第 57 卷 第 11 期 2008 年 11 月
1000-3290/2008/57(11)/6730-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57,No.11,November,2008

具有 Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的任意 l 波束缚态近似解析解*

卫高峰[1)2)†] 龙超云[2)3)] 秦水介[3)] 张 欣[3)]

1)(西安文理学院物理系,西安 710065)
2)(贵州大学物理系,贵州 550025)
3)(贵州省光电子技术及应用重点实验室,贵州大学,贵阳 550025)
(2007 年 9 月 24 日收到;2008 年 5 月 3 日收到修改稿)

在球坐标系中研究了具有离心项的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程. 在标量势等于矢量势的条件下,运用合适的指数近似将具有离心项的径向 Klein-Gordon 方程转化成超几何微分方程,从而获得了系统的任意 l 波 Klein-Gordon 方程解析束缚态径向波函数. 最后,对 $l=0$ 和 $\alpha=0$ 或 1 两种特殊情况进行了简单讨论.

关键词:Manning-Rosen 势, Klein-Gordon 方程, 束缚态, 近似解析解
PACC:0365, 0365G

1. 引 言

精确解在量子力学中具有非常重要的作用,因为它包含了所有需要的量子信息. 因此,寻找精确解是一项非常有意义的工作. 然而,能够精确求解的仅仅是极少数的简单量子系统,如谐振子模型[1]、氢原子模型[2,3]. 因此,寻找精确解也是一项非常有挑战性的工作. 值得高兴的是人们已经发展了许多有效的方法(如变量分离[4]、因式分解[5]、超对称[6]、SWKB[7] 等方法)来精确求解一些物理模型,如 Hartmann 势[8,9]、反谐振子势[10,11]、非球谐振子势[12,13]、环状非球谐振子势[14—16]、Coulomb 势加新环形势[17,18],$V_0\ \tanh^2(r/d)$ 势[19] 等. 最近,相对论性和非相对论性指数势的研究引起了人们极大的兴趣和广泛的关注,如 Dominguez-Adame[20] 和 Talukdar[21] 分别给出了具有 Hulthén 势的 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态和散射态解,文献[22]和文献[23]分别给出了具有 Eckart 型标量势与矢量势的 Dirac 方程和 Klein-Gordon 方程的 s 波束缚态解,Harun[24] 和 Jia 等人[25] 分别给出了具有四参数指数势和五参数指数势的 Schrödinger 方程的精确解.

Manning-Rosen 势[26,27] 是由 Manning 和 Rosen 在 1933 年提出的一种非常重要的指数型双原子分子短程模型势. 鉴于它能够有效的描述双原子分子的振动行为,文献[28,29]分别采用因式分解法和路径积分法对 Manning-Rosen 势进行了广泛的研究. 文献[30,31]对 Manning-Rosen 势进行了非相对论性研究,分别给出了具有 Manning-Rosen 势 Schrödinger 方程的 s 波束缚态和散射态解. 文献[32]进一步对 Manning-Rosen 势进行了相对论性研究,给出了具有 Manning-Rosen 势 Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的 s 波束缚态解. 然而值得注意的是,在上面的文献中[28—32],由于离心项 $\frac{l(l+1)}{r^2}$ 的存在,Schrödinger 方程、Klein-Gordon 方程和 Dirac 方程的求解都被限制在 s 波($l=0$)解. 近期对于 Manning-Rosen 势的研究再度引起了人们的注意,如文献[33]对 Manning-Rosen 势进行了非相对论性研究,获得了具有 Manning-Rosen 势任意 l 波 Schrödinger 方程的束缚态能级及其波函数. 本文正是在文献[33]及近期我们工作[34,35](分别研究了具有 Manning-Rosen 势和 Eckart 势 Schrödinger 方程任意 l 波散射态解)的基础上,试图采用合适的指数近似方法探讨如何在相对

* 国家自然科学基金(批准号:10347003,60666001),贵州省杰出科技青年计划培养基金(批准号:2002,2013),贵州省自然科学基金资助的课题.

