9]</sup>.

在化学工程中, 对于化学反应同步与控制问题的研究能够显著地提高反应功效及选择性, 此外还可以通过把化学反应的设计和控制在基本元素, 使用最新的分岔、混沌和分形等理论工具深化对化学反应的研究. 为此许多学者做出了大量的工作, 如 Abashar 和 Judd 揭示了两个耦合连续搅拌槽式反应器(continuous stirred tank reactors, CSTR)中的同步现象<sup>[10]</sup>. 由于在反应过程中溶液运输需要一定的时间, 两个 CSTR 组成的反应系统不可能在同一时间达到同步, 因此对化学反应系统延迟同步的研究具有理论和现实的意义. 本文正是基于这样的背景, 从理论与数值模拟两方面分析连续搅拌槽式反应器中自催化化学反应的延迟同步.

## 2. 数学模型

本文采用 Lynch 提出的自催化反应系统<sup>[11]</sup>, 无

量纲化后微分方程组可以表示为

$$\begin{aligned} \frac{dx_A}{dt} &= (1 - x_A) - a_1 x_A x_B^2, \\ \frac{dx_B}{dt} &= 1 - (1 + a_3)x_B + \gamma(a_1 x_A x_B^2 + a_2 x_C x_B^2), \\ \frac{dx_C}{dt} &= \beta - x_C - a_2 x_C x_B^2, \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $x_A, x_B, x_C$  分别表征 A, B, C 三种物质,  $\gamma$  为入料溶液中 A 物质的浓度与 B 物质浓度的比,  $\beta$  为入料溶液中 C 物质的浓度与 A 物质浓度的比,  $a_1, a_2, a_3$  为无量纲参数, 其具体表达式见文献 [11].

上述方程组刻画了整个反应的演化过程, 其解对应于反应器中各成分的某种情况, 如平衡点对应于反应过程中的定常态, 即反应器中各成分的质量及浓度保持不变, 而周期解则表示反应过程中各成分的质量按照一定的频率周期性变化. 当参数  $\beta = 2.85, a_1 = 18000, a_2 = 400, a_3 = 80, \gamma = 1.47$  时系统 (1) 处于混沌状态, 见图 1.

由于在工业上许多反应器实际上是由多个 CSTR 组成的系统, 因此有必要考虑 CSTR 之间的相互影响<sup>[10]</sup>, 并设计有效的控制装置控制反应器中的反应, 使各个 CSTR 中的反应同步. 本文研究由两个完全相同的 CSTR 组成的反应器, 它们由一个控制装置连接, 为了便于研究, 我们把两个 CSTR 分别看作驱动系统  $x(t)$  和响应系统  $y(t)$ , 并用控制函数表示控制装置对单个 CSTR 反应的影响, 考虑由于溶液运输过程造成的延迟效应, 则反应系统可以由

\* 国家自然科学基金(批准号 20476041)资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail: qbi@ujs.edu.cn

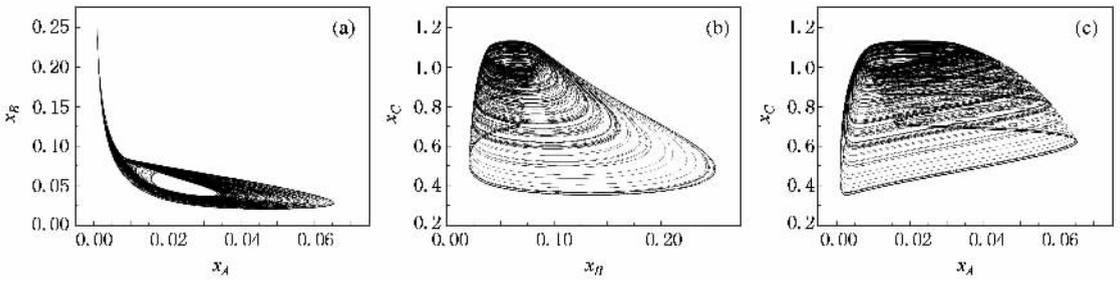


图 1  $\gamma = 1.47$  时系统 (1) 的相图 (a)  $x_A-x_B$ ; (b)  $x_B-x_C$ ; (c)  $x_A-x_C$

图 2 表示.

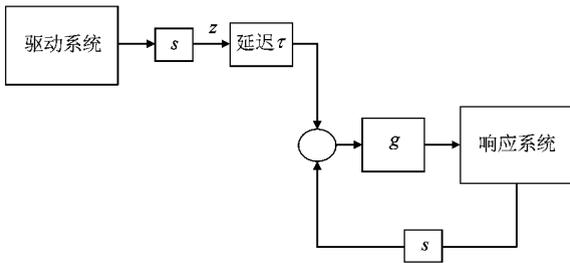


图 2 反应系统示意图

把驱动系统表示为

$$\dot{x} = F(x), \quad (2)$$

其中  $x \in R^3, F: R^3 \rightarrow R^3$  根据图 2 响应系统可以表示为<sup>[12]</sup>

$$\dot{y} = F(y) + g(z(t-\tau) - s(y)), \quad (3)$$

其中  $y \in R^3, g: R^3 \rightarrow R^3$  是控制函数,  $z(t)$  为系统 (2) 的输出信号,  $s$  为同步信号,  $\tau > 0$  为同步延迟时间.

