

三维各向异性超常媒质交错结构的 亚波长谐振特性研究*

孟繁义[†] 吴 群 傅佳辉 顾学迈 李乐伟

(哈尔滨工业大学电子与信息技术研究院, 哈尔滨 150001)

(2008 年 1 月 21 日收到, 2008 年 3 月 26 日收到修改稿)

以填充各向异性超常媒质矩形波导中的电磁场解为基础, 通过建立与求解填充各向异性超常媒质交错结构的矩形谐振腔的谐振方程, 深入研究了三维各向异性超常媒质交错结构的亚波长谐振特性. 结果发现, 三维各向异性超常媒质交错结构的亚波长谐振条件具有更为多样性的物理解, 在固定参数下, 其物理解的个数往往超过一个, 还针对谐振结构的横向尺寸对亚波长谐振条件的影响进行了讨论. 结果表明, 随着横向尺寸的减小亚波长谐振条件的物理解数量将逐渐增多直至趋于无穷. 这意味着即使超常媒质的本构参数无法控制, 仍然可以通过调节谐振结构的横向尺寸来得到亚波长谐振腔.

关键词: 各向异性, 超常媒质, 交错结构, 亚波长谐振

PACC: 3220D, 4110H

1. 引 言

近年来, 超常媒质在电磁学、光学以及材料科学等领域得到越来越多的关注^[1-4]. 超常媒质概念本身具有广泛的内涵和外延, 它既包含介电常数和磁导率同时为负的双负介质, 也包括介电常数为负、磁导率为正的负介电常数介质, 介电常数为正、磁导率为负的负磁导率介质^[5-7]. 目前, 随着人们对超常媒质电磁特性的了解, 大量的研究工作致力于利用超常媒质减小微波器件体积或占用面积^[8], 其中包括小型化贴片天线^[9]、小型化定向耦合器^[10]以及小型化移相器^[11]等. 2002 年, Engheta^[12]指出, 一维双负介质与普通介质的交错结构可以在亚波长条件下实现谐振, 即谐振结构的总长度小于半个谐振波长, 从而为基于超常媒质的亚波长谐振理论奠定了基础. Jiang 等人在 2006 年研究了三维各向同性 DNG—DPS 交错结构的谐振特性. 结果表明该三维谐振结构可以同时纵向和横向上满足亚波长条件, 从而实现了真正意义上的亚波长矩形谐振腔^[13]. 基于

Engheta 的研究结果, Jiang 等人^[14]在 2007 年更全面地研究了一维超常媒质交错结构的亚波长谐振特性, 并指出除了双负介质-普通介质结构以外, 双负介质-负介电常数介质结构、普通介质-负磁导率介质结构以及负介电常数介质-负磁导率介质结构均可以在亚波长条件下实现谐振. 只有一维的研究结果是远无法满足实际应用需要. 然而, 仍需注意的是, 从现有超常媒质的设计水平来看, 大多数的超常媒质仍然是各向异性的, 因此, 在上述研究基础上, 进一步探讨填充各向异性超常媒质交错结构矩形谐振腔的亚波长谐振条件和谐振模式具有重要的理论意义和实用价值.

基于上述原因, 本文以探究三维各向异性超常媒质交错结构的亚波长谐振条件和谐振模式为目标展开研究. 首先, 本文通过求解填充各向异性超常媒质的亚波长矩形波导的波方程, 讨论了所填充超常媒质的纵向本构参数张量对亚波长波导中的电磁波传输特性的重要影响. 其次, 通过建立与求解填充各向异性超常媒质交错结构的矩形谐振腔的谐振条件, 深入研究了三维各向异性超常媒质交错结构的

* 国家自然科学基金(批准号: 60571026), 国家博士后科学基金(批准号: 20070420158), 黑龙江省博士后科学基金(批准号: LBH-Z07083)和教育部博士点基金(批准号: 20070213058)资助的课题.

[†] E-mail: blade@hit.edu.cn

亚波长谐振特性. 结果发现: 三维各向异性超常媒质交错结构的亚波长谐振条件具有更为多样性的物理解, 并且往往同时存在两个以上的物理解, 而不像一维情况那样只具有一个物理解. 随着谐振结构横向尺寸的减小, 亚波长谐振条件的物理解数量将逐渐增多直至趋于无穷. 最后, 为了验证本研究理论推导的正确性, 分别利用推导得到的计算公式对具有某些限定条件的情况进行了计算, 并将计算结果与文献 [15] 的实验结果以及文献 [13] 的计算结果进行了比较, 均符合较好. 这为进一步发展基于超常媒质的三维亚波长谐振结构、小型化谐振腔奠定了理论基础, 具有重要的理论意义和实用价值.

