

一类 Lorenz 系统的同伦映射解法^{*}

莫嘉琪^{1,2,3)†} 林万涛⁴⁾

1) 安徽师范大学数学系, 芜湖 241000)

2) 上海高校计算科学院 E-研究院上海交通大学研究所, 上海 200240)

3) 湖州师范学院数学系, 湖州 313000)

4) 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 中国科学院大气物理研究所, 北京 100029)

(2008 年 3 月 18 日收到, 2008 年 4 月 17 日收到修改稿)

研究了一个 Lorenz 方程的求解问题. 首先构造一组同伦映射, 其次决定系统的初始近似, 最后通过同伦映射得到了对应模型的各次近似解. 同伦映射方法是一个解析方法, 得到的解还能够继续进行解析运算.

关键词: 洛伦兹方程, 同伦映射, 近似解, 厄尔尼诺和拉尼娜现象

PACC: 0230, 0200

1. 引言

近来, 厄尔尼诺(El Niño)和拉尼娜(La Niña)现象导致的全球气候异常并涉及到全球生态环境异常已经成为科学家和各国政府重点关注的对象. 热带海气交互作用仍为当今研究的热点课题, 并且取得了一定的进展. 但由于问题的复杂性, 仍有许多根本的问题尚未解决. 我们需要研究整个海洋上层的热力学状况及其异常和动力学特征. 因此, 海洋上层热力学及动力学状况异常对海气交互作用的重要性, 说明了需要研究太平洋上层热力学和动力学属性的三维结构给出的水平和垂直分布状况. Emanuel^[1]指出在小尺度短时段的两维扰动赤道区域中 Coriolis 参数只有当接近一致时是重要的. Sun^[2]延伸了这个结论: 在小尺度不均匀的对称不稳定性下, 所有 Coriolis 项都是重要的. 本文主要是求得一类联系到大气的一个典型的 Lorenz 系统的模型的近似解. 用近似理论来研究大气物理和海洋气候的特征是当前学术界经常采用的方法. 近 10 年来近似方法已不断地被改进和优化, 包括平均法、边界层法、渐近匹配法和多尺度方法等. 在这方面, 近来许多学者诸如 Ni 和 Wei^[3], Bartier^[4], Khasminskii 和 Yin^[5], Marques^[6]以及 Llibre, da Silva 和 Teixeira^[7]已经作了

大量的工作. 利用微分不等式及其他方法, 莫嘉琪、林万涛等也研究了一些非线性问题^[8-21]的渐近解. 本文是利用一个特殊的同伦映射方法^[22]来构造 Lorenz 系统的近似解.

2. Lorenz 系统

考虑两个界面之间的流体. 在一定条件下, 为简单起见, 设所有量不依赖于空间变量 y , 只研究在 $x-z$ 竖直平面上的情况. 这时根据流体动力学方程, 连续性方程和热力学状态方程有可简化为如下的流体力学系统:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} - \nu \Delta u = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial P}{\partial x} - \varepsilon g T - \nu \Delta w = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + w \frac{\partial T}{\partial z} - K \Delta T = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

其中 t 为时间变量, x, z 分别为水平、垂直空间变量, u, w 分别为水平、垂直速度, T 为温度函数, ε 为流体的膨胀系数, g 为重力加速度, ν 为黏性系数, K 为热传导系数, Δ 为 Laplace 算子.

作如下一系列变量变换:

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 40676016), 国家重点基础研究发展规划项目(批准号: 2003CB415101-03, 2004CB418304), 中国科学院知识创新工程方向性项目(批准号: KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会 E-研究院建设计划项目(批准号: E03004)资助的课题.

[†] E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$u = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, w = \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

$$T(x, z, t) = \left(\bar{T}_1(0, t) - \frac{\bar{T}_0(0) - \bar{T}_0(H)}{H} z \right) + \theta(x, z, t),$$

$$\Psi(x, z, t) = [a^{-1}(1 + a^2)]k\sqrt{2}\sin(aH^{-1}\pi x) \times \sin(H^{-1}\pi z)X(t),$$

$$\theta(x, z, t) = [(\varepsilon g)^{-1}H^{-3}a^{-2}(1 + a^2)^3\pi^3\nu k] \times [(\sqrt{2}\cos(aH^{-1}\pi x)\sin(H^{-1}\pi z)) \times Y(t) - (\sin(2H^{-1}\pi z))Z(t)],$$

