第 57 卷 第 11 期 2008 年 11 月
1000-3290/2008/57(11)/6689-05

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.11, November, 2008

一个全球气候赤道海气振子模型的变分迭代解法*

莫嘉琪[1)2)3)†]　林万涛[4)]

1)(安徽师范大学,芜湖　241000)

2)(上海高校计算科学院 E-研究院 SJTU 研究所,上海　200240)

3)(湖州师范学院,湖州　313000)

4)(大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室,中国科学院大气物理研究所,北京　100029)

(2008 年 1 月 28 日收到;2008 年 3 月 21 日收到修改稿)

研究了一个三维赤道海气振子 Kelvin 波的方程.利用变分迭代解法,得到了对应模型的近似解.变分迭代方法是一个解析方法,得到的解还能够继续进行解析运算.

关键词:变分迭代,近似解,Kelvin 波

PACC:0230,0200

1. 引　言

近 20 年来,由厄尔尼诺(El Niño)现象导致的全球气候异常以及涉及到全球生态环境异常为科学家和各国政府所关注.热带海气交互作用仍为当今研究的热点课题,并且取得了一定的进展.但由于问题的复杂性,仍有许多根本的问题尚未解决.当前对海气交互作用的研究,多把海表温度(SST)当作唯一重要的海洋因素.但是,事实上,从物理角度来看,海洋上层热储量的变化更为重要.决定海洋上层热储量异常的因素除海水温度异常外,海温异常区的海水体积、质量和海水和大气的压力等也同样重要.所以我们还需要研究整个海洋上层的热力学状况及其异常和动力学特征.因此,海洋上层热力学及动力学状况异常对海气交互作用的重要性,说明了需要研究太平洋上层热力学和动力学属性的三维结构给出的水平和垂直分布状况.这是影响了热储量的主控因子.因此需要对它们进一步研究.Emanuel[1] 指出在小尺度短时段的两维扰动赤道区域中 Coriolis 参数只有当接近一致时是重要的.Sun[2] 延伸了这个结论:在小尺度不均匀的对称不稳定性下,所有 Coriolis 项都是重要的.Coriolis 参数描述了赤道附近子午线南北向的变化对热带环流有很大的影响.本文是主要研究一类联系到大气的三维 Kelvin 波的模型.

用近似理论来研究大气物理和海洋气候的特征是当前学术界经常采用的方法.在近 10 年来近似方法已不断地被改进和优化,包括平均法、边界层法,渐近匹配法和多尺度方法等.在这方面,近来许多学者诸如 Ni 和 Wei[3],Bartier[4],Khasminskii 和 Yin[5],Marques[6] 以及 Bobkova[7] 已经作了大量的工作.利用微分不等式及其他方法莫嘉琪、林万涛等也研究了非线性奇摄动问题的激波解和大气物理等问题[8—20].本文是利用一个特殊的变分迭代方法[21] 来构造大气物理中的海气振子 Kelvin 波的近似解.

2. 广义海气振子模型

今考虑如下一类海气振子广义 Kelvin 波方程[22]

$$\left(\frac{\alpha_2}{C^2}\right)\frac{\partial^4\pi}{\partial t^4}+\left[\left(\frac{\alpha_2}{C^2}\right)(N^2+f'^2)+\Gamma^2\right]$$

$$\times\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\alpha_1\frac{\partial^4\pi}{\partial t^2\partial x^2}-N^2\frac{\partial^2\pi}{\partial x^2}$$

* 国家自然科学基金(批准号:40676016)、国家重点基础研究发展规划项目(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304),中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号:E03004)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$+2f'^2\Gamma\frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial x}-\frac{\partial^4\pi}{\partial t^2\partial z^2}=G(t,x,z,\pi), \qquad (1)$$

其中自变量 t,x,z 分别为时间变量，东西向和垂直于海平面向的坐标，标量 π 为压力函数，N^2 为 Brunt 频率，C 为 Laplace 声速，α_1,α_2,f' 为相应的 Coriolis 参数，Γ 为对应的常数，G 为非线性扰动项[22].