重新定义混沌同步为响应系统在时间  $t$  时将渐近地趋向于驱动系统在时间  $t - \tau$  时的状态, 则系统 (2) 和 (3) 之间的同步误差为  $e(t) = y(t) - x(t - \tau)$ , 我们的目标是设计适当的控制函数, 使具有不同初始浓度的两个 CSTR 满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e(t)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|y(t) - x(t - \tau)\| = 0,$$

从而两系统实现延迟同步.

### 3. 控制函数设计

系统 (3) 减去系统 (2) 得到同步误差微分方程

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= \dot{y}(t) - \dot{x}(t - \tau) \\ &= F(y(t)) + g(z(t - \tau) - s(y)) - s(y) - F(x(t - \tau)). \end{aligned} \quad (4)$$

根据延迟同步的定义, 可以将混沌系统的同步

问题转化为误差系统在原点的渐近稳定性问题. 因此, 我们可以选择适当的控制函数  $g$ , 使系统 (4) 在原点渐近稳定, 即系统 (2) 和 (3) 实现延迟同步. 把系统 (2) 写为

$$\dot{x} = F(x) = Ax + M(x) + N, \quad (5)$$

式中  $Ax$  为  $F(x)$  的线性部分,  $M(x)$  为非线性部分,  $N$  为常数项.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - a_3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$M(x) = \begin{bmatrix} -a_1 x_A x_B^2 \\ \gamma(a_1 x_A x_B^2 + a_2 x_C x_B^2) \\ -a_2 x_C x_B^2 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \beta \end{bmatrix}$$

取系统 (2) 的输出信号  $z(t) = s(x)$  并选择同步信号

$$s(x) = M(x) + Kx,$$

式中  $K = \text{diag}[k_1, k_2, k_3]$  进一步令

$$\begin{aligned} g(z(t - \tau) - s(y)) &= g(s(x(t - \tau)) - s(y(t))) \\ &= s(x(t - \tau)) - s(y(t)), \end{aligned}$$

则响应系统 (3) 可变为

$$\dot{y} = Ay + M(x(t - \tau)) + K(x(t - \tau) - y) + N,$$

由系统 (4) 可以得到

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= F(y) + g(z(t - \tau) - s(y)) - F(x(t - \tau)) \\ &= Ay + M(y) + N + s(x(t - \tau)) - s(y) \\ &\quad - Ax(t - \tau) - M(x(t - \tau)) - N \\ &= Ae - Ke \\ &= Be, \end{aligned} \quad (6)$$

其中

$$B = \begin{bmatrix} -1 - k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 - a_3 - k_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 - k_3 \end{bmatrix}.$$

矩阵  $B$  的特征值分别为  $\lambda_1 = -1 - k_1$ ,  $\lambda_2 = -1 - a_3 - k_2$ ,  $\lambda_3 = -1 - k_3$ . 由系统(6)可知,  $e(t)$  的零点为平衡点, 根据线性系统稳定性准则, 当  $k_1 > -1$ ,  $k_2 > -1 - a_3$ ,  $k_3 > -1$  时, 同步误差的零点为渐进稳定, 满足  $e \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ , 此时即实现系统(2)和(3)的状态矢量的延迟同步.

## 4. 数值模拟

从上面的分析可以看出, 我们可以构造适当的控制函数, 从而设计控制装置实现两个 CSTR 中的反应同步. 下面我们数值模拟来验证上述方法的可行性. 选取参数<sup>[11]</sup>

$\beta = 2.85$ ,  $a_1 = 18000$ ,  $a_2 = 400$ ,  $a_3 = 80$ ,  $\gamma = 1.47$ . 此时只要  $k_1 > -1$ ,  $k_2 > -81$ ,  $k_3 > -1$  就满足  $B$  的所有特征值就均为负实数, 选取  $k_1 = 5.0$ ,  $k_2 = 5.0$ ,  $k_3 = 4.0$ , 同步延迟时间  $\tau = 1.0$ , 给定初值

$$\begin{aligned} & (x_A(0), x_B(0), x_C(0)) \\ &= (0.01, 0.01, 0.01), \\ & (y_A(0), y_B(0), y_C(0)) \\ &= (0.001, 0.001, 0.001), \\ & (e_A(0), e_B(0), e_C(0)) \\ &= (-0.009, -0.009, -0.009). \end{aligned}$$

图 3 给出了延迟同步误差系统  $e = (e_A, e_B, e_C)^T$  的收敛曲线.

从图 3 可以看出, 系统(2)和(3)实现了延迟同步, 同步误差  $e = [e_A, e_B, e_C]^T$  在很短的时间内快速收敛于零, 数值结果验证了理论分析. 同时还发现, 两个 CSTR 中各成分的浓度达到一致的时间是不同的,  $B$  很快实现同步, 而  $A, C$  达到同步的时间却相对较长. 这种现象可以从时间尺度上说明, 从系统(6)可以看出, 同步误差系统存在着两种不同的时间尺度, 即  $e_A, e_C$  是慢变量,  $e_B$  是快变量, 也就是说该系统存在着不同尺度上的变化频率.

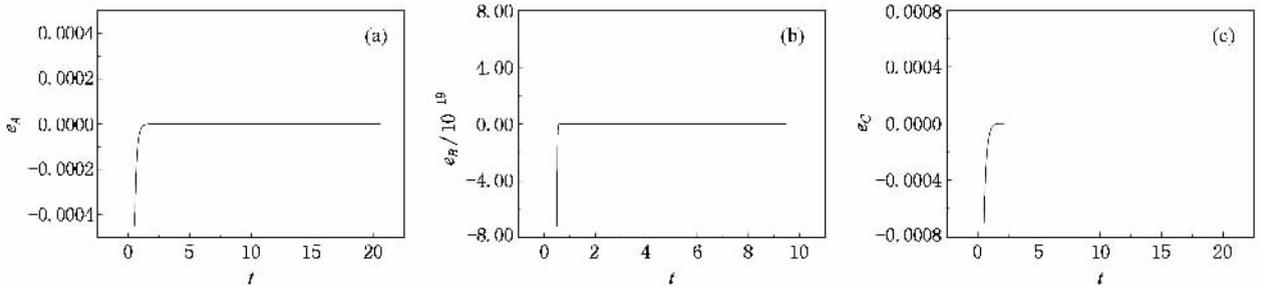


图 3 延迟同步误差时间历程图 (a)  $e_A$ ; (b)  $e_B$ ; (c)  $e_C$

## 5. 结 论

在由两个 CSTR 组成的自催化反应系统中, 依据 Lyapunov 稳定性理论, 通过构造适当的控制函数, 实现了两个初始浓度不同的 CSTR 延迟同步. 该

方法对系统无特殊要求, 并且避免了求解 Lyapunov 指数及构造 Lyapunov 函数等复杂性工作, 最后的数值模拟验证了所提出的方法是可行的, 并指出同步误差系统存在着两种不同的时间尺度. 这些结果对设计符合实际需要的反应控制装置, 从而对反应过程进行控制有一定的指导意义.

- [1] Yue L J, Shen K 2005 *Chin. Phys.* **14** 1760  
 [2] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5136 (in Chinese)  
 [王兴元、王明军 2007 物理学报 **56** 5136]  
 [3] Yu H J, Liu Y Z 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066203  
 [4] Hao J H, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3491 (in Chinese) [郝建红、李 伟 2005 物理学报 **54** 3491]  
 [5] Wang F Q, Liu C X 2006 *Chin. Phys.* **15** 1971

- [6] Ma J, Liao G H, Mo X H, Li W X, Zhang P W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5585 (in Chinese) [马 军、廖高华、莫晓华、李维学、张平伟 2005 物理学报 **54** 5585]  
 [7] Chen Y, Chen X X, Gu S S 2006 *Nonlinear Anal.* **15** 2143  
 [8] Jia F L, Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3101 (in Chinese) [贾飞蕾、徐 伟 2007 物理学报 **56** 3101]  
 [9] Shahverdiev E M, Sivaprakasam S, Shore K A 2002 *Phys. Lett. A*

292 320

[ 11 ] Lynch D T 1992 *Chem. Eng. Sci.* **47** 347[ 10 ] Abashar M E E , Judd M R 1998 *Chem. Eng. Sci.* **53** 3741[ 12 ] Li C D , Liao X F 2004 *Phys. Lett. A* **329** 301

## Lag synchronization of autocatalytic chemical reaction in continuous stirred tank reactors<sup>\*</sup>

Li Yong Bi Qin-Sheng<sup>†</sup>

( Faculty of Science , Jiangsu University , Zhenjiang 212013 , China )

( Received 27 February 2008 ; revised manuscript received 8 May 2008 )

### Abstract

The problem of lag synchronization for chemical reaction system composed of two continuous stirred tank reactors is proposed. Based on Lyapunov stability theory , the controller which can make the reaction reach the lag synchronization state is obtained by suitably selecting the output and the synchronous signals. Numerical simulations are performed to demonstrate the effectiveness of the proposed scheme. Finally it is pointed out that there exist two different time scales in the error system of lag synchronization.

**Keywords** : lag synchronization , chemical reaction , continuous stirred tank reactors , time scale

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 20476041 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [qb@ujs.edu.cn](mailto:qb@ujs.edu.cn)