† 通讯联系人. E-mail:fgwei_2000@163.com (G.-F. Wei)

论情况下对具有离心项的 Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程进行求解. Manning-Rosen 势函数为[26—34]

$$V(r) = \frac{1}{kb^2}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}}\right], \quad (1)$$

其中 α 和 A 为无量纲参数, b 为与势程有关的参数. 研究发现, 当把 α 变为 $\alpha-1$ 时, 即 $\alpha \leftrightarrow \alpha-1$, Manning-Rosen 势保持形式不变. 并且当 $r = r_0 = b\ln\{1+[2\alpha(\alpha-1)/A]\}$, $(\alpha > 1)$ 时, Manning-Rosen 势具有最小值 $V(r_0) = -A^2/[4b^2\alpha(\alpha-1)]$. 更为具体的研究和应用可参阅文献[26—34].

本文在球坐标系中研究了具有离心项的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程. 在标量势等于矢量势的条件下, 运用合适的指数近似方法将具有离心项的径向 Klein-Gordon 方程转化成超几何微分方程, 从而获得了系统的任意 l 波解析束缚态径向波函数. 最后, 我们对 $l=0$ 和 $\alpha=0$ 或 1 两种特殊情况进行了简单讨论, 分别获得了具有 Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程任意 s 波 $(l=0)$ 精确束缚态解和具有离心项 Hulthén 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程任意 l 波 $(l\neq 0)$ 的近似束缚态径向波函数和相应的能量方程.

2. Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的任意 l 波束缚态解

具有标量势 $S(r)$ 与矢量势 $V(r)$ 的任意 l 波 Klein-Gordon 方程为 $(\hbar = c = 1)$

$$\{-\nabla^2 + [M + S(r)]^2\}\Psi(r,\theta,\phi) = [E - V(r)]^2\Psi(r,\theta,\phi). \quad (2)$$

设 $\Psi(r,\theta,\phi) = r^{-1}u(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ 代入方程(2), 可以得到径向 Klein-Gordon 方程为

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left\{[E^2 - M^2] - 2[MS(r) + EV(r)] + [V^2(r) - S^2(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}u(r) = 0. \quad (3)$$

当标量势等于矢量势时, 即

$$S(r) = V(r) = \frac{1}{kb^2}\left[\frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}}\right]. \quad (4)$$

把方程(4)代入方程(3)可得

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left\{[E^2 - M^2] - \frac{2(M+E)}{kb^2} \times \left[\frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}}\right] - \frac{l(l+1)}{r^2}\right\}u(r) = 0. \quad (5)$$

对于束缚态, 即 $E < M$, 方程(5)的边界条件为 $u(0) = 0$ 和 $u(\infty) = 0$. 在方程(5)中, $\frac{l(l+1)}{r^2}$ 即为离心项. 显然只有当 $l=0$ 时方程(5)才能够解析求解[33,34]. 然而, 我们可以类似于非相对论情况[33,34], 对离心项作合适的指数近似, 即取

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{e^{-r/b}}{b^2(1-e^{-r/b})^2}. \quad (6)$$

则方程(5)变为

$$\frac{d^2u(r)}{dr^2} + \left\{[E^2 - M^2] - \frac{2(M+E)}{kb^2} \times \left[\frac{\alpha(\alpha-1)e^{-2r/b}}{(1-e^{-r/b})^2} - \frac{Ae^{-r/b}}{1-e^{-r/b}}\right] - \frac{l(l+1)e^{-r/b}}{b^2(1-e^{-r/b})^2}\right\}u(r) = 0. \quad (7)$$

作变量代换 $x = e^{-r/b}$, 方程(7)可进一步转变为

$$x^2\frac{d^2u(x)}{dx^2} + x\frac{du(x)}{dx} - \left\{\lambda^2 + \frac{\beta^2\alpha(\alpha-1)x^2}{(1-x)^2} - \frac{\beta^2Ax}{1-x} + \frac{l(l+1)x}{(1-x)^2}\right\}u(x) = 0, \quad (8)$$

其中 $\lambda^2 = b^2(M^2 - E^2)$, $\beta^2 = 2(M+E)/k$.

考虑到边界条件 $r\to\infty \Rightarrow x\to 0$ 和 $r\to 0 \Rightarrow x\to 1$, 设方程(8)的解为

$$u(x) = (1-x)^{1+\delta}x^{\lambda}f(x), \quad (9)$$

其中

$$\delta = \frac{1}{2}\left[-1 + \sqrt{4\beta^2\alpha(\alpha-1) + 4l(l+1) + 1}\right]. \quad (10)$$

把方程(9)代入到方程(8)可得

$$(1-x)x\frac{d^2f(x)}{dx^2} + [(2\lambda+1) - (2\lambda+2\delta+3)x] \times \frac{df(x)}{dx} + [\beta^2A - (2\lambda+1)(1+\delta) - l(l+1)] \times f(x) = 0. \quad (11)$$

显然, 方程(11)是超几何方程[36,37], 其解可表示为超几何函数

$$f(x)={}_2F_1(\gamma;\mu;\nu;x)=\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(\gamma)_q(\mu)_q}{(\nu)_q}\frac{x^q}{q!},\qquad(12)$$

其中

$$(x)_q=\frac{\Gamma(x+q)}{\Gamma(x)},$$
$$\gamma=1+\lambda+\delta-\xi,$$
$$\mu=1+\lambda+\delta+\xi,$$
$$\nu=2\lambda+1,$$
$$\xi=\sqrt{\lambda^2+\delta^2+\delta+\beta^2A-l(l+1)}.\qquad(13)$$

考虑到解的有限性,超几何函数必须中断为一多项式[36,37],即

$$\gamma=1+\lambda+\delta-\xi=-n,\quad(n=0,1,2,\cdots),\qquad(14)$$

其中 n 为径向量子数.

由方程(9)和(12)可得具有离心项的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程任意 l 波($l\neq0$)的束缚态径向波函数(未归一化)

$$u(r)=(1-e^{-r/b})^{1+\delta}\times(e^{-r/b})^{\lambda}\times{}_2F_1(-n;2+2\lambda+2\delta+n;2\lambda+1;e^{-r/b}),\qquad(15)$$

其中,δ 和 λ 分别由方程(10)和方程(8)确定.由方程(13) 和方程(14)可以得到相应的能量方程为

$$\frac{1}{2}+n+b\sqrt{M^2-E^2}+\sqrt{\frac{2\alpha(\alpha-1)(M+E)}{k}+l(l+1)+\frac{1}{4}}-\sqrt{b^2(M^2-E^2)+\frac{2(M+E)(\alpha^2-\alpha+A)}{k}}=0,$$
$$(n=0,1,2,\cdots,l=0,1,2,\cdots).\qquad(16)$$

3. 讨 论

现在,让我们就能量方程(16)和径向波函数(15)讨论两种特殊情况.

1)当 $l=0$ 时,离心项 $\frac{l(l+1)}{r^2}=0$,则近似离心项 $\frac{l(l+1)e^{-r/b}}{(1-e^{-r/b})^2}=0$.在方程(15)和方程(16)中设 $l=0$,则方程(15)退化为

$$u(r)=(1-e^{-r/b})^{1+\delta}\times(e^{-r/b})^{\lambda}\times{}_2F_1(-n;2+2\lambda+2\delta+n;2\lambda+1;e^{-r/b}),\qquad(17)$$

方程(16)也退化为相应的能量方程,即

$$\frac{1}{2}+n+b\sqrt{M^2-E^2}+\sqrt{\frac{2\alpha(\alpha-1)(M+E)}{k}+\frac{1}{4}}-\sqrt{b^2(M^2-E^2)+\frac{2(M+E)(\alpha^2-\alpha+A)}{k}}=0,$$
$$(n=0,1,2,\cdots),\qquad(18)$$

其中

$$\delta=\frac{1}{2}[-1+\sqrt{4\beta^2\alpha(\alpha-1)+1}],$$
$$\beta^2=2(M+E)/k.$$

若将相应的参数取值与文献[32]中取值一一对应,即取 $k=\gamma=1,b=\rho,\alpha=\beta$,则方程(18)进一步变化为

$$\frac{1}{2}+n+\rho\sqrt{M^2-E^2}+\sqrt{2\beta(\beta-1)(M+E)+\frac{1}{4}}-\sqrt{\rho^2(M^2-E^2)+\frac{2(M+E)(\beta^2-\beta+A)}{k}}=0,$$
$$(n=0,1,2,\cdots).\qquad(19)$$

方程(19)即文献[32]中所给出的结果(即文献[32]中方程(19)).

因此,当 $l=0$,方程(15)和方程(16)退化为具有 Manning-Rosen 标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程任意 s 波($l=0$)精确束缚态径向波函数和相应的能量方程.

2)当 $\alpha=0$ 或 1 时,有 $\delta=l$,此时,方程(15)和方程(16)分别变为如下形式:

$$u(r)=(1-e^{-r/b})^{1+l}\times(e^{-r/b})^{\lambda}\times{}_2F_1(-n;2+2\lambda+2l+n;2\lambda+1;e^{-r/b}).\qquad(20)$$

$$1+n+l+b\sqrt{M^2-E^2}-\sqrt{b^2(M^2-E^2)+\frac{2A(M+E)}{k}}=0,$$
$$(n=0,1,2,\cdots,l=0,1,2,\cdots).\qquad(21)$$

显然,当 $\alpha=0$ 或 1 时,由方程(1)可以看出,Manning-Rosen 势退化为 Hulthén 势,即

$$V(r)=-\frac{A/kb^2}{(e^{r/b}-1)},\qquad(22)$$

现在,我们将方程(22)与文献[38]中 Hulthén 势(即文献[38]中方程(1))的参数一一对应,即取 $b=r_0$,

$\frac{A}{kb^2} = V_0$，则，能量方程(21)变为

$$\sqrt{M^2 - E^2} = \frac{V_0 r_0 (M + E)}{1 + n + l} - \frac{1 + n + l}{2r_0},$$
$$(n = 0,1,2,\cdots, l = 0,1,2,\cdots). \quad (23)$$

比较方程(23)与文献[38]中相应方程(22)的表达式

$$\sqrt{M^2 - E^2} = \frac{V_0 r_0 (M + E)}{n + l} - \frac{n + l}{2r_0},$$
$$(n = 1,2,3,\cdots, l = 0,1,2,\cdots).$$

可以看出，方程(23)与文献[38]中结果仅相差一个量子数，但是我们注意到文献[38]中量子数 $n = 1, 2, 3, \cdots$，而本文方程(23)中量子数 $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$. 因此，方程(23)与文献[38]中所给出的结果也是完全一致的.

所以，当 $\alpha = 0$ 或 1 时，方程(15)和方程(16)退化为具有离心项 Hulthén 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程任意 l 波($l \neq 0$)的近似束缚态径向波函数和相应的能量方程.

4. 结　　论

本文在球坐标系中研究了具有离心项的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程. 为了能够解析求解系统的 Klein-Gordon 方程，类似于非相对论的情况，对离心项作合适的指数近似，将具有离心项的径向 Klein-Gordon 方程转化成了超几何微分方程，从而在矢量势与标量势相等的条件下获得了具有离心项的 Manning-Rosen 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程的近似解析解. 最后，我们讨论了两种特殊情况：1)当 $l = 0$ 时，研究结果退化为任意 s 波($l = 0$)精确束缚态解. 2)当 $\alpha = 0$ 或 1 时，研究结果退化为具有离心项 Hulthén 型标量势与矢量势的 Klein-Gordon 方程任意 l 波($l \neq 0$)的近似解析束缚态解. 在结束本文之前，我们对本文中所取的指数近似即方程(6)作三点说明：第一，文献[33]及我们近期的工作[34,35]已采用该指数近似分别对 Manning-Rosen 势和 Eckart 势进行了非相对论性研究，并与前人的工作[39]进行了比较，研究发现在较短势程范围内(即较大的 b)该指数近似是一种非常有效的近似. 第二，为了进一步说明离心项$\frac{1}{r^2}$与近似离心项$\frac{e^{-r/b}}{b^2(1-e^{-r/b})^2}$的差别以及近似离心项随势程参数 b 的变化情况，我们将离心项及近似离心项作为变量 r 的函数，在图 1 中从左到右给出了当 $b = 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65$ 时近似离心项和离心项的变化曲线，从图中可以看出：1)当变量 r 在较大范围内取值时，近似离心项与离心项之间的差别将随着势程参数 b 取值的增大而减小，即在较短势程范围内(即较大参数 b)，近似离心项对离心项是一种有效的近似. 2)当变量 r 的取值逐渐增大时，近似离心项与离心项将更为接近，且势程参数 b 的取值对近似离心项的影响将逐渐减小，这主要是因为随着变量 r 的逐渐增大，近似离心项和离心项都迅速趋于 0 的原因. 考虑到变量 r 的整个变化范围，因此，该指数近似在较短势程范围内(即较大参数 b)是一种对离心项有效的近似，而在较大势程范围内(即较小参数 b)该近似不是一种较好的近似. 基于以上两点，相信本文所取的结果在短势程范围是合理可信的. 最后，需要指出的是其他近似，如

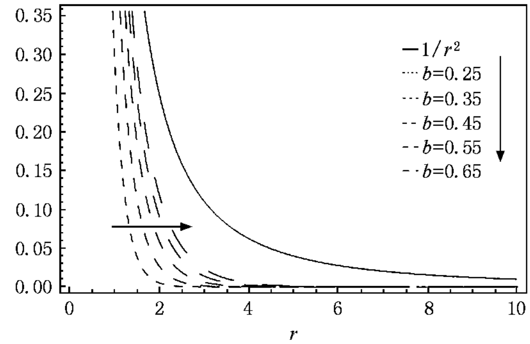

图 1　离心项$\frac{1}{r^2}$及近似离心项$\frac{e^{-r/b}}{b^2(1-e^{-r/b})^2}$作为变量 r 的函数，在图 1 中从左到右表示当 $b = 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65$ 时近似离心项和离心项的变化曲线

$$\frac{1}{r^2} \approx \frac{1}{b^2}\frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2}$$

由于其展开式

$$\frac{1}{b^2}\frac{e^{-2r/b}}{(1 - e^{-r/b})^2} \approx \frac{1}{r^2} - \frac{1}{br}$$

中包含了库仑项，因此，并不是一个较好的近似.

感谢强稳朝教授在结论部分对于近似离心项合理性给予的悉心指导.

[1] Messiah A 2000 *Quantum Mechanics* (New York: Dover) ch20

[2] Schiff L I 1995 *Quantum Mechanics* third ed (New York: McGraw-Hill)

[3] Landau L D, Lifshitz E M 1977 *Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory* third ed (pergamon)

[4] Zhang J F, Xu C Z, He B G 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 3652 (in Chinese) [张解放、徐昌智、何宝钢 2004 物理学报 **53** 3652]

[5] Zhang M C, Wang Z B 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 6229 (in Chinese) [张民仓、王振邦 2006 物理学报 **55** 6229]

[6] Chen G 2004 *Acta. Phys. Sin.* **53** 684 (in Chinese) [陈 刚 2004 物理学报 **53** 684]

[7] Chen G, Chen Z D 2004 *Chin. Phys.* **13** 445

[8] Chen C Y, Sun D S, Lu F L 2006 *Phys. Scr.* **74** 405

[9] Chen G 2004 *Chin. Phys.* **13** 144

[10] Dong S H, Sun G H, Lozada-Cassou M 2005 *Phys. Lett.* A **340** 94

[11] Wei G F, Long C Y, He Z, Qin S J, Zhao J 2007 *Phys. Scr.* **76** 442

[12] Chen G, Chen Z D, Lou Z M 2004 *Chin. Phys.* **13** 279

[13] Li N, Ju G X, Ren Z Z 2005 *Acta. Phys. Sin.* **54** 2520 (in Chinese) [李 宁、鞠国兴、任中洲 2005 物理学报 **54** 2520]

[14] Zhang X A, Chen K, Duan Z L 2005 *Chin. Phys.* **14** 42

[15] Guo J Y, Han J C, Wang R D 2006 *Phys. Lett.* A **353** 378

[16] Zhang M C, Wang Z B 2007 *Acta. Phys. Sin.* **56** 3688 (in Chinese) [张民仓、王振邦 2007 物理学报 **56** 3688]

[17] Chen C Y, Dong S H 2005 *Phys. Lett.* A **335** 374

[18] Chen C Y, Dong S H, Lu F L 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 3875 (in Chinese) [陈昌远、孙东升、陆法林 2006 物理学报 **55** 3875]

[19] Qiang W C, Dong S H 2005 *Phys. Scr.* **72** 127

[20] Dominguez-Adame F, 1989 *Phys. Lett.* A **136** 175

[21] Talukdar B, Yunus A, Amin M R, 1989 *Phys. Lett.* A **141** 326

[22] Zou X, Yi L Z, Jia C S 2005 *Phys. Lett.* A **346** 54

[23] Olgar E, Tütüncüler R K H 2006 Chin. *Phys. Lett.* **23** 539

[24] Harun E, Demirhan D, Büyükkiliç F 2000 *Phys. Lett.* A **275** 229

[25] Jia C S, Sun Y, Liu J Y, Sun L T 2003 *Phys. Lett.* A **311** 115

[26] Manning M F, Rosen N 1933 *Phys. Rev.* **44** 953

[27] Rosen N, Morse P M 1932 *Phys. Rev.* **42** 210

[28] Infeld I, Hull T E 1951 *Rev. Mod. Phys.* **23** 21

[29] Diaf A, Chouchaoui A, Lombard R J 2005 *Ann. Phys.* **317** 354

[30] Dong S H, J García-Ravelo 2007 *Phys. Scr.* **75** 307

[31] Chen C Y, Lu F L, Sun D S 2007 *Phys. Scr.* **76** 428

[32] Zhang M C, Wang Z B 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 521 (in Chinese) [张民仓、王振邦 2006 物理学报 **55** 521]

[33] Qiang W C, Dong S H 2007 *Phys. Lett.* A **368** 13

[34] Wei G F, Long C Y, Dong S H 2008 *Phys. Lett.* A **372** 2592

[35] Wei G F, Long C Y, Duan X Y, Dong S H 2008 *Phys. Scr.* **77** 035001

[36] Gradsgteyn I S, Ryzhik I M 1994 *Tables of Integrals, Series, and Products* fifth ed (New York: Academic Press)

[37] Wang Z X, Guo D R 1979 *An Introduction to Special Function* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [王竹溪、郭敦仁 1979 特殊函数概论(北京 科学出版社)]

[38] Chen C Y, Sun D S, Lu F L 2007 *Phys. Lett.* A **370** 219

[39] Lucha W, Schöberl F F 1999 *Int. J. Mod. Phys.* C **10** 607

Analytical approximations to the arbitrary l-wave bound state solutions of the Klein-Gordon equation for the Manning-Rosen potential*

Wei Gao-Feng[1)2)†]　Long Chao-Yun[2)3)]　Qin Shui-Jie[3)]　Zhang Xin[3)]

1)(*Department of Physics, Xi'an University of Arts and Science, Xi'an* 710065, *China*)

2)(*Department of Physics, College of Science, Guizhou University, Guiyang* 550025, *China*)

3)(*Laboratory for Photoelectric Technology and Application, Guizhou University, Guiyang* 550025, *China*)

(Received 24 September 2007; revised manuscript received 3 May 2008)

Abstract

The Klein-Gordon equation of equal scalar and vector Manning-Rosen potentials with the centrifugal term is investigated in the spherical coordinates. Using a proper exponential approximate approach, the radial Klein-Gordon equation with the centrifugal term is transformed to the hypergeometric differential equation, and the analytical bound state radial wave functions of the arbitrary l-wave Klein-Gordon equation are obtained. Finally, two special cases for $l=0$ and $\alpha=0$ or 1 are discussed briefly.

Keywords: Manning-Rosen potential, Klein-Gordon equation, bound states, approximate analytical solution

PACC: 0365, 0365G

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10347003, 60666001), the Planned Training Excellent Scientific and Technological Youth Foundation of Guizhou Province, China (Grant Nos. 2002, 2013), and the Science Foundation of Guizhou Province, China.

† Corresponding author. E-mail: fgwei_2000@163.com (G.-F. Wei)