首先考虑方程

$$\left(\frac{\alpha_2}{C^2}\right)\frac{\partial^4\pi}{\partial t^4}+\left[\left(\frac{\alpha_2}{C^2}\right)(N^2+f'^2)+\Gamma^2\right]\times\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}-\alpha_1\frac{\partial^4\pi}{\partial t^2\partial x^2}-\frac{\partial^4\pi}{\partial t^2\partial z^2}=0. \qquad (2)$$

首先令 $w=\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}$，这时(2)式为

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+a^2 w-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z_1^2}=0, \qquad (3)$$

其中

$$a^2=(N^2+f'^2)+\frac{C^2}{\alpha_2}\Gamma^2,$$

$$x_1=\frac{1}{C}\sqrt{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}x,$$

$$z_1=\frac{\sqrt{\alpha_2}}{C}z.$$

再令 $u(x_1,y_1,z_1,t)=(\cos ay_1)w(x_1,z_1,t)$，由(3)式，可得如下三维波动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2}\right)=0. \qquad (4)$$

方程(4)的解为

$$u(x_1,y_1,z_1,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_t^M}\frac{\phi_2(\xi,\zeta)}{\sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2-(\zeta-z_1)^2}}\mathrm{d}S\right]+\frac{1}{4\pi a}\iint_{S_t^M}\frac{\phi_3(\xi,\zeta)}{\sqrt{(\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2+(\zeta-z_1)^2}}\mathrm{d}S,$$

其中 S_t^M 为中心为 $M(x_1,y_1,z_1)$，半径为 t 的球面，而 $\phi_i(x_1,z_1)$，$i=2,3$，分别为方程(4)的初值. 于是方程(3)的解为

$$w(x,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t^{M'}}\frac{(\cos a\eta)\phi_2(\xi,\zeta)}{(\cos ay)\sqrt{(\xi-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}x/C)^2+(\eta-y)^2-(\zeta-\sqrt{\alpha_2}z/C)^2}}\mathrm{d}S\right]+\frac{1}{4\pi}\iint_{S_t^{M'}}\frac{(\cos a\eta)\phi_3(\xi,\zeta)}{(\cos ay)\sqrt{(\xi-\sqrt{\alpha_2\alpha_1}x/C)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-\sqrt{\alpha_2}z/C)^2}}\mathrm{d}S. \qquad (5)$$

故我们便得到方程(2)在初始条件

$$\left.\frac{\partial^i\pi}{\partial t^i}\right|_{t=0}=\phi_i(x,z),i=0,1,2,3 \qquad (6)$$

下的解 $\tilde{\pi}(x,z,t)$ 为

$$\tilde{\pi}(x,z,t)=\frac{1}{4\pi a}\int_0^t\left[\iint_{S_t^{M'}}\frac{(\cos a\eta)\phi_2(\xi,\zeta)}{(\cos ay)\sqrt{(\xi-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}x/C)^2+(\eta-y)^2-(\zeta-\sqrt{\alpha_2}z/C)^2}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t_1+\frac{1}{4\pi a}\int_0^t\int_0^{t_1}\left[\iint_{S_t^{M'}}\frac{(\cos a\eta)\phi_3(\xi,\zeta)}{(\cos ay)\sqrt{(\xi-\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}x/C)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-\sqrt{\alpha_2}z/C)^2}}\mathrm{d}S\right]\mathrm{d}t_2\mathrm{d}t_1+t\phi_1(\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}x/C,\sqrt{\alpha_2}z/C)+\phi_0(\sqrt{\alpha_2/\alpha_1}x/C,\sqrt{\alpha_2}z/C^2), \qquad (7)$$

其中 $S_t^{M'}$ 为中心为 $M'(x,y,z)$，半径为 t 的球面.

3. 变分迭代

现引入泛函 F：

$$F[\pi]=\pi+\int_0^t\lambda(\tau)\left[\left(\frac{\alpha_2}{C^2}\right)\frac{\partial^4\pi}{\partial\tau^4}+\left(\frac{\alpha_2 a^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2\pi}{\partial\tau^2}-\alpha_1\frac{\partial^4\tilde{\pi}}{\partial\tau^2\partial x^2}-\frac{\partial^4\tilde{\pi}}{\partial\tau^2\partial z^2}-N^2\frac{\partial^2\tilde{\pi}}{\partial x^2}\right.$$

$$+ 2f'\Gamma\frac{\partial^2\tilde{\pi}}{\partial\tau\partial x} - G(t,x,z,\tilde{\pi})\Bigg]\mathrm{d}\tau, \qquad (8)$$

其中 $\tilde{\pi}$ 为 π 的限制变量[21]，而 λ 为 Lagrange 乘子.

计算泛函(8)的变分 δF：

$$\delta F = \delta\pi + \frac{\alpha_2}{C^2}\Bigg[\lambda\delta\left(\frac{\partial^3\pi}{\partial\tau^3}\right) - \lambda'\delta\left(\frac{\partial^2\pi}{\partial\tau^2}\right) + (\lambda'' + a^2\lambda)\delta\left(\frac{\partial\pi}{\partial\tau}\right) - (\lambda''' + a^2\lambda')\delta\pi\Bigg]_{\tau=t} - \frac{\alpha_2}{C^2}\int_0^t[\lambda^{(4)} - a^2\lambda'']\delta\pi\mathrm{d}\tau.$$

令 $\delta F = 0$. 于是驻值条件为

$$\begin{aligned}&\lambda^{(4)} - a^2\lambda'' = 0, \tau > t,\\&\lambda^{(i)}(\tau)|_{\tau=t} = 0, i = 0,1,\\&\lambda^{(i)}(\tau)|_{\tau=t} = -a^2, i = 2,3.\end{aligned} \qquad (9)$$

由(9)式得

$$\begin{aligned}\lambda = &-\frac{1}{2a}[(a-1)\exp(a(t-\tau))\\&+(a+1)\exp(-a(t-\tau))]\\&-(t-\tau)+1.\end{aligned} \qquad (10)$$

再由(1),(8),(10)式,构造如下的变分迭代：

$$\begin{aligned}\pi_{n+1} = \pi_n - \int_0^t\Bigg[&\frac{1}{2a}[(a-1)\exp(a(t-\tau))\\&+(a+1)\exp(-a(t-\tau))] - (t-\tau) + 1\Bigg]\\&\times\Bigg[\left(\frac{\alpha_2}{C^2}\right)\frac{\partial^4\pi_n}{\partial\tau^4} + \left(\frac{\alpha_2 a^2}{C^2}\right)\frac{\partial^2\pi_n}{\partial\tau^2}\\&-\alpha_1\frac{\partial^4\pi_n}{\partial\tau^2\partial x^2} - \frac{\partial^4\pi_n}{\partial\tau^2\partial z^2} - N^2\frac{\partial^2\pi_n}{\partial x^2}\\&+2f'\Gamma\frac{\partial^2\pi_n}{\partial\tau\partial x} - G(t,x,z,\pi_n)\Bigg]\mathrm{d}\tau.\end{aligned} \qquad (11)$$

现在首先选择初始近似解 π_0 为对应于 Cauchy 问题(3),(6)的解(7). 即 $\pi_0 = (x,z,t) = \bar{\pi}(x,z,t)$.

将初始近似 π_0 代入迭代关系式(11),得到问题(1),(6)的一次近似解

$$\begin{aligned}\pi_1 = \pi - \frac{C^2}{2\alpha_2 a^3}\int_0^t\Bigg[&\frac{1}{2a}[(a-1)\exp(a(t-\tau))\\&+(a+1)\exp(-a(t-\tau))] - (t-\tau) + 1\Bigg]\\&\times\Bigg[-N^2\frac{\partial^2\bar{\pi}}{\partial x^2} + 2f'\Gamma\frac{\partial^2\bar{\pi}}{\partial\tau\partial x}\\&-G(t,x,z,\bar{\pi})\Bigg]\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \qquad (12)$$

其中 $\bar{\pi}$ 由(7)式所示.

用相同的方法,可得 Kelvin 波模型(1)的更高次的近似解.

4. 例

现给定海气振子 Kelvin 波模型如下一组特殊参数[22]：$\alpha_i = 1, i = 1,2, C = 325\ \mathrm{ms^{-1}}, N^2 = 10^{-4}\ \mathrm{s^{-2}}, f' = 1.4\times10^{-4}\ \mathrm{s^{-1}}, \Gamma = 4.5\times10^{-5}\ \mathrm{m^{-1}}, G = 0$ 和初始条件：$\phi_2(x,z) = x - z, \phi_i(x,z) = 0, i = 0,1,3$,这时由(7),(12)式,可得模型(1),(6)解 π 的零次,一次近似 $\pi_0(x,z,t)$ 和 $\pi_1(x,z,t)$：

$$\begin{aligned}&\pi_0(x,z,t)\\&= -(2.10\times10^{-1})(x-z)\cos[(2.18)t],\\&\pi_1(x,z,t)\\&= -(2.10\times10^{-1})(x-z)\cos[(2.18)t]\\&\quad-1.15\times10^{-8}\sin(2.18t)\\&\quad-2.62\times10^{-8}\cos(2.18)t\\&\quad-1.77\times10^{-11}\exp(2.92t)\\&\quad+3.44\times10^{-11}\exp(-2.92t)\\&\quad+2.57\times10^{-8}(t+1).\end{aligned}$$

因此用变分迭代法得到 π 的一次近似函数 π_1 在海平面上的模拟曲面分布图(参见图 1)和一次近似函数 π_1,在离海平面 4 m 处的模拟曲面分布情况(参见图 2).

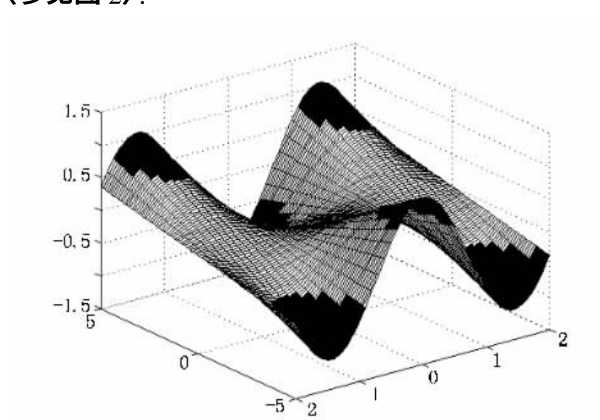

图 1　π_1 的 O-xt 分布曲面图($z = 0$ m)

在相应参数下的 Kelvin 波模型求得的解的一次近似 π_1 的解和模拟图出发,我们还可以对相关的物理量的定性、定量情形再继续进行研究. 但在本文中

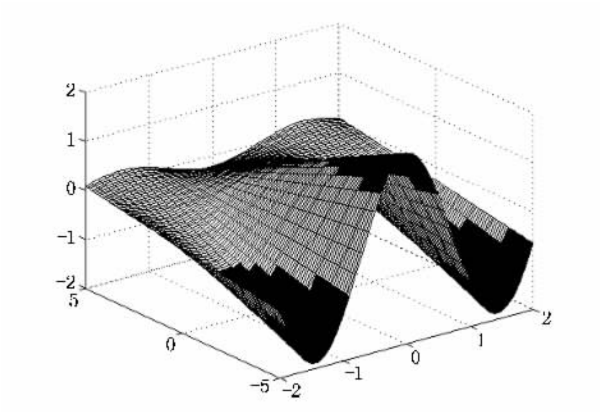

图 2 π_1 的 O-xt 分布曲面图($z = 4$ m)

不再予以进一步讨论.

5. 结 论

海气振子 Kelvin 波是大气物理中的一个复杂现象.我们需要讨论它的基本模型方程,并且去求解它.用变分迭代方法就是一个简单而有效的方法.利用构造一个泛函并用变分原理,从合理的初始近似及迭代的方法去逼近相应模型的精确解.本文中从方程(3)的解出发作为精确解的零次近似 π_0,这是十分自然的.这样可以较快地得到近似解所要求的精度.同时,用变分迭代方法得到的是近似解析解,它不同于用一般计算方法得到的数值解.因此得到的解析解还可进行解析运算.从而还可以得到更多解的性态.

[1] Emanuel K A 1979 *J. Atm. Sci.* **36** 2425
[2] Sun W Y 1995 *Q. J. Meteorol. Soc.* **121** 419
[3] Ni W M, Wei J C 2006 *J. Diff. Eqns.* **221** 158
[4] Bartier J P 2006 *Asymptotic Anal.* **46** 325
[5] Khasminskii R Z, Yin G 2005 *J. Diff. Eqns.* **212** 85
[6] Marques I 2005 *Nonlinear Anal.* **61** 21
[7] Bobkova A S 2005 *Diff. Eqns.* **41** 23
[8] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Natu. Sci.* **13** 768
[9] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natu. Sci.* **14** 1126
[10] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Natu. Sci.* **17** 230
[11] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6 (in Chinese) [莫嘉琪、王 辉、林万涛、林一骅 2006 物理学报 **55** 6]
[12] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese) [莫嘉琪、王 辉、林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]
[13] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]
[14] Mo J Q, Lin W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5565 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2007 物理学报 **56** 5565]
[15] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671
[16] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1927
[17] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578
[18] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2007 *Chin. Phys.* **16** 1908
[19] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2008 *Chin. Phys.* B**17** 370
[20] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2008 *Chin. Phys.* B**17** 743
[21] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法(郑州 河南科学技术出版社)]
[22] Raymond W H 2001 *Dynamics Atmospheres and Oceans* **34** 23

Variational iteration method for solving the equatorial sea-air oscillator model for global climate*

Mo Jia-Qi[1)2)3)†] Lin Wan-Tao[4)]

1)(*Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

2)(*Division of Computational Science*, *E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU*, *Shanghai* 200240, *China*)

3)(*Huzhou Teachers College*, *Huzhou* 313000, *China*)

4)(*LASG*, *Institute of Atmospheric Physics*, *Chinese Academy of Sciences*, *Beijing* 100029, *China*)

(Received 28 January 2008; revised manuscript received 21 March 2008)

Abstract

A three dimentional equation for the equatoral sea-air oscillator Kelvin wave is considered. By using the variational iteration method, the approximate solution of the corresponding model is studied. The variational iteration method is an analytic method, the obtained solution can be used in further analytical operations.

Keywords: variational iteration, approximate solution, Kelvin wave

PACC: 0230, 0200

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40676016), the National Key Project for Basics Research (Grant Nos. 2003CB415101-03 and 2004CB418304), the Key Project of the Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and in Part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant No. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn