第 57 卷 第 11 期 2008 年 11 月
1000-3290/2008/57(11)/6699-05
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57,No.11,November,2008

相空间中变质量力学系统 Lie-Mei 对称性的两个守恒量

刘仰魁[1)]　方建会[2)†]

1)(陇东学院物理与电子工程学院,庆阳 745000)

2)(中国石油大学物理科学与技术学院,东营 257061)

(2007 年 12 月 6 日收到;2008 年 2 月 23 日收到修改稿)

研究相空间中变质量力学系统 Lie-Mei 对称性导致的两个守恒量,给出系统 Lie-Mei 对称性的定义和判据,引入谐调函数,得到系统 Lie-Mei 对称性导致的两个守恒量的条件和形式,并给出应用算例. 由于谐调函数可根据寻找规范函数的需要适当选取,且选取具有多样性,因此能够找到系统 Lie-Mei 对称性更多的守恒量.

关键词:相空间, 变质量系统, Lie-Mei 对称性, 守恒量

PACC:0320

1. 引　　言

力学系统的对称性与守恒量的研究具有重要的数学意义和物理意义,在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位. 力学系统的近代对称性主要有 Noether 对称性、Lie 对称性和 Mei 对称性[1—7]. 寻找到的守恒量主要有 Noether 守恒量,Hojman 守恒量和 Mei 守恒量[5,8]. 近年来,力学系统的三种主要对称性及其守恒量研究备受人们关注,是一个热门的研究领域,取得了一系列重要成果[3—14]. 最近,Mei 等人将三种主要的对称性进行联合,研究了有关力学系统的联合对称性、统一对称性及其导致的守恒量[15—19],提升了对称性与守恒量理论研究的层次和水平. 本文研究相空间中变质量力学系统的联合对称性——Lie-Mei 对称性导致的两个守恒量,给出系统的 Lie-Mei 对称性导致的两个守恒量的条件和形式,并举例说明结果的应用.

2. 系统的运动微分方程

研究 N 个质点组成的力学系统. 在时刻 t,第 i 个质点的质量为 $m_i(i=1,2,\cdots,N)$,在时刻 $t+\mathrm{d}t$,由 i 质点分离(或并入)的微粒质量为 $\mathrm{d}m_i$. 设 m_i 是时间和广义坐标的函数,即 $m_i=m_i(t,\boldsymbol{q})$,系统受到的约束是理想的完整约束,系统的位形由 n 个广义坐标 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 确定,则位形空间中系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=Q_s+P_s,\quad (s=1,2,\cdots,n),\tag{1}$$

其中 L 为系统的 Lagrange 函数,Q_s 为非势广义力,P_s 为广义反推力,有

$$P_s=\dot{m}_i(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i)\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s},\tag{2}$$

$\boldsymbol{u}_i$ 为分离或并入 m_i 的微粒相对 m_i 的速度.

在相空间中方程(1)可表示为

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\tilde{Q}_s+\tilde{P}_s,\tag{3}$$

其中 $H=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$ 为系统的 Hamiltion 函数,

$$\tilde{Q}_s=\tilde{Q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})),$$

$$\tilde{P}_s=\tilde{P}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=P_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})).$$

方程(3)可展开为显式

$$\dot{q}_s=g_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),$$

$$\dot{p}_s=h_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}),$$

† E-mail:fangjh@hdpu.edu.cn

$$(s = 1, \cdots, n). \tag{4}$$

3. 系统的 Lie-Mei 对称性的定义和判据

引入相空间的无限小群变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}),$$
$$q_s^*(t^*) = q_s(t) + \varepsilon\xi_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}),$$
$$p_s^*(t^*) = p_s(t) + \varepsilon\eta_s(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}). \tag{5}$$

其中 ε 为无限小参量，ξ_0，ξ_s，η_s 为无限小变换的生成元.

定义　如果力学系统(3)的一个对称性既是 Lie 对称性又是 Mei 对称性，则称该对称性为系统(3)的 Lie-Mei 对称性.