2. 填充各向异性超常媒质的亚波长矩形波导

设沿 z 方向传播的矩形波导, 其 x, y 方向的长度分别为 a 和 b , 并且其内部所填充超常媒质的本构参数张量为

$$\bar{\mu} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} = \mu_0 \bar{\mu}_r, \quad \bar{\epsilon} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \bar{\epsilon}_r. \quad (1)$$

根据无源空间的麦克斯韦方程

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \bar{\mu}_r \mathbf{H}, \quad \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_0 \bar{\epsilon}_r \mathbf{E}. \quad (2)$$

并且设 $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) \exp(-\gamma z)$, $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y) \exp(-\gamma z)$, 则可以得到其相应的标量方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \gamma E_y &= -j\omega\mu_0 \mu_x H_x, \\ -\gamma E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -j\omega\mu_0 \mu_y H_y, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= -j\omega\mu_0 \mu_z H_z. \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y &= j\omega\epsilon_0 \epsilon_x E_x, \\ -\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} &= j\omega\epsilon_0 \epsilon_y E_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= j\omega\epsilon_0 \epsilon_z E_z. \end{aligned} \quad (4)$$

将 (3) 和 (4) 式相互代入就可以得到下列只与纵向场分量相关的电磁场表达式:

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{1}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_y \epsilon_x} \left(j\omega\mu_0 \mu_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x} \right), \\ E_y &= \frac{1}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_x \epsilon_y} \left(j\omega\mu_0 \mu_x \frac{\partial H_z}{\partial x} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial y} \right), \\ H_x &= \frac{1}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_x \epsilon_y} \left(j\omega\epsilon_0 \epsilon_y \frac{\partial E_z}{\partial y} - \gamma \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ H_y &= -\frac{1}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_y \epsilon_x} \left(j\omega\epsilon_0 \epsilon_x \frac{\partial E_z}{\partial x} + \gamma \frac{\partial H_z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

对于 TE 模式 (5) 式可以简化为

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{j\omega\mu_0 \mu_y}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_y \epsilon_x} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \\ E_y &= \frac{j\omega\mu_0 \mu_x}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_x \epsilon_y} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_x &= -\frac{\gamma}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_x \epsilon_y} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \\ H_y &= -\frac{\gamma}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_y \epsilon_x} \frac{\partial H_z}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6)$$

另一方面, 由 (2) 式可以得到

$$\nabla \times \bar{\epsilon}_r^{-1} (\nabla \times \mathbf{H}) = k_0^2 \bar{\mu}_r \mathbf{H}. \quad (7)$$

而由 (7) 式可以得到

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\epsilon_y} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} - \frac{1}{\epsilon_x} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} \\ + \frac{1}{\epsilon_y} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial z} + \frac{1}{\epsilon_x} \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial z} = k_0^2 \mu_z H_z. \end{aligned} \quad (8)$$

再将 (6) 式代入 (8) 式可以得到

$$\begin{aligned} \frac{k_0^2 \mu_x}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_x \epsilon_y} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} \\ + \frac{k_0^2 \mu_y}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_y \epsilon_x} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_0^2 \mu_z H_z = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

可以利用分离变量法求解上述微分方程, 结果为

$$H_z(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \times \exp(-jk_z z), \quad (10)$$

$$\frac{\mu_x}{k_0^2 \mu_x \epsilon_y - k_z^2} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \frac{\mu_y}{k_0^2 \mu_y \epsilon_x - k_z^2} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \mu_z. \quad (11)$$

将 (10) 式代入 (6) 式, 就可以得到填充各向异性超常媒质的矩形波导中的 TE 模式场方程

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{j\omega\mu_0 \mu_y}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_y \epsilon_x} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \\ &\quad \times \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-jk_z z), \\ E_y &= -\frac{j\omega\mu_0 \mu_x}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_x \epsilon_y} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-jk_z z), \\
 H_x = & \frac{\gamma}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_x \epsilon_y} \left(\frac{m\pi}{a}\right) H_0 \\
 & \times \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-jk_z z),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_y = & \frac{\gamma}{\gamma^2 + k_0^2 \mu_y \epsilon_x} \left(\frac{n\pi}{b}\right) H_0 \\
 & \times \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp(-jk_z z). \quad (12)
 \end{aligned}$$