可以得到^[23]如下典型的 Lorenz 系统：

$$\frac{dX}{dT_0} = -\sigma X + \sigma Y, \tag{1}$$

$$\frac{dY}{dT_0} = rX - Y - XZ, \tag{2}$$

$$\frac{dZ}{dT_0} = -bZ + XY, \tag{3}$$

其中 $\sigma = \frac{\nu}{k}$ 为 Prandtl 数, 对应的系数 $0 < b < +\infty$, $\rho < r < +\infty$, H 为两个流体界面的高度, $T_0 = \frac{(1+a)^2 k \pi}{H^2} t$ 为无因次变量. (X, Y, Z) 为引入的中间研究对象, 知道它们的函数关系, 就能通过变换式得到流体的速度、流函数、温度函数等物理量. 上述方程 (1)–(3) 的具体推导及所引入中间变量的物理意义在此从略^[23]. 现在我们感兴趣的是求出 Lorenz 系统 (1)–(3) 的解 (X, Y, Z) .

事实上, 我们不能求得非线性系统 (1)–(3) 的精确解析解. 因此, 下面利用同伦映射方法来求得 Lorenz 系统的近似解.

3. 同伦映射

为了使用同伦映射方法得到系统 (1)–(3) 的近似解, 今引入一组同伦映射 $H_i(X, Y, Z, p) : R^3 \times I \rightarrow R, i = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} H_i(X, Y, Z, p) &= L_i(X, Y, Z) - L_i(x_0, y_0, z_0) \\ &+ p(L_i(x_0, y_0, z_0) - F_i(X, Y, Z)), \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $R = (-\infty, +\infty), I = [0, 1]$ (x_0, y_0, z_0) 为原系统 (1)–(3) 的零次近似, $F_1(X, Y, Z) = 0, F_2(X, Y, Z) = -XZ, F_3(X, Y, Z) = XY$, 而线性算子 $L_i(X, Y, Z)$ 为

$$L_1(X, Y, Z) = \frac{dX}{dT_0} + \sigma X - \sigma Y, \tag{5}$$

$$L_2(X, Y, Z) = \frac{dY}{dT_0} - rX + Y, \tag{6}$$

$$L_3(X, Y, Z) = \frac{dZ}{dT_0} + bZ. \tag{7}$$

显然, 由 (4) 式知, $H_i(X, Y, Z, 1) = 0$ 就是系统 (1)–(3). 故系统 (1)–(3) 的解 $(X(T_0), Y(T_0), Z(T_0))$ 就是 $H(X, Y, Z, p) = 0$ 的解当 $p \rightarrow 1$ 的极限情形.

首先选取原系统 (1)–(3) 的零次近似为对应於系统 (1)–(3) 的线性系统

$$\frac{dX}{dT_0} = -\sigma X + \sigma Y,$$

$$\frac{dY}{dT_0} = rX - Y,$$

$$\frac{dZ}{dT_0} = -bZ$$

的解. 不难求得上述线性系统的解为

$$\bar{X}_0(T_0) = \sum_{i=1}^2 C_i \exp \lambda_i T_0,$$

$$\bar{Y}_0(T_0) = \sum_{i=1}^2 \frac{\lambda_i + \sigma}{\sigma} C_i \exp \lambda_i T_0,$$

$$\bar{Z}_0(T_0) = C_3 \exp(-bT_0),$$

其中 $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma}]$, $C_i, i = 1, 2$ 为任意常数.

令

$$H_i(X, Y, Z, p) = 0, i = 1, 2, 3, \tag{8}$$

并设

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=0}^{\infty} x_i(T_0) p^i, \\ Y &= \sum_{i=0}^{\infty} y_i(T_0) p^i, \\ Z &= \sum_{i=0}^{\infty} z_i(T_0) p^i. \end{aligned} \tag{9}$$

将 (5)–(7) (9) 式代入 (8) 式, 展开非线性项为 p 的幂级数, 比较等式两边 p 的同次幂的系数. 由 p 的零次幂的系数, 可得

$$L_i(x_0, y_0, z_0) = L_i(\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0), i = 1, 2, 3.$$

显然, 这时我们可取 $x_0 = \bar{X}_0, y_0 = \bar{Y}_0, z_0 = \bar{Z}_0$. 即

$$x_0(T_0) = C_1 \exp \lambda_1 T_0 + C_2 \exp \lambda_2 T_0, \tag{10}$$

$$y_0(T_0) = \frac{\lambda_1 + \sigma}{\sigma} C_1 \exp \lambda_1 T_0$$

$$+ \frac{\lambda_2 + \sigma}{\sigma} C_2 \exp \lambda_2 T_0, \quad (11)$$

$$z_0(T_0) = C_3 \exp(-bT_0). \quad (12)$$

考虑到系统(1)–(3)解的零次近似(10)–(12),再由同伦映射(4)及(8)–(9)式得

$$L_1(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

$$L_2(x_1, y_1, z_1) = -x_0 z_0,$$

$$L_3(x_1, y_1, z_1) = x_0 y_0.$$

将(10)–(12)式代入上式得

$$L_1(x_1, y_1, z_1) = 0, \quad (13)$$

$$L_2(x_1, y_1, z_1) = -\sum_{i=1}^2 C_i C_3 \exp(\lambda_i - b) T_0 \quad (14)$$

$$L_3(x_1, y_1, z_1) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{\lambda_i + \sigma}{\sigma} C_i C_j \times \exp(\lambda_i + \lambda_j) T_0. \quad (15)$$

系统(13)–(15)且具有零初始条件 $(X_1(0), Y_1(0), Z_1(0)) = (0, 0, 0)$ 的解为

$$x_1(T_0) = \sum_{i=1}^2 D_i \exp \lambda_i T_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma C_i C_3}{2b\lambda_i - (b - \sigma)(b - 1)} \times \exp(\lambda_i - b) T_0, \quad (16)$$

$$y_1(T_0) = \sum_{i=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma) D_i}{\sigma} \exp \lambda_i T_0 + \sum_{i=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma - b) C_i C_3}{2b\lambda_i - (b - \sigma)(b - 1)} \times \exp(\lambda_i - b) T_0, \quad (17)$$

$$z_1(T_0) = \sum_{i,j=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma) C_i C_j}{(\lambda_i + \lambda_j + b) \sigma} \times [-\exp(-bT_0) + \exp(\lambda_i + \lambda_j) T_0], \quad (18)$$

其中

$$D_1 = \frac{(\lambda_2 + \sigma)A - \sigma B}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$D_2 = \frac{-(\lambda_1 + \sigma)A + \sigma B}{\lambda_1 - \lambda_2},$$

$$A = \sum_{i=1}^2 \frac{\sigma C_i C_3}{2b\lambda_i - (b - \sigma)(b - 1)},$$

$$B = \sum_{i=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma - b) C_i C_3}{2b\lambda_i - (b - \sigma)(b - 1)}.$$

于是由(9)–(10)–(12)–(16)–(18)式,系统(1)–(3)解的一次近似 (X_1, Y_1, Z_1) 为 $X_1 = x_0 + x_1,$

$Y_1 = y_0 + y_1, Z_1 = z_0 + z_1.$ 即

$$X_1(T_0) = \sum_{i=1}^2 (C_i + D_i) \exp \lambda_i T_0 + \sum_{i,j=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma) C_i C_j}{(\lambda_i + \lambda_j + \sigma)(\lambda_i + \lambda_j + 1)} \times \exp(\lambda_i + \lambda_j) T_0, \quad (19)$$

$$Y_1(T_0) = \sum_{i=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma)(C_i + D_i)}{\sigma} \exp \lambda_i T_0 + \sum_{i,j=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma) C_i C_j}{\sigma(\lambda_i + \lambda_j + 1)} \times \exp(\lambda_i + \lambda_j) T_0, \quad (20)$$

$$Z_1(T_0) = C_3 \exp(-bT_0) + \sum_{i,j=1}^2 \frac{(\lambda_i + \sigma) C_i C_j}{(\lambda_i + \lambda_j + b) \sigma} \times [-\exp(-bT_0) + \exp(\lambda_i + \lambda_j) T_0]. \quad (21)$$

用相同的方法,可得 Lorenz 系统(1)–(3)的更高次的近似解.

4. 与模拟精确解对照

现给定 Lorenz 系统(1)–(3)一组无量纲参数 $\sigma = 10, r = 0.3, b = 4$ 和初始条件 $X(0) = Y(0) = Z(0) = 0.5.$ 这时由(19)–(21)式,可得系统(1)–(3)的同伦映射一次近似解.我们可以利用 Matlab 软件分别画出 X, Y, Z 的曲线并与系统(1)–(3)的模拟精确解对应的曲线作对照.对照图如图1–4所示.

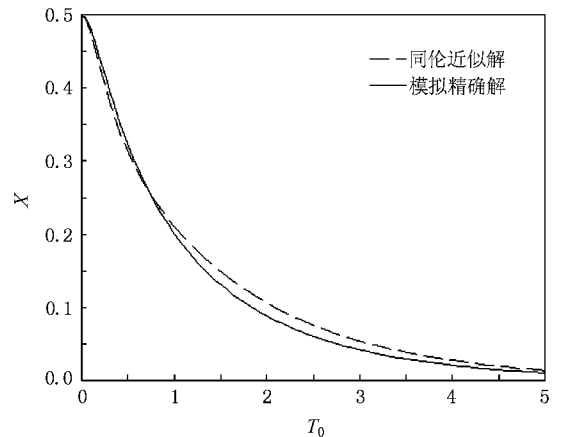


图1 X的同伦映射一次近似解(虚线)与模拟精确解(实线)的图形对照

由曲线对照图可以看出,用同伦映射方法得到的一次近似解就具有较高的精度.

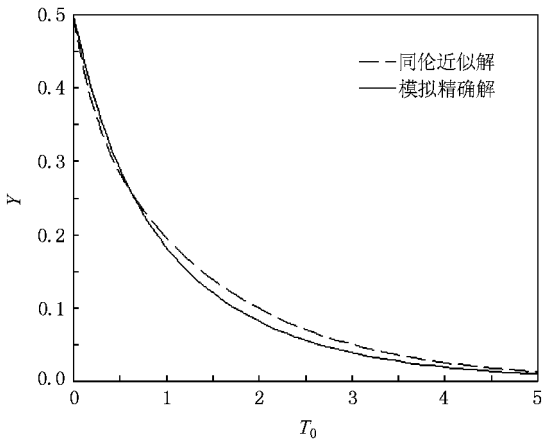


图 2 Y 的同伦映射一次近似解(虚线)与模拟精确解(实线)的图形对照

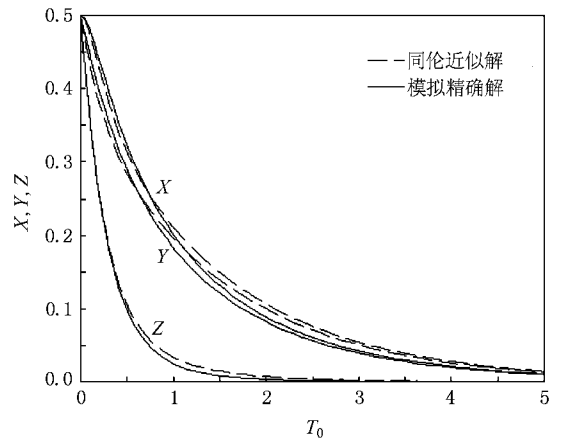


图 4 X, Y, Z 的同伦映射一次近似解(虚线)与模拟精确解(实线)的图形对照

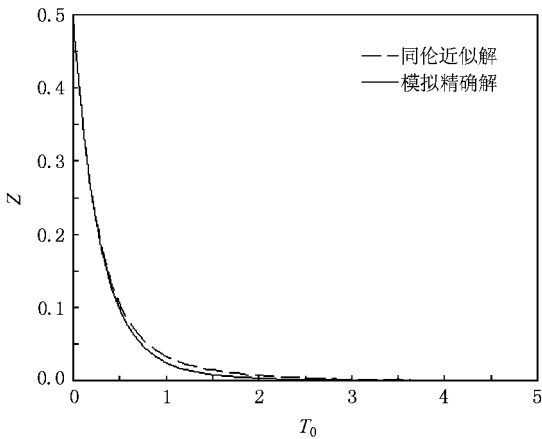


图 3 Z 的同伦映射一次近似解(虚线)与模拟精确解(实线)的图形对照

5. 讨 论

Lorenz 系统是流体力学中典型的非线性系统,其解的结构比较复杂.取不同的参数,其解在本质上可能有不同差异.取值参数在一定的范围内,相应的

解就会出现“蝴蝶效应”,形成混沌.本文第 4 节中所举的一个具体例子,由于所取的参数属于非混沌区,故解的结构比较简单,不出现混沌现象.但是,从所举的例子的一次近似解的表示式(19)–(21)及其模拟曲线均可看出其解当 $T_0 \rightarrow \infty$ 时而趋于零的.故系统的解是渐近稳定的,在相空间中的轨线趋于稳定的结点.这与模拟精确解的曲线图形情况相符合.