方程(3)的 Lie 对称性确定方程为

$$X^{(1)}\left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\right) = 0,$$
$$X^{(1)}\left(\dot{p}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} - \tilde{Q}_s - \tilde{P}_s\right) = 0, \tag{6}$$

其中

$$X^{(1)} = X^{(0)} + (\dot{\xi}_s - \dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s} + (\dot{\eta}_s - \dot{p}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{p}_s}, \tag{7}$$

$$X^{(0)} = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s} + \eta_s\frac{\partial}{\partial p_s}, \tag{8}$$

方程(6)也可写成下列等价形式：

$$\dot{\xi}_s - g_s\dot{\xi}_0 = X^{(0)}(g_s),$$
$$\dot{\eta}_s - h_s\dot{\xi}_0 = X^{(0)}(h_s). \tag{9}$$

方程(3)的 Mei 对称性确定方程(也称判据方程)为

$$\frac{\partial}{\partial p_s}[X^{(0)}(H)] = 0,$$
$$\frac{\partial}{\partial q_s}[X^{(0)}(H)] - X^{(0)}(\tilde{Q}_s + \tilde{P}_s) = 0. \tag{10}$$

根据定义，利用(6)式和(10)式可得如下判据.

判据　对相空间中的力学系统(3)，如果无限小变换的生成元 ξ_0，ξ_s，η_s 满足

$$\left\{X^{(1)}\left(\dot{q}_s - \frac{\partial H}{\partial p_s}\right)\right\}^2 + \left\{X^{(1)}\left(\dot{p}_s + \frac{\partial H}{\partial q_s} - \tilde{Q}_s - \tilde{P}_s\right)\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial p_s}[X^{(0)}(H)]\right\}^2 + \left\{\frac{\partial}{\partial q_s}[X^{(0)}(H)] - X^{(0)}(\tilde{Q}_s + \tilde{P}_s)\right\}^2 = 0, \tag{11}$$

则相应的对称性是系统的 Lie-Mei 对称性.

4. 系统 Lie-Mei 对称性导致的两个守恒量

下述定理给出了相空间中变质量力学系统 Lie-Mei 对称性导致的两个守恒量的条件和形式.

定理 1　如果相空间中变质量力学系统(3)的 Lie-Mei对称性的生成元 ξ_0，ξ_s 和规范函数 $G_M = G_M(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 满足条件

$$X^{(0)}(p_s)\dot{\xi}_s + \frac{d}{dt}[X^{(0)}(p_s)]\xi_s - \frac{\partial}{\partial t}[X^{(0)}(H)]f - \xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}[X^{(0)}(H)] - X^{(0)}(H)\dot{f} + X^{(0)}(\tilde{Q}_s + \tilde{P}_s)(\xi_s - \dot{q}_s f) + \dot{G}_M = 0, \tag{12}$$

则系统存在如下的守恒量：

$$I_M = X^{(0)}(p_s)\xi_s - X^{(0)}(H)f + G_M = \text{const}. \tag{13}$$

其中 $f = f(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ 为使规范函数 G_M 存在的任意函数，称 f 为谐调函数.

证明　将 I_M 对 t 求导有

$$\frac{dI_M}{dt} = X^{(0)}(p_s)\dot{\xi}_s + \frac{d}{dt}[X^{(0)}(p_s)]\xi_s - X^{(0)}(H)\dot{f} - \left[\frac{\partial}{\partial t}X^{(0)}(H) + \dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}X^{(0)}(H) + \dot{p}_s\frac{\partial}{\partial p_s}X^{(0)}(H)\right]f + \dot{G}_M. \tag{14}$$

由定义可知，系统的 Lie-Mei 对称性一定是系统的 Mei 对称性.将(12)式代入(14)式，并利用 Mei 对称性的判据方程(10)可得

$$\frac{dI_M}{dt} = 0. \tag{15}$$

如果取 $f = \xi_0$，则(12)式和(13)式分别化为

$$X^{(0)}(p_s)\dot{\xi}_s + \frac{d}{dt}[X^{(0)}(p_s)]\xi_s - X^{(0)}[X^{(0)}(H)] - X^{(0)}(H)\dot{\xi}_0 + X^{(0)}(\tilde{Q}_s + \tilde{P}_s)(\xi_s - \dot{q}_s\xi_0) + \dot{G}_M = 0, \tag{16}$$

$$I_M = X^{(0)}(p_s)\xi_s - X^{(0)}(H)\xi_0 + G_M = \text{const}. \tag{17}$$

(16)式就是相空间中变质量力学系统的对称性导致 Mei 守恒量的条件，而(17)式正是相空间中变质量

力学系统的对称性导致的 Mei 守恒量.

定理 2　如果相空间中变质量力学系统(3)的 Lie-Mei对称性的生成元 ξ_0,ξ_s 和规范函数 $G_N = G_N(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$满足条件

$$p_s\dot{\xi}_s - \frac{\partial H}{\partial t}f - \frac{\partial H}{\partial q_s}\xi_s - H\dot{f} + (\tilde{Q}_s + \tilde{P}_s)(\xi_s - \dot{q}_s f) + \dot{G}_N = 0, \tag{18}$$

则系统存在如下的守恒量:

$$I_N = p_s\xi_s - Hf + G_N = \text{const}. \tag{19}$$

其中 $f = f(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})$为使规范函数 G_N 存在的任意函数,称 f 为谐调函数.

证明　将 I_N 对 t 求导,并利用(18)式和(3)式可得

$$\frac{\mathrm{d}I_N}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{20}$$

如果取 $f = \xi_0$,则(18)式化为相空间中变质量力学系统的对称性导致 Noether 守恒量的条件,(19)式化为相空间中变质量力学系统的对称性导致的 Noether 守恒量.

5. 算　　例

变质量力学系统的 Lagrange 函数为

$$L = \frac{1}{2}m_0\exp(-t)(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + \frac{1}{2}t^2, \tag{21}$$

系统所受的非势广义力为

$$Q_1 = \frac{1}{2}m_0\exp(-t)\dot{q}_1,$$
$$Q_2 = \frac{1}{2}m_0\exp(-t)\dot{q}_2, \tag{22}$$

假设

$$\boldsymbol{u}_i = -\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i, \tag{23}$$

试研究系统 Lie-Mei 对称性的两个守恒量.

该系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{1}{2m_0\exp(-t)}(p_1^2 + p_2^2) - \frac{1}{2}t^2. \tag{24}$$

由方程(3)可以得到

$$\dot{q}_1 = \frac{p_1}{m_0\exp(-t)},$$
$$\dot{q}_2 = \frac{p_2}{m_0\exp(-t)},$$
$$\dot{p}_1 = 0,$$
$$\dot{p}_1 = 0. \tag{25}$$

取无限小生成元为

$$\xi_0 = -2, \xi_1 = -q_1, \xi_2 = -q_2,$$
$$\eta_1 = p_1, \eta_2 = p_2, \tag{26}$$

则

$$X^{(0)}(H) = 2t. \tag{27}$$

容易验证,对生成元(26),系统 Lie-Mei 对称性的判据方程(11)满足.由(12)式和(18)式可得

$$-p_1\dot{q}_1 - p_2\dot{q}_2 - 2f - 2t\dot{f} + \dot{G}_N = 0, \tag{28}$$

$$-p_1\dot{q}_1 - p_2\dot{q}_2 - \left[\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m_0\exp(-t)} - t\right]f - \left[\frac{p_1^2 + p_2^2}{2m_0\exp(-t)} - \frac{1}{2}t^2\right]\dot{f} + \dot{G}_N = 0. \tag{29}$$

1)若取 $f = p_2 + t$,则有

$$G_M = \frac{p_1^2 + p_2^2}{m_0\exp(-t)} + (p_2 + t)^2 + t^2, \tag{30}$$

$$G_N = \frac{p_1^2 + p_2^2}{m_0\exp(-t)} + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m_0\exp(-t)}(p_2 + t) - \frac{1}{2}t(p_2 + t)^2 + \frac{1}{6}(p_2 + t)^3 - \frac{1}{6}t^3. \tag{31}$$

由(13)式和(19)式可得

$$I_M = -p_1q_1 - p_2q_2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{m_0\exp(-t)} + p_2^2 = \text{const}, \tag{32}$$

$$I_N = -p_1q_1 - p_2q_2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{m_0\exp(-t)} + \frac{1}{6}p_2^3 = \text{const}. \tag{33}$$

2)若取 $f = q_1 - \frac{p_1}{m_0\exp(-t)} + t$,则有

$$G_M = \frac{p_1^2 + p_2^2}{m_0\exp(-t)} + \left(q_1 - \frac{p_1}{m_0\exp(-t)} + t\right)^2 + t^2, \tag{34}$$

$$G_N = \frac{p_1^2 + p_2^2}{m_0\exp(-t)} + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m_0\exp(-t)} \times \left(q_1 - \frac{p_1}{m_0\exp(-t)} + t\right) - \frac{1}{2}t\left(q_1 - \frac{p_1}{m_0\exp(-t)} + t\right)^2 + \frac{1}{6}\left(q_1 - \frac{p_1}{m_0\exp(-t)} + t\right)^3 - \frac{1}{6}t^3. \tag{35}$$

由(13)式和(19)式可得

$$I_M = -p_1q_1 - p_2q_2 + \frac{p_1^2 + p_2^2}{m_0\exp(-t)}$$

$$+\left(q_1-\frac{p_1}{m_0\exp(-t)}\right)^2=\text{const},\tag{36}$$

$$I_{\mathrm{N}}=-p_1q_1-p_2q_2+\frac{p_1^2+p_2^2}{m_0\exp(-t)}$$

$$+\frac{1}{6}\left(q_1-\frac{p_1}{m_0\exp(-t)}\right)^3=\text{const}.\tag{37}$$

3)取 $f=\xi_0=-2$,则有

$$G_{\mathrm{M}}=\frac{p_1^2+p_2^2}{m_0\exp(-t)}-4t,\tag{38}$$

$$G_{\mathrm{N}}=t_2.\tag{39}$$

由(13)式和(19)式可得

$$I_{\mathrm{M}}=I_{\mathrm{N}}=-p_1q_1-p_2q_2$$

$$+\frac{p_1^2+p_2^2}{m_0\exp(-t)}=\text{const}.\tag{40}$$

6. 结 论

本文给出的相空间中变质量力学系统 Lie-Mei 对称性的两个守恒量具有更一般的意义,当 $f=\xi_0$ 时,两个守恒量分别化为系统的 Mei 守恒量和 Noether 守恒量.本文结果中的谐调函数 f 可以根据寻找规范函数的需要适当选取,且选取具有多样性,因此能够找到系统 Lie-Mei 对称性的更多的守恒量.

[1] Noether A E 1918 *Math*. *Phys*. **KI II** 235

[2] Lutzky M 1979 *J*. *Phys* A:*Math*. *Gen*. **12** 973

[3] Mei F X 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 177

[4] Wang S Y,Mei F X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 5

[5] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing:Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese)[梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量(北京 北京理工大学出版社)]

[6] Fang J H 2003 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **40** 269

[7] Luo S K 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2941 (in Chinese)[罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[8] Zhang Y 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 2980 (in Chinese)[张 毅 2005 物理学报 **54** 2980]

[9] Guo Y X,Jiang L Y,Yu Y 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 181

[10] Zhang H B,Chen L Q 2005 *J*. *Phys*. *Soc*. *Japan* **74** 905

[11] Chen X W,Li Y M,Zhao Y H 2005 *Phys*. *Lett*. A **337** 274

[12] Qiao Y F,Zhao S H 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 499 (in Chinese)[乔永芬、赵淑红 2006 物理学报 **55** 499]

[13] Fu J L,Chen L Q,Jimenez S,Tang Y F 2006 *Phys*. *Lett*. A **358** 5

[14] Ge W K 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 1 (in Chinese)[葛伟宽 2007 物理学报 **56** 1]

[15] Mei F X,Xu X J,Zhang Y F 2004 *Acta Mech*. *Sin*. **20** 668

[16] Xu X J,Qin M C,Mei F X 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 1287

[17] Wu H B 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 452

[18] Fang J H,Wang P,Ding N 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3821 (in Chinese)[方建会、王 鹏、丁 宁 2006 物理学报 **55** 3821]

[19] Fang J H,Ding N,Wang P 2006 *Commun*. *Theor*. *Phys*. **46** 97

Two types of conserved quantities of Lie-Mei symmetry for a variable mass system in phase space

Liu Yang-Kui[1)]　Fang Jian-Hui[2)†]

1)(*College of Physics and Electronic Engineering*, *Longdong University*, *Qingyang* 745000, *China*)

2)(*College of Physics Science and Technology*, *China University of Petroleum*, *Dongying* 257061, *China*)

(Received 6 December 2007; revised manuscript received 23 February 2008)

Abstract

Two types of conserved quantities deduced by Lie-Mei symmetry of variable mass mechanical system are studied in phase space in the paper. The definition and criterion of Lie-Mei symmetry for the system are given. A coordination function is introduced, and the conditions under which the Lie-Mei symmetry leads to the two types of conserved quantities and the forms of the two types of conserved quantities are obtained. An illustrative example is given. The coordination function can be selected according to the requirement for finding the gauge function, and the choice of the coordination function is multiformal, so more conserved quantities can be deduced from Lie-Mei symmetry of the system.

Keywords: phase space, variable mass system, Lie-Mei symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

† E-mail: fangjh@hdpu.edu.cn