而求解 (11) 式可以得到相位常数的解

$$\begin{aligned}
 k_z^2 = & \frac{1}{2} \left\{ k_0^2 (\mu_x \epsilon_y + \mu_y \epsilon_x) - k_x^2 \frac{\mu_x}{\mu_z} - k_y^2 \frac{\mu_y}{\mu_z} \right. \\
 & \left. \pm \sqrt{\left[k_0^2 (\mu_x \epsilon_y - \mu_y \epsilon_x) - k_x^2 \frac{\mu_x}{\mu_z} + k_y^2 \frac{\mu_y}{\mu_z} \right]^2 + 4k_x^2 k_y^2 \frac{\mu_x \mu_y}{\mu_z^2}} \right\}, \\
 k_x = & \frac{m\pi}{a}, \\
 k_y = & \frac{n\pi}{b}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

更有意义的是, 当 $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_1$, $\mu_x = \mu_y = \mu_1$ 时, 可以发现一些重要的规律. 此时 k_z 可以简化为

$$k_z = \pm k_0 \sqrt{\epsilon_1 \mu_1 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}\right)}. \quad (14)$$

根据文献 [15], 此时矩形波导的亚波长条件为

$$1 - \frac{1}{|\epsilon_1 \mu_1|} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2} < 0. \quad (15)$$

并引入有效介电常数 ϵ_{eff} 和有效磁导率 μ_{eff} 来描述该超常媒质矩形波导的电磁特性, 可以得到

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\text{eff}} = & \epsilon_1 \left(1 - \frac{1}{\epsilon_1 \mu_1} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}\right), \\
 \mu_{\text{eff}} = & \mu_1. \quad (16)
 \end{aligned}$$

并且, 当 $\epsilon_{\text{eff}} < 0$, $\mu_{\text{eff}} < 0$ 时, $k_z = -k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \mu_{\text{eff}}}$; 当 $\epsilon_{\text{eff}} > 0$ 时, $\mu_{\text{eff}} > 0$ 时, $k_z = k_0 \sqrt{\epsilon_{\text{eff}} \mu_{\text{eff}}}$; 当 $\epsilon_{\text{eff}} > 0$ 时, $\mu_{\text{eff}} < 0$ 时, $k_z = -jk_0 \sqrt{|\epsilon_{\text{eff}} \mu_{\text{eff}}|}$. 在此基础之上, 通过更为深入的分析可以发现, 在不等式 (15) 给出的亚波长条件的约束下 (16) 式所示的 ϵ_{eff} 与纵向磁导率 μ_z 之间存在着更为特殊的关系, 即

$$\begin{aligned}
 \epsilon_{\text{eff}} \mu_z = & \epsilon_1 \mu_z - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2} < |\epsilon_1 \mu_z| - \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2} \\
 = & |\epsilon_1 \mu_z| \left(1 - \frac{1}{|\epsilon_1 \mu_z|} \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0^2}\right) < 0. \quad (17)
 \end{aligned}$$

由此可以得到一个重要的结论: 在亚波长条件下, 传播 TE 模式电磁波的超常媒质矩形波导的有效介电常数的符号与超常媒质纵向磁导率的符号相反, 并且与超常媒质其他的本构参数无关.

另外, 对于传播 TM 模式电磁波的超常媒质矩形波导, 根据对偶原理可以得到类似的结论. 此时超常媒质矩形波导的有效磁导率的符号与超常媒质纵向介电常数的符号相反, 而与超常媒质其他的本构参数无关.

3. 三维各向异性超常媒质交错结构

考虑如图 1 所示的由各向异性超常媒质区域 I 和超常媒质区域 II 构成的交错结构, 结构的六个端面都由 PEC 边界截断, 因此可以看做是一个填充各向异性超常媒质交错结构的矩形谐振腔. 该矩形谐振腔在 x, y, z 三个方向长度分别为 $a, b, d = d_1 + d_2$. 超常媒质 I 和超常媒质 II 的本构参数张量分别为 $(\bar{\epsilon}_1, \bar{\mu}_1)$ 和 $(\bar{\epsilon}_2, \bar{\mu}_2)$. 根据谐振腔理论, 由 (12) 和 (14) 式, 可以得到超常媒质区域 I 中和区域 II 中的

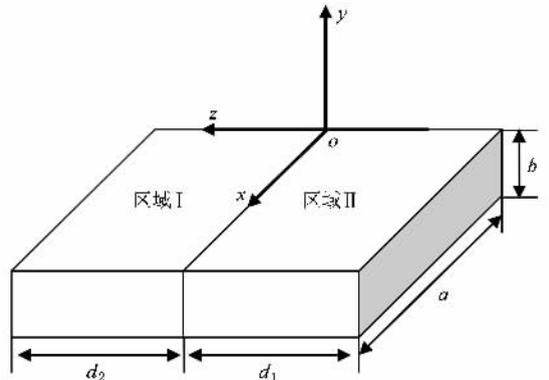


图 1 填充不同超常媒质交错对的矩形谐振腔

TE 模式电磁场表达式

$$E_{y1} = \frac{j\omega\mu_0\mu_x}{\gamma^2 + k_0^2\mu_x\epsilon_y} \frac{m\pi}{a} H_{01} \times \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{si}r[k_{z1}(z+d_1)],$$

$$H_{x1} = \frac{\gamma}{\gamma^2 + k_0^2\mu_x\epsilon_y} \frac{m\pi}{a} H_{01} \times \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{co}s[k_{z1}(z+d_1)],$$

$$H_{z1} = -H_{01} \operatorname{co}s\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{si}r[k_{z1}(z+d_1)]. \quad (18)$$

$$E_{y2} = \frac{j\omega\mu_0\mu_x}{\gamma^2 + k_0^2\mu_x\epsilon_y} \frac{m\pi}{a} H_{02} \times \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{si}r[k_{z2}(d_2-z)],$$

$$H_{x2} = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + k_0^2\mu_x\epsilon_y} \frac{m\pi}{a} H_{02} \times \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{co}s[k_{z2}(d_2-z)],$$

$$H_{z2} = H_{02} \operatorname{co}s\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \operatorname{si}r[k_{z2}(d_2-z)]. \quad (19)$$

其中

$$k_{zi} = \pm k_0 \sqrt{\epsilon_{ii}\mu_{ii} \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{ii}\mu_{ii}} \left(\frac{m\pi}{ak_0}\right)^2\right)}$$

$$= \pm k_0 \sqrt{\epsilon_{effi}\mu_{effi}} \quad (i = 1, 2). \quad (20)$$

同时,在区域 I 和 II 的交界处,电磁场应满足如下的边界条件:

$$E_{y1}|_{z=0} = E_{y2}|_{z=0},$$

$$H_{x1}|_{z=0} = H_{x2}|_{z=0}. \quad (21)$$

将(18)和(19)式代入到(21)式可以得到

$$H_{01} \operatorname{si}r(k_{z1}d_1) - H_{02} \operatorname{si}r(k_{z2}d_2) = 0,$$

$$\frac{k_{z1}H_{01}}{\mu_{x1}} \operatorname{co}s(k_{z1}d_1) + \frac{k_{z2}H_{02}}{\mu_{x2}} \operatorname{co}s(k_{z2}d_2) = 0. \quad (22)$$

由于(22)式存在非零解,因此其系数行列式为零,由此得到图 1 所示谐振腔的谐振方程

$$-\frac{k_{z1}}{\mu_{x1}} \operatorname{co}(k_{z1}d_1) = \frac{k_{z2}}{\mu_{x2}} \operatorname{co}(k_{z2}d_2). \quad (23)$$

谐振方程(23)是一个超越方程,可以采用数值方法来求解,也可以应用 Mathematica, Maple 等商业软件包来直接计算.然而,为了更清晰地展示图 1 所示三维各向异性超常媒质交错结构的谐振特性,本文将像文献[13]一样,通过在同一坐标系中绘制方程(23)两侧函数曲线的方法来考察谐振方程(23)的解,进而判断图 1 所示结构在亚波长条件下谐振的可能性.下面,我们将分两种情况下讨论谐振方程

(23)在亚波长条件下的物理解情况.

首先讨论 μ_{eff} 与 μ_{eff2} 异号的情形($\mu_{i1} \cdot \mu_{i2} < 0$). 根据文献[13]对一维情况的研究结果可知,在这种情况下方程(23)在亚波长条件下有且仅有一组物理解.图 2 给出了 $\epsilon_{i1} = 1, \epsilon_{i2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = 1, \mu_{i1} = -\mu_{i2} = 1, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$, 并且 $k_x = k_y = \pi/a$ 时谐振方程(23)左右两侧函数值随谐振腔 z 方向归一化长度 d/λ 的变化曲线.图 3 给出了 $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = -1, \mu_{i1} = -\mu_{i2} = 1, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$, 并且 $k_x = k_y = \pi/a$ 时方程(23)左右两侧函数值随谐振腔 z 方向归一化长度 d/λ 的变化曲线.图 4 给出了 $\epsilon_{i1} = \epsilon_{i2} = 1, \mu_{z1} = 1, \mu_{z2} = -2, \mu_{i1} = 1, \mu_{i2} = -1.5, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$, 并且 $k_x = k_y = \pi/a$ 时方程(23)左右两侧函数值随谐振腔 z 方向归一化长度 d/λ 的变化曲线.从图 2—4 可以看到无论 μ_{z1} 与 μ_{z2} 的符号关系如何,谐振方程(23)均在亚波长条件($d < 0.5\lambda$)有物理解,但解的数量却有所不同.在 $\mu_{z1} > 0, \mu_{z2} < 0$ 的情况下,方程(23)只有一组亚波长解.但在其他两种情况下($\mu_{z1}, \mu_{z2} < 0$ 和 $\mu_{z1}, \mu_{z2} > 0$),方程(23)有两组亚波长解,而这正是三维超常媒质谐振结构相比于二维结构十分特殊的地方,这种现象使得基于三维谐振结构的谐振腔在具体实现上具有更大的自由度,而其原因我们将在后面的内容中给与详细解释.从下面的研究中,我们将看到同样的原因使得在一维情况下某些无法实现的亚波长谐振条件在三维情况下可以得到满足.

另外,研究波导横向尺寸的变化对方程(23)给出的谐振条件的影响也是有意义的.图 5 给出了 $\epsilon_{i1} = 1, \epsilon_{i2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = 1, \mu_{i1} = -\mu_{i2} = 1, d_1 = 2d_2 = 2d/3 = \lambda/15$, 并且 $k_x = k_y = \sqrt{2}\pi(2a)$ 时方程(23)左右两侧函数值随 λ/a 的变化曲线.从图 5 可以看到,随着波导横向尺寸 a 的电尺寸逐渐减小,周期性地出现了方程(23)在亚波长条件下的解,而由(16)式可知这是由于随着 a/λ 的减小, ϵ_{eff} 的值几乎成正比地增大造成.而这样的结果则告诉我们,在所填充的超常媒质的本构参数不方便控制时,完全可以通过调节 a 的值来实现亚波长谐振,而实际上,调节 a 的值要比控制超常媒质的本构参数容易得多.

接着讨论 μ_{eff} 与 μ_{eff2} 同号的情形($\mu_{i1} \cdot \mu_{i2} > 0$). 文献[13]的研究结果表明,在一维情况下磁导率符号相同的超常媒质交错结构是无法在亚波长条件下

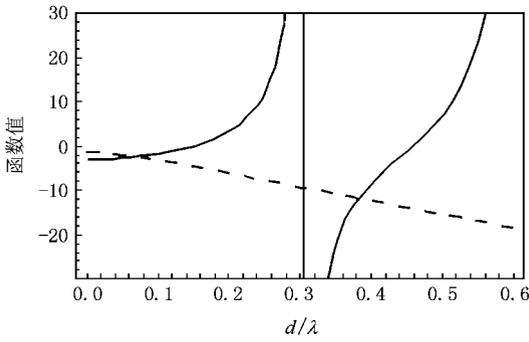


图2 $\epsilon_{y1} = 1, \epsilon_{y2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = 1, \mu_{x1} = -\mu_{x2} = 1, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$ 时的谐振方程的函数曲线

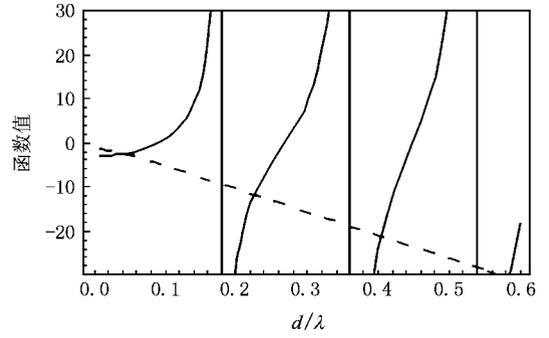


图5 $\epsilon_{y1} = 1, \epsilon_{y2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = 1, \mu_{x1} = -\mu_{x2} = 1, d_1 = 2d_2 = 2d/3 = \lambda/15$ 时的谐振方程函数曲线

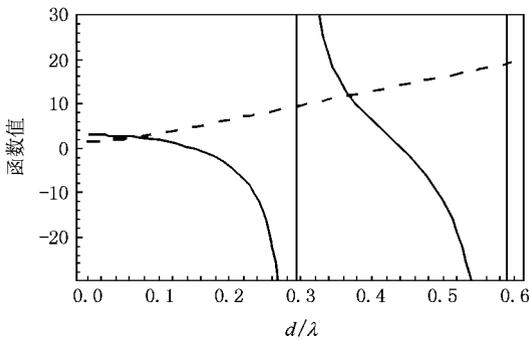


图3 $\epsilon_{y1} = 1, \epsilon_{y2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = -1, \mu_{x1} = -\mu_{x2} = 1, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$ 时的谐振方程的函数曲线

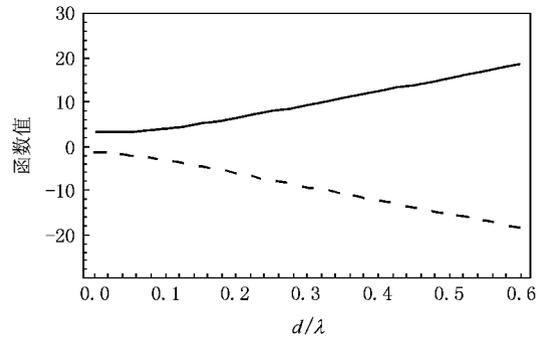


图6 $\epsilon_{y1} = 1, \epsilon_{y2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = 1, \mu_{x1} = \mu_{x2} = 1, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$ 时的谐振方程函数曲线

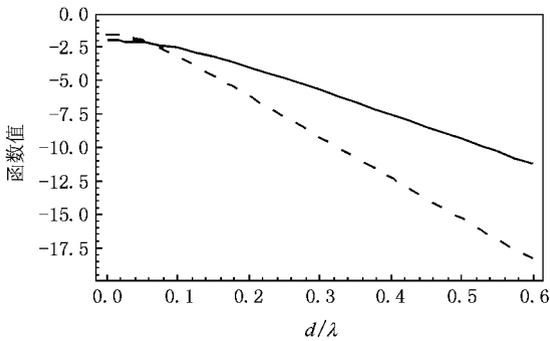


图4 $\epsilon_{y1} = 1, \epsilon_{y2} = 1, \mu_{z1} = 1, \mu_{z2} = -2, \mu_{x1} = 1, \mu_{x2} = -1.5, a = b = 0.14\lambda, d_1 = d_2 = 2d/3$ 时的谐振方程函数曲线

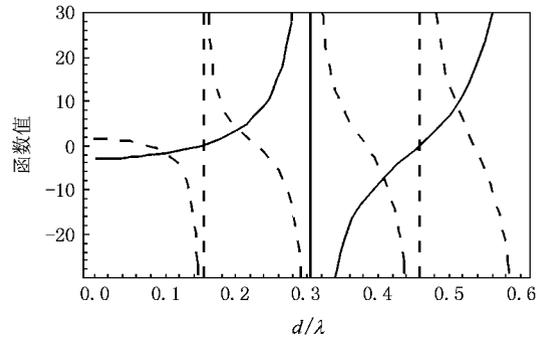


图7 $\epsilon_{y1} = 1, \epsilon_{y2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = -1, \mu_{x1} = \mu_{x2} = 1, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$ 时的谐振方程函数曲线

发生谐振的,但是,我们仍然有兴趣探讨一下三维情况中上述的结论是否仍然能够成立.实际上通过对三维情况的研究可以发现,对于图1所示的三维各向异性超常媒质交错结构,谐振方程的亚波长解不仅完全可能存在,而且亚波长解的数量通常多于一个.

图6给出了 $\epsilon_{x1} = \epsilon_{x2} = 1, \mu_{z1} = \mu_{z2} = 1, \mu_{x1} = \mu_{x2} = 1, a = b = 0.14\lambda, d_1 = 2d_2 = 2d/3$ 并且 $k_x = k_y =$

π/a 时谐振方程(23)左右两侧函数值随谐振腔 z 方向归一化长度 d/λ 的变化曲线,图7给出了上述其他参数不变,而 $\mu_{x1} = \mu_{x2} = -1$ 时的函数曲线.从图6和图7中我们可以看到一些“意外”的结果.对于 $\mu_{x1} = \mu_{x2} = 1$ 的情况,两条曲线没有交点,即谐振方程(23)所示在亚波长条件下无法得到满足,这与文献[13]中的结果一致.但是,对于 $\mu_{x1} = \mu_{x2} = -1$ 的

情况,却可以清晰地看到谐振方程(23)在亚波长条件($d < 0.5\lambda$)下存在三组解,分别是 $d/\lambda = 0.104$, $d/\lambda = 0.203$ 和 $d/\lambda = 0.409$,这与文献[13]中的结果完全相悖,同时它也意味着对于图1所示的三维结构相比于相应的一维情况具有更多的亚波长谐振模式,从而更容易在亚波长条件下发生谐振.其原因在于, a 和 b 只有0.14个工作波长,由(16)式可知,此时 ϵ_{eff} 会变得很大, $\epsilon_{\text{eff}} \approx 25$,远远大于填充在波导中的超常媒质的横向介电常数 ϵ_{11} 和 ϵ_{12} ,从而使得(15)式给出的亚波长条件对于谐振方程(23)的限制大大减弱.换言之,此时发生的亚波长谐振如果用等效本构参数 ϵ_{eff} 和 μ_{eff} 来衡量,仅仅是普通的半波长谐振而已.也正是由于这个原因,在 $\mu_{\text{eff}1}$ 与 $\mu_{\text{eff}2}$ 异号的情况下,谐振方程(23)通常会具有比一维情况时有更多的亚波长解.

需要指出的是,上述进行的讨论以及所得到的结果都是对TE模式而言的,对于TM模式,可以通过对偶原理容易得到所需要的结果,其中包括TM模式下,图1所示三维各向异性超常媒质谐振结构中的场分布、谐振条件以及谐振特性,本文对此不再赘述.

4. 理论验证

下面利用以上推导得到公式对两个具体模型进行计算,并将计算结果与已经报道的结果进行比较来验证本文理论推导的正确性.

首先,我们利用(12)和(13)式对文献[15]中的填充开口谐振环(SRR)的矩形波导的传播特性进行计算.该矩形波导的横截面尺寸为 $a = 35 \text{ mm}$, $b = 15 \text{ mm}$,长度为 60 mm .所填充的SRR是一种各向异性负磁导率介质,其本构参数可以近似表示为

$$\mu_x = \begin{cases} -1, & f = 7.8\text{--}8.2 \text{ GHz}, \\ 1, & f < 7.8 \text{ GHz 或 } f > 8.2 \text{ GHz}, \end{cases}$$

$$\mu_y = \mu_z = 1,$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z = 1. \quad (24)$$

图8给出了根据(12)和(13)式计算得到的该矩形波导的 S_{21} 参数.通过将图8与文献[15]中的图9(a)所示的测量结果相比较,可以看到两者相吻合.

其次,我们分别利用(18)–(20)和(23)式以及文献[14]中的(3)和(4)式对填充各向同性双负媒质($\epsilon_{11} = \mu_{11} = -1$)和各向同性普通媒质($\epsilon_{12} = \mu_{12} = 1$)交错结构的矩形谐振腔($a = b = 1.5 \text{ mm}$, $d_1 = d_2 =$

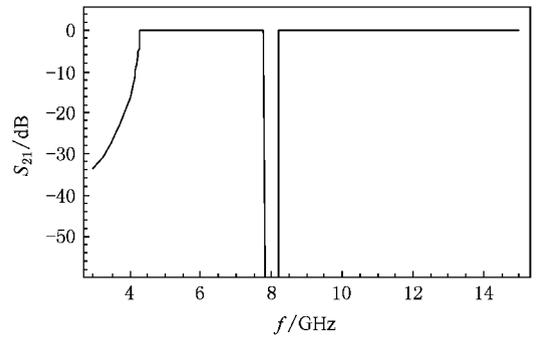


图8 根据(12)–(13)式计算得到填充SRR矩形波导^[15] S_{21} 参数

1.95 mm)中的 TE_{10} 模式电场分布(谐振频率为 2 GHz)进行了计算,两组公式得到的归一化电场幅度曲线完全一致,如图9所示.

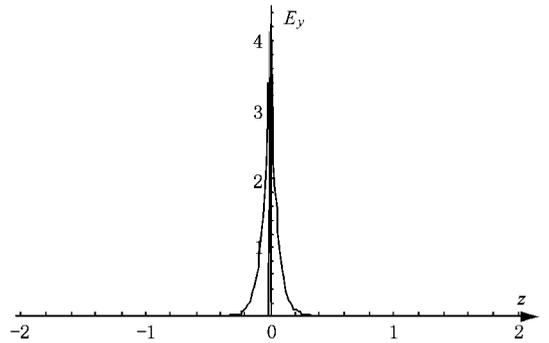


图9 (18)–(20)和(23)式以及文献[14]中的(3)和(4)式计算的各向同性超常媒质谐振腔中的电场分布结果

5. 结 论

本文通过建立、求解具有PEC边界的三维各向异性超常媒质交错结构的场分布方程和谐振方程,深入研究了三维各向异性超常媒质交错结构的亚波长谐振特性.从各向异性麦克斯韦方程出发,通过求解边值问题推导得到了具有PEC边界的三维各向异性超常媒质交错结构中的电磁场分布以及相应的谐振条件方程.在此基础上采用基于图形的近似计算方法,求解了谐振方程在亚波长条件下的物理解.研究发现,各向异性条件的引入使得三维各向异性超常媒质交错结构与一维结构以及三维各向同性结构在亚波长谐振特性上存在巨大差异,主要体现在如下两个方面:第一,亚波长条件物理解增多.一维结构和三维各向同性结构的亚波长谐振条件最多只具有一组物理解或者没有物理解,而对于三维各向异性结构而言,在大多数情况下会出现两个以上的

物理解,甚至在某些一维结构无法实现亚波长谐振的情况下,三维各向异性结构的谐振条件仍然具有不定数量的亚波长物理解.第二,亚波长谐振实现方式多样化.三维各向异性结构不但可以通过选取适当的本构参数组合来实现亚波长谐振,还可以通过改变结构的横向尺寸来实现预定频率上的亚波长谐振,这使得基于三维各向异性超常媒质交错结构的

亚波长谐振腔设计具有更大的自由度.最后,研究中分别利用推导得到计算公式对具有某些限定条件的情况进行了计算,并将计算结果与文献[15]的实验结果以及文献[14]的计算结果进行了比较,结果表明符合较好,从而肯定了本文理论推导的正确性.本文的研究结果对于超常媒质在谐振腔小型化领域的应用具有重要的理论意义和实用价值.

-
- [1] Dong J W ,Chen Y H ,Wang H Z 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 268 (in Chinese)[董建文、陈溢杭、汪河洲 2007 物理学报 **56** 268]
- [2] Liu Y H ,Luo C R ,Zhao X P 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 5883 (in Chinese)[刘亚红、罗春荣、赵晓鹏 2007 物理学报 **56** 5883]
- [3] Chen L ,Liang C H ,Dang X J 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 6398 (in Chinese)[陈亮、梁昌洪、党晓杰 2007 物理学报 **56** 6398]
- [4] Yang R ,Xie Y J ,Wang P ,Yang T M 2007 *Acta Phys . Sin .* **56** 4504 (in Chinese)[杨锐、谢拥军、王鹏、杨同敏 2007 物理学报 **56** 4504]
- [5] Zhuang F ,Shen J Q 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 955 (in Chinese) [庄飞、沈建其 2005 物理学报 **54** 955]
- [6] Pendry J B 2004 *Science* **306** 1353
- [7] Luo C R ,Kang L ,Zhao Q ,Fu Q H ,Song J ,Zhao X P 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 1607 (in Chinese)[罗春荣、康雷、赵乾、付全红、宋娟、赵晓鹏 2005 物理学报 **54** 1607]
- [8] Zhao Q ,Zhao X P ,Kang L ,Zhang F L ,Liu Y H ,Luo C R 2004 *Acta Phys . Sin .* **53** 2206 (in Chinese)[赵乾、赵晓鹏、康雷、张富利、刘亚红、罗春荣 2004 物理学报 **53** 2206]
- [9] Buell K ,Mosallaei H ,Sarabandi K 2006 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **54** 135
- [10] Caloz C ,Sanada A ,Itoh T 2004 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **52** 1834
- [11] Perruisseau Carrier J ,Skrivervik A K 2006 *IEEE Trans . Microwave Theory Tech .* **54** 1582
- [12] Engheta N 2002 *IEEE Antennas Wireless Prop . Lett .* **1** 10
- [13] Jiang T ,Chen Y ,Feng Y 2006 *Chin . Phys .* **15** 1009
- [14] Jiang T ,Zhao J ,Feng Y 2007 *J . Phys . D* **40** 1821
- [15] Hrabar S ,Bartolic J ,Sipus Z 2005 *IEEE Trans . Antennas Prop .* **53** 110

Resonance characteristics of a three-dimensional anisotropic metamaterial bilayer^{*}

Meng Fan-Yi[†] Wu Qun Fu Jia-Hui Gu Xue-Mai Li Le-Wei

(*School of Electronics and Information Technology, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China*)

(Received 21 January 2008 ; revised manuscript received 26 March 2008)

Abstract

The resonance characteristics of a three-dimensional anisotropic metamaterial bilayer is investigated through solving the resonance equation for a rectangular cavity filled with two layers of different isotropic metamaterials. It is found that the solution of subwavelength resonance is highly dependent on the product of the transversal and longitudinal permeabilities and there exist more than one for the subwavelength resonance in most cases. In addition, it is found that the width of the corresponding waveguide of the rectangular cavity has an essential effect on the number of solutions for the resonance condition equation. These results are of significance in the application of the metamaterials to sub-wavelength resonance structures and miniaturized cavity resonators.

Keywords : anisotropic , metamaterial , bilayer , subwavelength resonance

PACC : 3220D , 4110H

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60571026), the National Science Foundation for Post-doctoral Scientists of China (Grant No. 20070420158), the Science Foundation for Postdoctor of Heilongjiang Province , China (Grant No. LBH-Z07083), and the Doctoral Foundation of Ministry of Education of China (Grant No. 20070213058).

[†] E-mail : blade@hit.edu.cn