

# 复杂超混沌 Lü 系统的电路实验\*

刘扬正<sup>1)†</sup> 姜长生<sup>1)</sup> 李心朝<sup>2)</sup> 孙 晗<sup>2)</sup>

1) 南京航空航天大学自动化学院, 南京 210016)

2) 南京工程学院非线性物理研究所, 南京 211167)

(2007 年 12 月 6 日收到, 2008 年 3 月 31 日收到修改稿)

利用对 Lü 系统实施反混沌控制的方法, 构建了一类关联且有多种切换方式的四维超混沌 Lü 系统. 依据系统的分岔图确定了各个子系统都处于超混沌状态时, 系统参数的取值范围. 分析了超混沌 Lü 系统平衡点的性质、超混沌吸引子的相图和 Lyapunov 指数等特性, 设计并实现了这类可切换超混沌 Lü 系统的硬件电路, 利用系统选择器, 同一电路可以实现多个关联子系统的功能. 电路实验表明, 可切换的复杂超混沌 Lü 系统具有丰富的动力学行为.

关键词: 超混沌 Lü 系统, 切换, 分岔图, 电路实验

PACC: 0545

## 1. 引 言

因为包含多个子系统的关联可切换复杂混沌系统<sup>[1-7]</sup>具有选择的多样性、变化的灵活性和动力学行为的复杂性, 在混沌保密通讯和混沌数字通信中有着广泛的应用<sup>[8-13]</sup>, 用于基于混沌同步的保密通讯, 可以增强混沌同步保密通讯的安全性能; 用于基于键控技术的混沌数字通信, 可以使系统间的切换更加灵活方便. 为了建构子系统足够多又容易相互切换的复杂混沌系统, 文献[4-7]采用增加并改变系统非线性特性的方法, 建构了多种关联且可切换的复杂混沌系统. 最近, 利用反混沌控制方法<sup>[1-3]</sup>, 以 Lorenz 系统及其多种变形系统<sup>[14-27]</sup>为基础, 构建四维超混沌系统的研究引人关注. 本文以三维 Lü 混沌系统<sup>[15]</sup>为基础, 利用反混沌控制的方法, 构建了一类关联且有多种切换方式的四维超混沌 Lü 系统. 首先, 依据系统的分岔图确定各个子系统都处于超混沌状态时, 系统参数的取值范围. 然后, 对四个四维超混沌 Lü 系统平衡点的性质、混沌吸引子的相图和 Lyapunov 指数等特性进行分析, 比较不同反混沌控制方式, 对系统动力学行为的影响. 最后, 设计实现四维超混沌 Lü 系统切换的实际电路并进行实验,

实验结果表明, 通过系统选择器的切换, 一个电路能实现多个关联子系统的功能, 并且关联可切换的复杂超混沌 Lü 系统具有丰富的动力学行为.

## 2. 系统构成与特性分析

利用对系统实施反混沌控制方法, 以三维 Lü 混沌系统为基础, 构建了一类关联且有多种切换方式的复杂超混沌 Lü 系统. 由于被扩展维的方式和反馈回原三维系统的方式不同, 四维超混沌 Lü 系统存在多种表现形式. 将四个四维超混沌 Lü 系统方程表述为以下形式:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + ay + w, \\ \dot{y} &= by - 10xz, \\ \dot{z} &= -cz + 10xy, \\ \dot{w} &= dx; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -ax + ay + w, \\ \dot{y} &= by - 10xz, \\ \dot{z} &= -cz + 10xy, \\ \dot{w} &= dy; \end{aligned} \quad (2)$$
$$\dot{x} = -ax + ay,$$

\* 国家自然科学基金(批准号 90405011), 江苏省高校自然科学基金(批准号 07KJD120081), 南京工程学院自然科学基金(批准号 KXJ07068)资助的课题.

† E-mail: lyz64@njit.edu.cn, lyz\_6410@163.com

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= by - 10xz, \\
 \dot{z} &= -cz + 10xy + w, \\
 \dot{w} &= dx; \\
 \dot{x} &= -ax + ay, \\
 \dot{y} &= by - 10xz, \\
 \dot{z} &= -cz + 10xy + w,
 \end{aligned} \quad (3)$$

$$\dot{w} = dy. \quad (4)$$

式中正常数  $a, b, c, d$  为系统参数,  $x, y, z, w$  为系统变量。

图 1 表示系统参数  $a = 10, b = 5, c = 3$  保持不变, 系统变量  $y$  随系统参数  $d$  变化的分岔图。根据这类四维混沌系统的分岔图, 确定使四个子系统都处于混沌状态的共同的系统参数值。

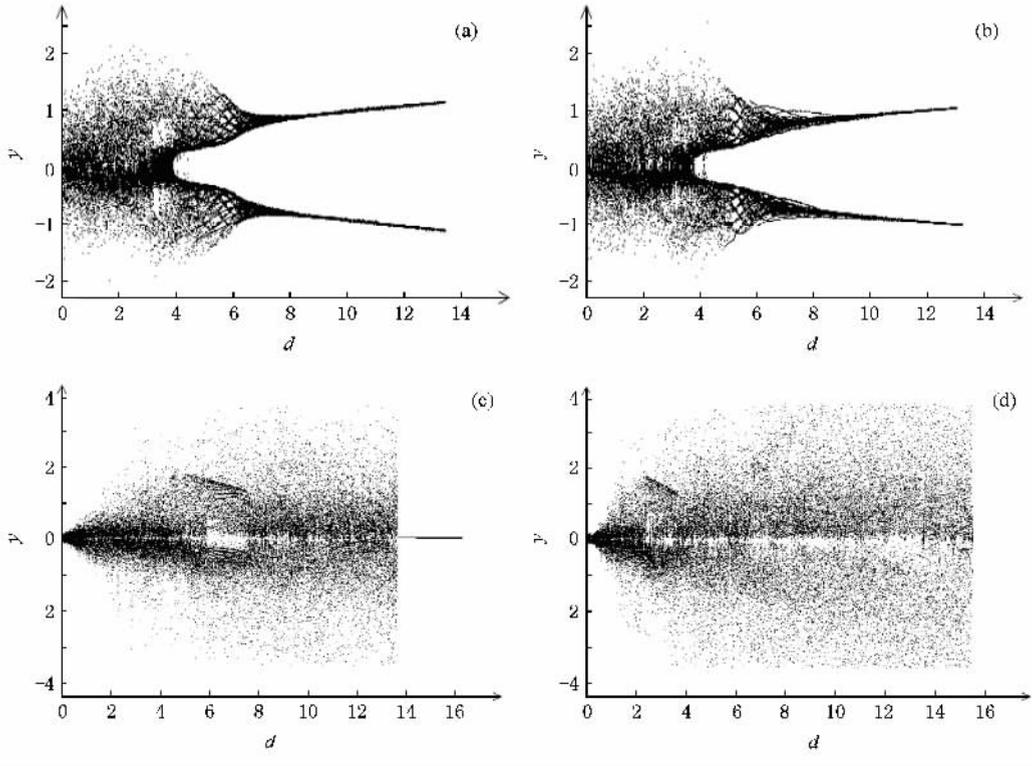


图 1 系统变量  $y$  随系统参数  $d$  变化的分岔图 (a) 系统(1)的分岔图 (b) 系统(2)的分岔图 (c) 系统(3)的分岔图 (d) 系统(4)的分岔图

从图 1 中可以看出, 系统参数  $d \in (0, 4)$  时, 四个子系统都处于混沌状态。

由系统(1)~(4)得到

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = -a + b - c \quad (5)$$

很显然  $-a + b - c < 0$ , 即保证四个子系统都具有耗散性。四个子系统都只有唯一的平衡点  $P^0(0, 0, 0, 0)$ , 在平衡点  $P^0$  处 Jacobian 矩阵分别为

$$J_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$J_3 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$J_4 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c & 1 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

由于四个四维超混沌 Lü 系统的 Jacobian 矩阵不同, 因此, 它们在平衡点  $P^0$  的特征值也不同, 可切换四维超混沌 Lü 系统的 Jacobian 矩阵在平衡点  $P^0$  处的特征值和系统参数皆为  $a = 10, b = 5, c = 3$  和  $d = 2.5$  时, Lyapunov 指数以及分形维数

$$D_L = j + \frac{1}{|\lambda_{(j+1)}|} \sum_{i=1}^j \lambda_{Li}$$

的分析结果见表 1.

由表 1 可知,四个系统都有两个大于零的

表 1 四个四维超混沌 Li 系统特性分析表

| 系统 | 特征值  | Lyapunov 指数                    | 分形维数   |
|----|--|--------------------------------|--------|
| 1  | $(-c, b, \frac{1}{2}(-a \pm \sqrt{a^2 - 4d}))$ | $(2.1405, 0.1229, 0, -18.611)$ | 3.1216 |
| 2  | $(-a, -c, 0, b)$                               | $(2.2811, 0.1245, 0, -17.362)$ | 3.1386 |
| 3  | $(-a, -c, 0, b)$                               | $(2.2727, 0.1243, 0, -17.741)$ | 3.1351 |
| 4  | $(-a, -c, 0, b)$                               | $(2.1844, 0.1279, 0, -16.176)$ | 3.1429 |

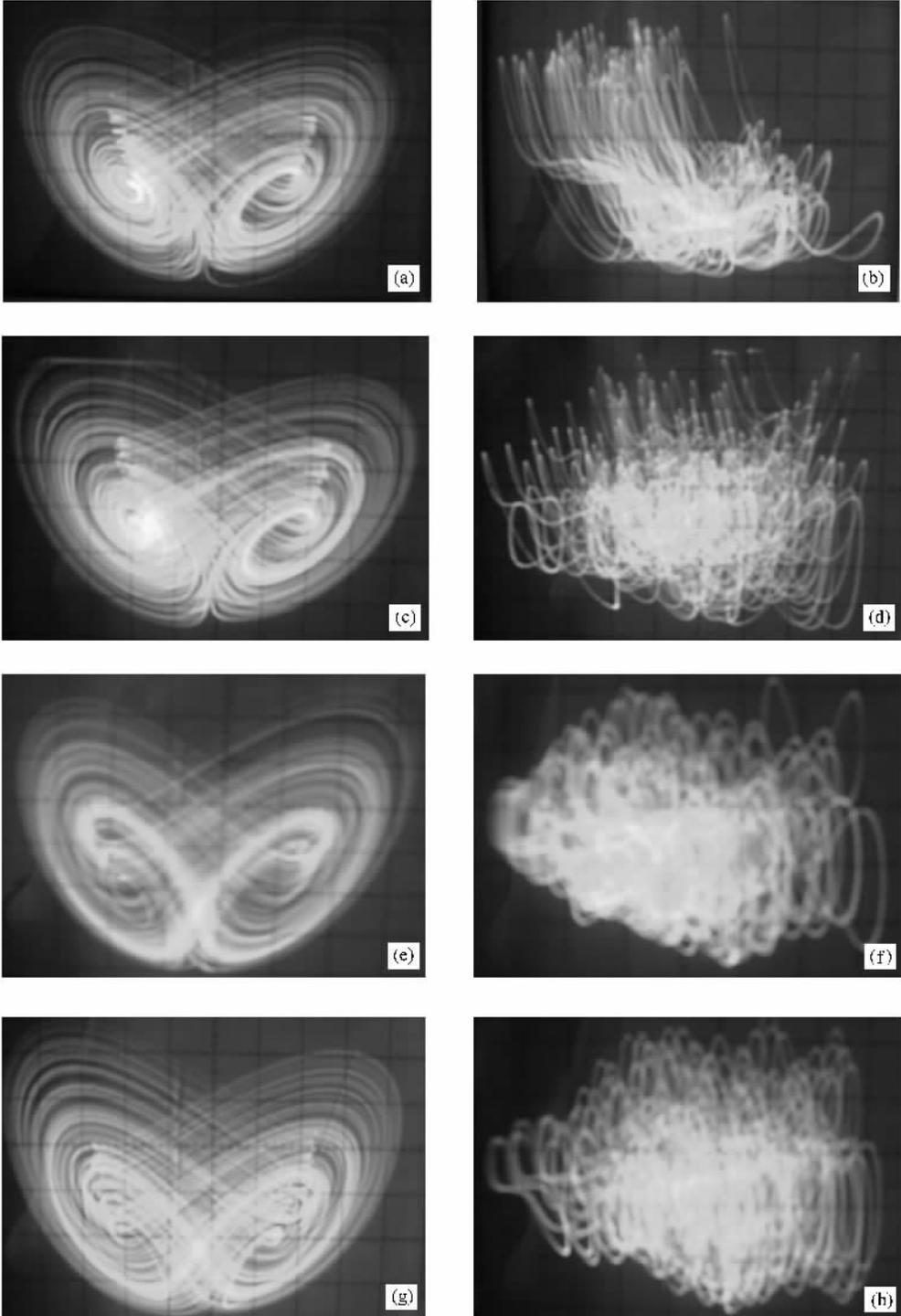


图 2 四个超混沌系统的相图比较 (a)(c)(e)(g)分别为系统(1)—系统(4)的  $y-z$  相图 (b)(d)(f)(h)分别为系统(1)—系统(4)的  $z-w$  相图(1 V/div 0.5 V/div)

Lyapunov 指数,因此四个四维系统都处于超混沌状态.在三维 Lü 混沌系统的基础上,通过线性反馈对系统维数进行扩展,构建的复杂超混沌 Lü 系统,同样可以写成标准型<sup>[24]</sup>

$$\dot{X} = AX + 10CXBX, \quad (10)$$

其中  $X = [x \ y \ z \ w]^T \in R^4$ ,  $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$ ,  $A$  是一个  $4 \times 4$  实矩阵,由于对三维 Lü 系统实施反混沌控制的方式不同,系统(1)~(4)对应的实矩阵  $A$  分别与(6)~(9)式相同.矩阵  $B$  皆为

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (11)$$

以三维 Lü 系统为基础建立的超混沌系统有以下特点:

1) 将系统的维数拓展成四维,并将第四维变量线性反馈回系统,作用于原系统的第一维或第三维.

2) 系统的第四维是系统变量  $x$  或  $y$  的线性函数.

图 2 表示四个四维超混沌系统在系统参数皆为  $a = 10$ ,  $b = 5$ ,  $c = 3$  和  $d = 2.5$  时,在模拟示波器上观察到,由图 3 所示的硬件电路产生的超混沌吸引子的相图((a) $y-z$  (b)) $z-u$  (1 V/格, 0.5 V/格).

图 2 表明,由于对三维 Lü 系统实施反混沌控制的方式不同,导致系统变量流形的演化存在一定的差异,因而表现为相空间中相图的形状不同,这正是子系统间内在差异性的外在表象;同时四个四维超混沌系统的动力学行为又存在一定的相似性,因此,关联可切换的复杂超混沌 Lü 系统的动力学行为表

现为差异性和相似性的统一.与文献[4~7]中的切换混沌系统改变的是系统的非线性函数不同,可切换的复杂超混沌 Lü 系统改变的是系统的线性函数,导致系统结构发生变化,因而使利用系统信息重构系统的结构变得更加困难.

### 3. 系统的电路实验

根据(1)~(4)式设计了一个能实现复杂超混沌 Lü 系统功能的实际电路,如图 3 所示.图中的运算放大器皆为 LF353,由系统的参数决定的各元件的数值如电路图中标示.系统中的非线性函数都是系统变量的二次函数,由模拟乘法器实现.通过电路中开关的切换可进行系统间的转换,开关  $K_1$  的切换实现系统扩展维的变化;开关  $K_2$  的切换实现反馈回原系统方式的变化.利用图中开关的切换,一个电路可以实现四个四维超混沌 Lü 系统的功能.

对硬件电路进行实验<sup>[28]</sup>,以系统(1)为例,通过调节可变电阻,改变系统参数  $b$  的值,得到系统(1)各种周期态和拟周期态的( $y-z$ )相图(1 V/div, 0.5 V/div),如图 4 所示.

在硬件电路实验中发现,调节可变电阻,改变系统(1)(2)参数  $d$  的值,通过示波器观察到系统拟周期态呈现奇异的三维环面( $z-w$ )相图(1 V/div, 0.5 V/div),如图 5 和图 6 所示.

而系统(3)和系统(4)改变参数  $d$  的值,通过示波器观察不到系统的拟周期态,这与系统分岔图分析的结果一致.

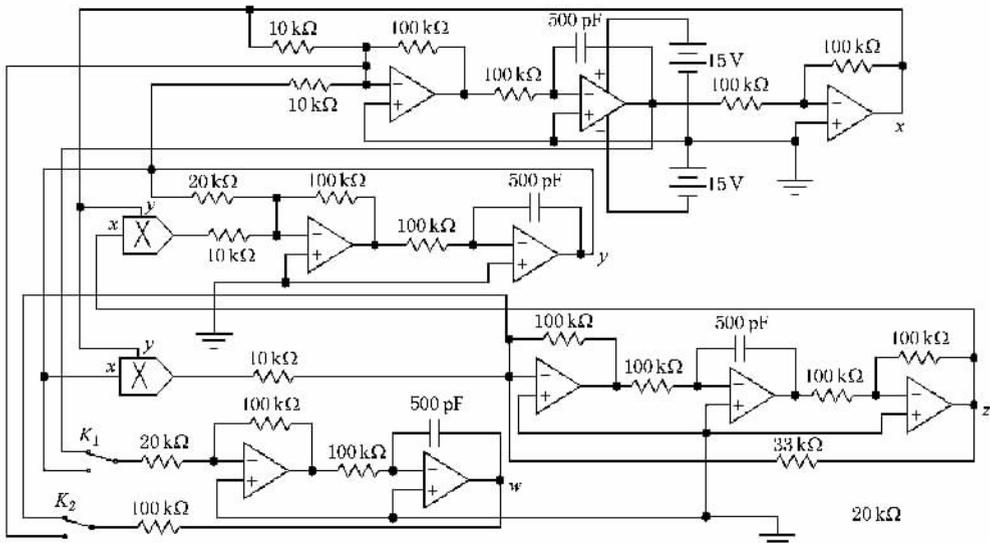


图 3 四维超混沌系统实际电路图

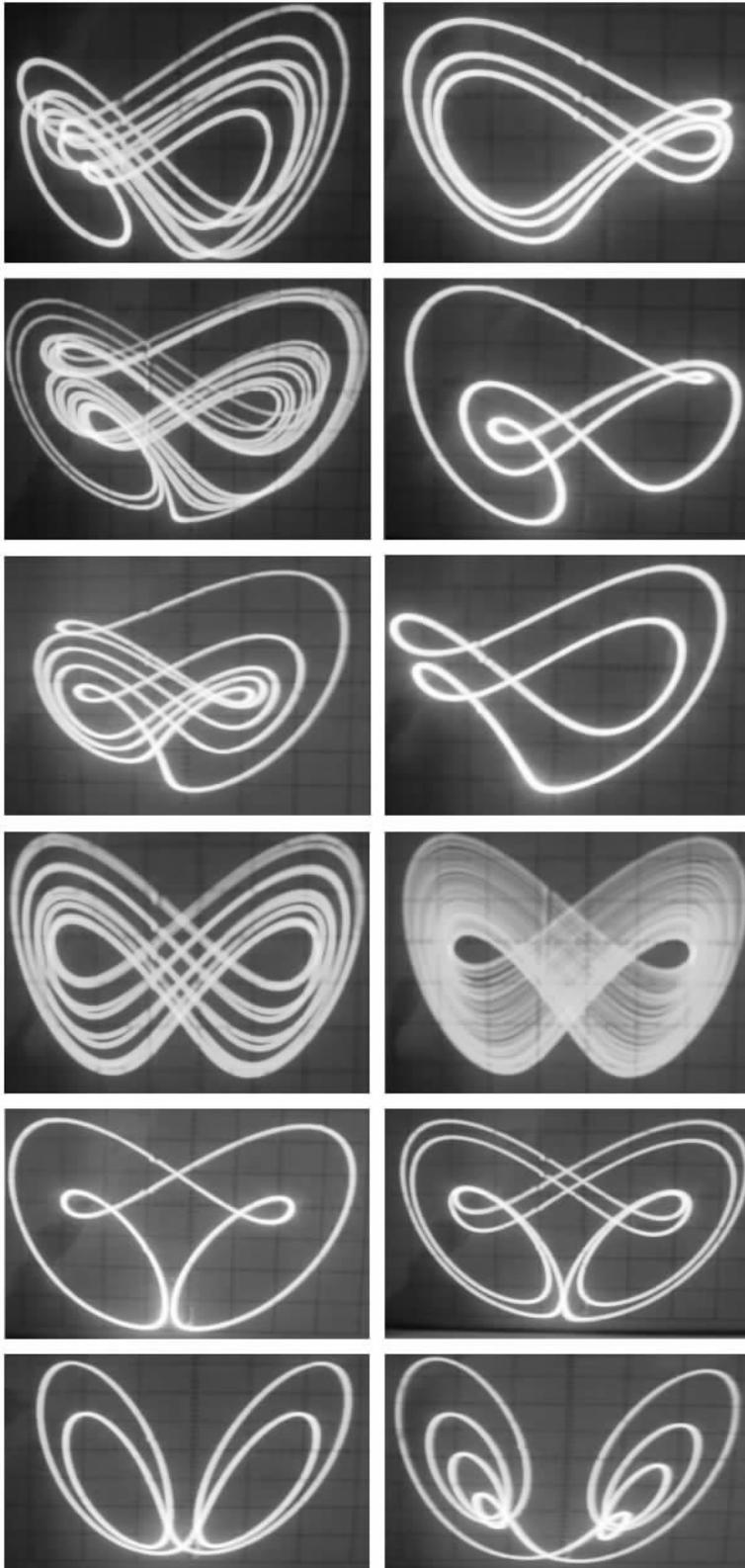
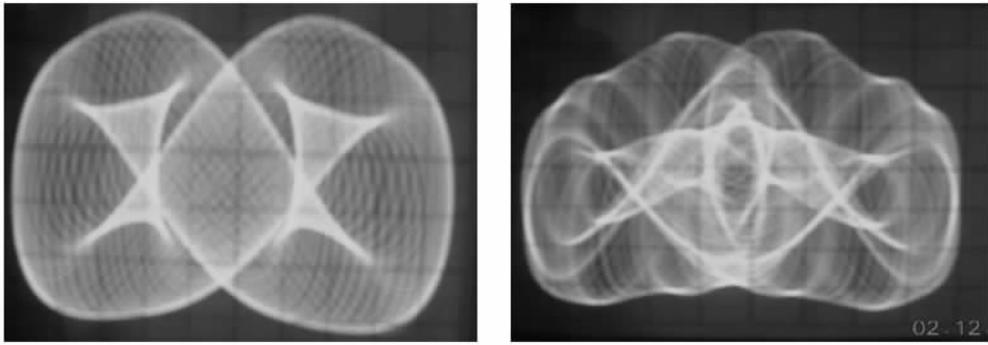
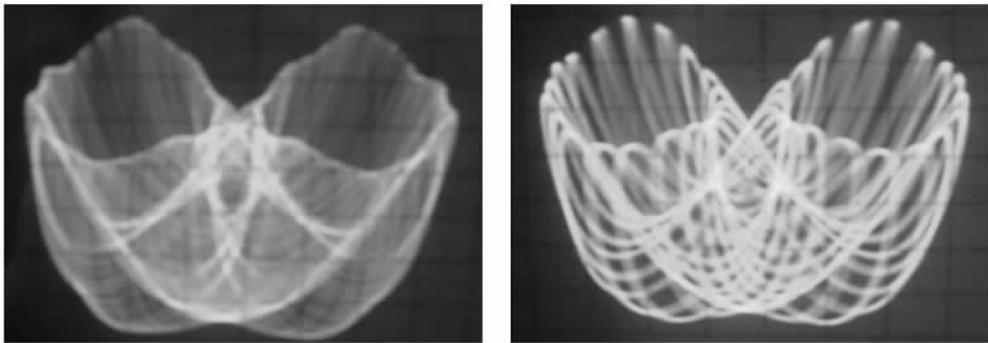


图 4 系统 1 的周期态和拟周期态( $y-z$ )相图

图 5 系统(1)的三维环面( $z-w$ )相图图 6 系统(2)的三维环面( $z-w$ )相图

## 4. 结 论

本文建构了一类包含四个子系统的关联且可切换的复杂四维超混沌 Lü 系统,各个子系统间既相对独立,自成体系,又存在着内在的相互联系.利用系统选择器,可以在四个子系统间随机切换,切换操作

方便灵活,组合的方式变化多样.由于反混沌控制的方式不同,系统流形演化的差异较大,且系统存在着丰富的动力学行为.由于本文中可切换的复杂超混沌 Lü 系统改变的是系统的线性函数,使重构系统的结构变得更加困难,因此,这类可切换的复杂系统具有广泛的应用前景.

- [ 1 ] Lü J ,Yu X ,Chen G 2003 *IEEE Trans Circuits Syst.* I **50** 198
- [ 2 ] Zheng Z ,Lü J ,Zhou T ,Chen G ,Zhang S 2004 *Chaos ,Solitons & Fractals* **20** 277
- [ 3 ] Lü J ,Zhou T S ,Chen G 2002 *Chaos* **12** 344
- [ 4 ] Liu Y Z ,Jiang C S ,Lin C S ,Jiang Y M 2007 *Chin. Phys.* **16** 660
- [ 5 ] Liu Y Z ,Jiang C S ,Lin C S ,Xiong X ,Shi L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3107 ( in Chinese ) [ 刘扬正、姜长生、林长圣、熊星、石磊 2007 物理学报 **56** 3107 ]
- [ 6 ] Liu Y Z ,Jiang C S ,Lin C S 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 707 ( in Chinese ) [ 刘扬正、姜长生、林长圣 2007 物理学报 **56** 707 ]
- [ 7 ] Liu Y Z ,Jiang C S ,Lin C S ,Sun H 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5131 ( in Chinese ) [ 刘扬正、姜长生、林长圣、孙晗 2007 物理学报 **56** 5131 ]
- [ 8 ] Tam W M ,Lau F C M ,Tse C K 2004 *IEEE Trans Circuits Syst.* I **51** 1868
- [ 9 ] Riccardo R 2004 *IEEE Trans. Cir. Syst.* I **51** 1336
- [ 10 ] Thuraiappah S ,Thiagaligam K 2006 *IEEE Trans. Cir. Syst.* I **53** 1597
- [ 11 ] Liu Y Z ,Fei S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1035 ( in Chinese ) [ 刘扬正、费树岷 2006 物理学报 **55** 1035 ]
- [ 12 ] Zhang J S ,Xiao X C 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2121 ( in Chinese ) [ 张家树、肖先赐 2001 物理学报 **50** 2121 ]
- [ 13 ] Zhang Y ,Chen T Q 2005 *J. of UEST of China* **34** 763 ( in Chinese ) [ 张勇、陈天麒 2005 电子科技大学学报 **34** 763 ]
- [ 14 ] Ueta T ,Chen G 2000 *Int. J. Bifurcat Chaos* **10** 1917
- [ 15 ] Lü J ,Chen G 2002 *Int. J. Bifurcat Chaos* **12** 659

- [ 16 ] Lü J ,Chen G ,Zhang S 2002 *Chaos ,Solitons & Fractals* **14** 669
- [ 17 ] Liu C ,Liu T ,Liu L ,Liu K 2004 *Chaos ,Solitons & Fractals* **22** 1031
- [ 18 ] Wang J Z ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2006 *Chin . Phys .* **15** 1216
- [ 19 ] Wang F Z ,Chen Z Q ,Wu W J ,Yuan Z Z 2007 *Chin . Phys .* **16** 3238
- [ 20 ] Wang G Y ,Qiu S S ,Xu Z Y 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 3295 ( in Chinese )[ 王光义、丘水生、许志益 2006 物理学报 **55** 3295 ]
- [ 21 ] Liu L ,Su Y C ,Liu C X 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 3933 ( in Chinese )[ 刘 凌、苏燕辰、刘崇新 2006 物理学报 **55** 3933 ]
- [ 22 ] Wang J Z ,Chen Z Q ,Yuan Z Z 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 3956 ( in Chinese )[ 王杰智、陈增强、袁著祉 2006 物理学报 **55** 3956 ]
- [ 23 ] Wang F Z ,Qi G Y ,Chen Z Q ,Zhang Y H ,Yuan Z Z 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 4005 ( in Chinese )[ 王繁珍、齐国元、陈增强、张宇辉、袁著祉 2006 物理学报 **55** 4005 ]
- [ 24 ] Lü J ,Chen G ,Cheng D ,Celikovskiy 2002 *Int . J . Bifurcat Chaos* **12** 2917
- [ 25 ] Wang F Q ,Liu C X 2006 *Acta Phys . Sin .* **55** 5061 ( in Chinese ) [ 王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5061 ]
- [ 26 ] Wang F Q ,Liu C X 2006 *Chin . Phys .* **15** 963
- [ 27 ] Zou Y L ,Zhu J ,Chen G R 2005 *Chin . Phys .* **14** 697
- [ 28 ] Zhou P ,Luo X H ,Chen H Y 2005 *Acta Phys . Sin .* **54** 5048 ( in Chinese )[ 周 平、罗小华、陈海燕 2005 物理学报 **54** 5048 ]

## Circuit experimentation for a complicated hyperchaotic Lü system<sup>\*</sup>

Liu Yang-Zheng<sup>1,2,†</sup> Jiang Chang-Sheng<sup>1)</sup> Li Xin-Chao<sup>2)</sup> Sun Han<sup>2)</sup>

1) *College of Automatic Engineering ,Nanjing University of Aeronautics and Astronautics ,Nanjing 210016 ,China*

2) *Institute of Nonlinear Physics ,Nanjing Institute of Technology ,Nanjing 211167 ,China*

( Received 6 December 2007 ; revised manuscript received 31 March 2008 )

### Abstract

A four-dimensional interrelated and switchable Lü hyperchaotic system is built by adding an additional state into the three-dimensional Lü chaotic system. When subsystems are hyperchaotic ,an identical system parameter is determined according to the bifurcation diagrams of these subsystems. Some of its basic dynamical properties are studied detailedly ,such as the feature of equilibrium ,the phase portraits of hyperchaotic attractor ,the Lyapunov exponent and fractal dimension. A practical circuit is designed to realize these systems. Experimental result shows the effectiveness and feasibility of the theoretical analysis and verifies the behavior of various attractors.

**Keywords :** hyperchaotic Lü system , switchable , bifurcation diagram , circuit experiment

**PACC :** 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant No. 90405011 ) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province , China ( Grant No. 07KJD120081 ) and the Natural Science Foundation of Nanjing Institute of Technology ,China ( Grant No. KXJ07068 ).

<sup>†</sup> E-mail :lyz64@njit.edu.cn ,lyz\_6410@163.com