由于大气物理中的复杂性,我们需要建立它的基本模型方程,并且去求解它.用同伦映射方法就是一个简单而有效的方法.它是首先构造一组同伦映射,然后根据模型方程的结构,求出各次近似去逼近原方程的精确解.本文中从对应系统(1)–(3)的线性系统的解($\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$)作为精确解的零次近似(x_0, y_0, z_0)这是十分自然的.这样一般可以较快地得到近似解所要求的精度.同时,用同伦映射方法得到的是近似解析解,它不同于用一般计算方法得到的数值解.因此得到的近似解析解还可进行解析运算.从而还可以得到解的更多性态和其他相关的物理量的定性、定量的描述.关于这方面的情况,本文不再进一步讨论.

[1] Emanuel K A 1979 *J. Atm. Sci.* **36** 2425
 [2] Sun W Y 1995 *Q. J. Meteorol. Soc.* **121** 419
 [3] Ni W, Wei J C 2006 *J. Diff. Eqns.* **221** 158
 [4] Bartier J P 2006 *Asymptotic Anal.* **46** 325
 [5] Khazminskii R Z, Yin G 2005 *J. Diff. Eqns.* **212** 85
 [6] Marques I 2005 *Nonlinear Anal.* **61** 21
 [7] Llibre J, da Silva P R, Teixeira M A 2007 *J. Dyn. Differ. Equations* **19** 309
 [8] Mo J Q, Zhu J, Wang H 2003 *Prog. Natu. Sci.* **13** 768
 [9] Mo J Q, Lin W T, Zhu J 2004 *Prog. Natu. Sci.* **14** 1126
 [10] Mo J Q, Lin W T, Wang H 2007 *Prog. Natu. Sci.* **17** 230
 [11] Mo J Q, Wang H, Lin W T, Lin Y H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6 (in Chinese) [莫嘉琪, 王 辉, 林万涛, 林一骅 2006 物理学报 **55** 6]
 [12] Mo J Q, Wang H, Lin W T 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3229 (in Chinese) [莫嘉琪, 王 辉, 林万涛 2006 物理学报 **55** 3229]

- [13] Mo J Q ,Lin W T ,Lin Y H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3127 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛、林一骅 2007 物理学报 **56** 3127]
- [14] Mo J Q ,Lin W T 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5565 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2007 物理学报 **56** 5565]
- [15] Mo J Q ,Lin W T 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1291 (in Chinese) [莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 1291]
- [16] Mo J Q ,Wang H ,Lin W T ,Lin Y H 2006 *Chin. Phys.* **15** 671
- [17] Mo J Q ,Wang H ,Lin W T 2006 *Chin. Phys.* **15** 1927
- [18] Mo J Q ,Lin W T ,Wang H 2007 *Chin. Phys.* **16** 578
- [19] Mo J Q ,Lin W T ,Lin Y H 2007 *Chin. Phys.* **16** 1908
- [20] Mo J Q ,Lin W T ,Lin Y H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 370
- [21] Mo J Q ,Lin W T ,Lin Y H 2008 *Chin. Phys. B* **17** 743
- [22] He J H 2002 *Approximate Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou : Henan Science and Technology Press) (in Chinese) [何吉欢 2002 工程和科学计算中的近似非线性分析方法 (郑州 河南科学技术出版社)]
- [23] Chou J F 2002 *Nonlinear and complexity in Atmospheric Sciences* (in Chinese) [丑纪范 2002 大气科学中的非线性与复杂性 (北京 : 气象出版社)]

Homotopic mapping method for solving a class of Lorenz system^{*}

Mo Jia-Qi^{1,2,3,†} Lin Wan-Tao⁴

¹ *Department of Mathematics ,Anhui Normal University ,Wuhu 241000 ,China*

² *Division of Computational Science ,E-Institutes of Shanghai Universities at SJTU ,Shanghai 200240 ,China*

³ *Department of Mathematics ,Huzhou Teachers College ,Huzhou 313000 ,China*

⁴ *LASG ,Institute of Atmospheric Physics ,Chinese Academy of Sciences ,Beijing 100029 ,China*

(Received 18 March 2008 ; revised manuscript received 17 April 2008)

Abstract

The problem of solving the Lorenz equation is considered. Firstly ,a set of homotopic mapping is constructed. Then the initial approximate solution is determined. Finally ,using the homotopic mapping ,the approximation for corresponding model is found. The homotopic mapping method is an analytic method ,the obtained solution can be used in analytic operations subsequently.

Keywords : Lorenz equation , homotopic mapping , approximate solution , El Niño and La Niño phenomena

PACC : 0230 , 0200

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40676016) ,the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03 ,2004CB418304) ,the Key of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and in part by E-Institutes of Shanghai Municipal Education Commission (Grant Nos. E03004).

[†] E-mail : mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn