第 57 卷 第 11 期 2008 年 11 月
1000-3290/2008/57(11)/6714-04

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.11, November, 2008

一类完整系统的 Mei 对称性与守恒量*

葛伟宽
(湖州师范学院物理系, 湖州 313000)
(2008 年 1 月 18 日收到; 2008 年 2 月 4 日收到修改稿)

对一类完整系统的方程给出其 Mei 对称性的定义和判据. 如果 Mei 对称性是 Noether 对称性, 则可找到 Noether 守恒量. 如果 Mei 对称性是 Lie 对称性, 则可找到 Hojman 型守恒量. 举例说明结果的应用.

关键词: 分析力学, 完整系统, Mei 对称性, 守恒量
PACC: 0320

1. 引　　言

2000 年文献[1]提出形式不变性即 Mei 对称性以来, 有关 Mei 对称性与守恒量的研究已取得重要进展[2—10]. 1973 年 Djukić 提出第二类 Lagrange 方程的推广形式[11]. 本文对文献[11]的方程加以改进成为一类完整力学系统的方程. 对这类方程给出 Mei 对称性的定义和判据. 系统的 Mei 对称性通过 Noether 对称性利用 Noether 定理可求得 Noether 守恒量. 系统的 Mei 对称性通过 Lie 对称性利用 Hojman 定理可求得 Hojman 型守恒量.

2. 运动微分方程

文献[11]给出的运动微分方程为

$$\frac{1}{p-s}\left[(1+s)\frac{\partial L^{(p)}}{\partial q_j^{(p)}}-(1+p)\frac{\partial L^{(s)}}{\partial q_j^{(s)}}\right]=0$$

$$(p\neq s;p=1,2,\cdots;s=1,2,\cdots),\tag{1}$$

其中

$$L=T-V-\int_0^t \Phi\mathrm{d}t.\tag{2}$$

取 $s=1, p=2$, 则方程(1)表示为

$$2\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L-3\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L=0$$

$$(k=1,\cdots,n).\tag{3}$$

对方程(3)的右端施加广义力 Q_k, 则有

$$2\frac{\partial}{\partial \ddot{q}_k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L-3\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}L=Q_k,\tag{4}$$

方程(4)中的 Q_k 可以是任意的广义力, 它是文献[11]的推广形式.

3. 方程的 Mei 对称性

现在研究方程(4)的 Mei 对称性.

取时间和坐标的无限小变换

$$t^*=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),$$

$$q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{5}$$

在此变换下动力学函数 L 和 Q_s 分别变成 L^* 和 Q_s^*, 有

$$\begin{aligned}L^*&=L\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\\&=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(L)+O(\varepsilon^2),\\Q^*&=Q_s\left(t^*,\boldsymbol{q}^*,\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{q}^*}{\mathrm{d}t^*}\right)\\&=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})+\varepsilon X^{(1)}(Q_s)+O(\varepsilon^2),\end{aligned}\tag{6}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0)\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}.\tag{7}$$

定义　如果用变换后的动力学函数 L^*, Q_s^* 代替变换前的动力学函数 L, Q_s, 方程(4)的形式保持不变, 则这种对称性称为方程(4)的 Mei 对称性.

根据上述定义, 有

---

* 国家自然科学基金(批准号: 10572021)资助的课题.

$$2\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}L^*-3\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}L^*=Q_s^*.\tag{8}$$

将(6)式代入方程(8)，利用方程(4)并舍去 ε^2 及更高阶小项，得到

$$2\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_k}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\{X^{(1)}(L)\}-3\frac{\partial}{\partial\dot{q}_k}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{X^{(1)}(L)\}=X^{(1)}(Q_k).\tag{9}$$

于是有

判据　如果无限小生成元 ξ_0，ξ_s 满足方程(9)，则相应的不变性是系统的 Mei 对称性.

方程(9)称为方程(4) Mei 对称性的判据方程.

4. Mei 对称性与守恒量

由系统的 Mei 对称性通过 Noether 对称性和 Lie 对称性可导致两类守恒量.

4.1. Mei 对称性与 Noether 守恒量

对于由 L 和 Q_s 确定的完整力学系统，Noether 等式为[12—14]

$$L\dot{\xi}_0+X^{(1)}(L)+Q_s(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+\dot{G}_{\mathrm{N}}=0,\tag{10}$$

而 Noether 守恒量为

$$I_{\mathrm{N}}=L\xi_0+\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s}(\xi_s-\dot{q}_s\xi_0)+G_{\mathrm{N}}=\mathrm{const}.\tag{11}$$

命题 1　如果无限小生成元 ξ_0，ξ_s 满足(9)式并且存在规范函数 $G_{\mathrm{N}}=G_{\mathrm{N}}(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足(10)式，则 Mei 对称性导致 Noether 守恒量(11)式.

上述命题给出由 Mei 对称性通过 Noether 对称性间接导出 Noether 守恒量的方法.

4.2. Mei 对称性与 Hojman 型守恒量

将方程(4)展开，写成形式

$$\ddot{q}_s=\alpha_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\tag{12}$$

在时间不变的特殊无限小变换下，方程(12)的 Lie 对称性确定方程有形式

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s=\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k\quad(s,k=1,\cdots,n),\tag{13}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}.\tag{14}$$

Hojman 定理指出[15]，如果存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 满足

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0,\tag{15}$$

则方程(12)存在 Hojman 型守恒量

$$I_{\mathrm{H}}=\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)=\mathrm{const}.\tag{16}$$

命题 2　如果无限小生成元 ξ_s ($\xi_0=0$) 同时满足判据方程(9)和确定方程(13)，并且存在某函数 μ 满足(15)式，Mei 对称性可导致 Hojman 型守恒量(16)式.

命题 2 给出由 Mei 对称性通过 Lie 对称性间接导出 Hojman 型守恒量的方法.

5. 算　例

二自由度系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}_1^2+\dot{q}_2^2),Q_1=\dot{q}_2,Q_2=-\dot{q}_1,\tag{17}$$

试将其表达为形式(4)后研究其 Mei 对称性导致的守恒量.

经计算，有

$$X^{(1)}(L)=\dot{q}_1(\dot{\xi}_1-\dot{q}_1\dot{\xi}_0)+\dot{q}_2(\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0),$$

$$X^{(1)}(Q_1)=\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0,$$

$$X^{(1)}(Q_2)=-\dot{\xi}_1+\dot{q}_1\dot{\xi}_0,$$

取生成元为

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=0,\tag{18}$$

$$\xi_0=0,\xi_1=0,\xi_2=1,\tag{19}$$

则有

$$X^{(1)}(L)=X^{(1)}(Q_1)=X^{(1)}(Q_2)=0.$$

显然满足判据方程(9)，因此，生成元(18)和(19)是系统 Mei 对称性的生成元. 对生成元(18)和(19)，Noether 等式(10)分别给出

$$\dot{q}_2+\dot{G}_{\mathrm{N}_1}=0,$$

$$-\dot{q}_1+\dot{G}_{\mathrm{N}_2}=0,$$

于是有

$$G_{\mathrm{N}_1}=-q_2,G_{\mathrm{N}_2}=q_1,$$

而守恒量(11)式分别给出

$$I_{\mathrm{N}_1}=\dot{q}_1-q_2=\mathrm{const},\tag{20}$$

$$I_{N_2} = \dot{q}_2 + q_1 = \text{const}. \tag{21}$$

(13)式给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1 = \frac{\bar{d}}{dt}\xi_2,$$

$$\frac{\bar{d}}{dt}\frac{\bar{d}}{dt}\xi_2 = -\frac{\bar{d}}{dt}\xi_1,$$

因此，生成元(18)和(19)也是 Lie 对称性的生成元.

(15)式给出

$$\frac{\bar{d}}{dt}\ln\mu = 0,$$

它有解

$$\mu = 1, \tag{22}$$

$$\mu = \dot{q}_1 - q_2, \tag{23}$$

$$\mu = \dot{q}_2 + q_1. \tag{24}$$

将(18)，(24)式代入(16)式得

$$I_{H_1} = (\dot{q}_2 + q_1)^{-1} = \text{const}. \tag{25}$$

将(19)，(23)式代入(16)式得

$$I_{H_2} = -(\dot{q}_1 - q_2)^{-1} = \text{const}. \tag{26}$$

6. 结 论

本文研究了形如(4)式的一类完整力学系统的 Mei 对称性，给出 Mei 对称性的定义和判据，并由 Mei 对称性通过 Noether 对称性导出了 Noether 守恒量，由 Mei 对称性通过 Lie 对称性导出了 Hojman 型守恒量.

[1] Mei F X 2000 *J. of Beijing Institute of Technology* **9** 120

[2] Li R J，Qiao Y F，Meng J 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1 (in Chinese) [李仁杰、乔永芬、孟 军 2002 物理学报 **51** 1]

[3] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]

[4] Lou Z M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2046 (in Chinese) [楼智美 2004 物理学报 **53** 2046]

[5] Zhang Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2980 (in Chinese) [张 毅 2005 物理学报 **54** 2980]

[6] Gu S L，Zhang H B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3983 (in Chinese) [顾书龙、张宏彬 2005 物理学报 **54** 3983]

[7] Ge W K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1 (in Chinese) [葛伟宽 2007 物理学报 **56** 1]

[8] Wang S Y，Mei F X 2002 *Chin. Phys.* **11** 5

[9] Li H，Fang J H 2004 *Chin. Phys.* **13** 1187

[10] Zhen S W，Jia L Q，Yu H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 1399

[11] Djukić G 1973 *PMM* **37** 156 (in Russian)

[12] Li Z P 1993 *Classical and Quantal Dynamics of Constrained Systems and Their Symmetrical Properties* (Beijing: Beijing Polytechnic University Press) (in Chinese) [李子平 1993 经典和量子约束系统及其对称性质(北京 北京工业大学出版社)]

[13] Zhao Y Y，Mei F X 1999 *Symmetries and Invariants of Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [赵跃宇、梅凤翔 1999 力学系统的对称性与不变量(北京 科学出版社)]

[14] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[15] Hojman S A 1992 *J. Phys A: Math. Gen.* **25** L291

Mei symmetry and conserved quantity of a holonomic system*

Ge Wei-Kuan

(*Department of Physics*, *Huzhou Teachers College*, *Huzhou*　313000, *China*)

(Received 18 January 2008; revised manuscript received 4 February 2008)

Abstract

The definition and the criterion of a Mei symmetry for a holonomic system are obtained in this paper. If the Mei symmetry is a Noether symmetry, the Noether conserved quantity is given, If the Mei symmetry is a Lie symmetry, the conserved quantity of Hojman type is obtained. An example is given to illustrate the application of the result.

Keywords: analytical mechanics, holonomic system, Mei symmetry, conserved quantity

PACC: 0320

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10572021).