

# 非连续反馈控制激发介质中的螺旋波<sup>\*</sup>

尹小舟<sup>1)</sup> 刘 勇<sup>2)†</sup>

1) 连云港职业技术学院, 连云港 222006)

2) 盐城师范学院数学科学学院, 盐城 224051)

(2008 年 2 月 18 日收到, 2008 年 3 月 30 日收到修改稿)

采用非连续反馈方法来控制 Fitz-Hugh-Nagumo 方程描述的激发介质中的螺旋波. 在控制过程中, 对于系统各个格点快变量的幅值进行观测并和设定的阈值进行比较, 当采样格点的快变量的值大于这个阈值时, 则对系统进行直接小幅度的负反馈. 研究发现: 在对系统所有格点快变量幅值观测时选择比较小的阈值则更容易将系统的螺旋波消除掉并使系统达到稳定均匀态. 在比较大的阈值下, 系统的螺旋波则变得稀疏, 也可以导致螺旋波的破裂. 在任意选择单个格点的快变量观测下, 比较小的反馈强度仍然可以消除螺旋波, 系统也达到稳定均匀态. 当整个系统达到稳定均匀态时该控制器则自动关闭.

关键词: 螺旋波, Fitz-Hugh-Nagumo 方程, 反馈控制

PACC: 0545

## 1. 引 言

螺旋波是一类特殊的时空斑图, 这可能与时空系统内部复杂的相互作用和自组织有关. 从动物身上的花纹、宇宙的星云、化学反应系统中的化学波、一氧化碳在铂金表面的催化氧化反应以及心肌组织的螺旋波等都可以看到螺旋波存在的普遍性<sup>[1-4]</sup>. 近年来, 以反应扩散方程来描述时空系统的螺旋波特性以及对螺旋波的控制取得了很多有意义的结果<sup>[5, 6]</sup>. 研究发现: 心率不齐和心动过速可能与心肌组织出现的螺旋波相关, 而心肌组织中螺旋波的破裂则可能意味着心脏出现急剧病变而引起心室纤维性颤动进一步导致心脏快速死亡. 因此, 很多研究集中在如何预防心肌组织中出现螺旋波并进一步防止螺旋波的破裂等. 当然, 研究螺旋波的意义不仅仅局限于预防心颤. 研究一般时空系统中螺旋波和其他斑图的转变也是非线性科学的一个有趣问题. 另外, 台风的中心和宇宙星云的螺旋结构研究也具有实际的意义. 螺旋波在激发和振荡介质中都可以观测到, 目前很多相关研究工作主要集中在以反应扩散方程描述的时空系统上. 在实验上, Ouyang 等对于螺旋波的诱导和破裂等做了开创性的工作<sup>[7]</sup>.

另一方面, Zhang 等在螺旋波和三维系统的卷波控制方面做出了非常有意义的结果<sup>[8-11]</sup>. Yang 等对于螺旋波的失稳等也做出了十分有趣的研究<sup>[12]</sup>. Zhan 等则对螺旋波的同步等研究取得了重要的结果<sup>[13, 14]</sup>. Wang 等提出的空间函数扰动参数和行波来抑制螺旋波和斑图<sup>[15, 16]</sup>. 马军等对螺旋波的控制等研究也取得了一些有趣的结果<sup>[17-22]</sup>. 到目前为止, 螺旋波的研究在国内也引起了广泛关注, 详细见评述<sup>[23]</sup>. 时空系统对于外界噪声会发生响应, 不同的噪声则引起螺旋波的不同相变<sup>[24, 25]</sup>. 在对螺旋波的抑制中, 反馈方法是一种非常有效的方法. 但从控制的代价和可行性来看, 非连续反馈相对于连续反馈控制具有某些优点. 因此, 这里我们采用一种非连续反馈方法来控制系统的螺旋波. 考虑 Fitz-Hugh-Nagumo 方程<sup>[26, 27]</sup>的普遍性和代表性, 我们将采用非连续反馈方法来抑制 Fitz-Hugh-Nagumo 方程中的螺旋波并对相关结果进行讨论.

## 2. 模型和控制方法

Fitz-Hugh-Nagumo 方程通常可以表示为<sup>[26, 27]</sup>

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \nabla^2 e - k\alpha(e - a)(e - 1 - eg),$$

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号: 10572056)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: yongliumath@hotmail.com

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \epsilon(e, g)(\chi - g - k(e - a - 1)), \quad (1)$$

其中参数  $\epsilon(e, g) = \epsilon + \mu_1 g / (\epsilon + \mu_2)$ , 快变量用  $e$  来描述, 慢变量用  $g$  来表示.  $e, g$  的物理意义可以理解成膜电位和内电流的电导. 非线性函数  $-k(e - a)(e - 1)$  描述了快变量的快速变化, 系统的恢复特性主要由  $\epsilon(e, g)$  决定. 该模型的参数虽然没有具体的物理意义但该模型可以再现心肌组织的主要特征, 如动作电位, 复位等, 因此在选择恰当参数下可以用来研究心肌组织的螺旋波特性和转变等. 在选择参数为  $k = 8, a = 0.15, \mu_1 = 0.2, \mu_2 = 0.3, \epsilon = 0.002$  时, 系统可以出现稳定旋转的螺旋波.

考虑到我们的研究目标是抑制和消除系统(1)中的螺旋波, 这里采用一种非连续反馈方法来扰动系统. 系统的快变量一般对于外界的扰动反应比较敏感, 因此控制项将直接施加在系统(1)中第一式的右边, 控制器表示为

$$G = -k_0 \mathcal{H}(x, y) \mathcal{H}(\mathcal{A}(x, y) - e_0), \quad (2)$$

这里  $k_0$  是常数, 可以理解为反馈强度,  $\mathcal{H}(\cdot)$  是分段阶跃函数,  $\mathcal{H}(p) = 1$ , 当  $p \geq 0$ , 否则  $\mathcal{H}(p) = 0$ ,  $e_0$  是

选择的阈值且一般小于快变量的最大值.  $e(x, y)$  中的  $x, y$  表示系统某个格点或者细胞的位置, 且  $x = (i - 1)\Delta x, y = (j - 1)\Delta y$ . 观察系统(1), 可以看到  $(0, 0)$  是系统的一个平衡态, 而(2)式描述控制器中出现的快变量表明该控制器具有自适应的特点. 当整个系统的所有格点都达到稳定均匀态  $(0, 0)$  时, 控制器则自动置为 0 而关闭, 因此对系统的扰动相对比较小. 在数值计算中, 选取把系统离散为  $256 \times 256$  个格点,  $i, j = 1, 2, 3, \dots, 256, \Delta x = \Delta y = 350 / 256$  时间步长  $h = 0.03$ . 采用无流边界条件和优化的欧拉差分方法进行数值积分.

### 3. 数值计算和讨论

在数值模拟中, 首先选取恰当的初始值, 使系统出现稳定旋转的螺旋波, 在进一步的控制中, 稳定旋转的螺旋波将被作为初始态来进行抑制. 由于我们的目标是抑制系统出现的螺旋波, 所以直接采用不同时刻系统的瞬态闪图来描述系统的状态. 对系统(1)进行数值计算, 可以发现系统快变量的变化范围

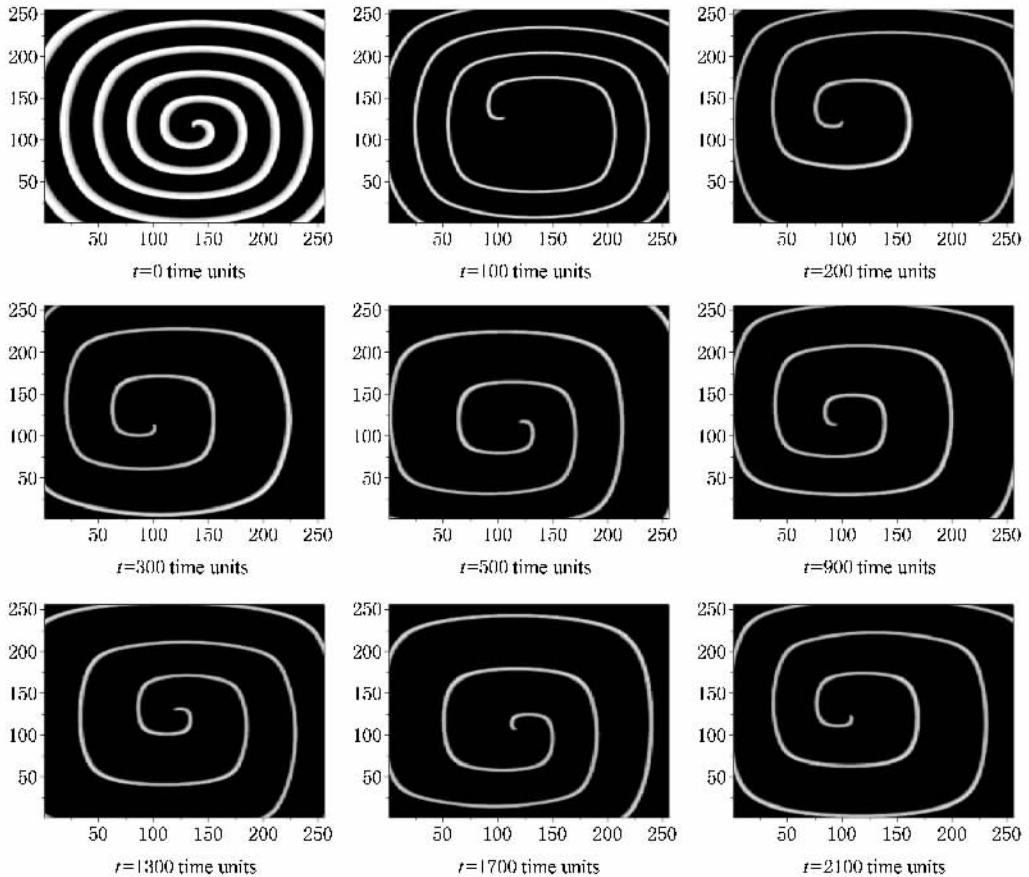


图1 螺旋波在非连续反馈下的演化(控制强度和阈值  $k_0 = 1, e_0 = 0.54$ )

主要在0到1之间,因此,可以选择阈值  $0 < e_0 < 1$ . 在图1中,选取  $k_0 = 1, e_0 = 0.54$ ,在图2中  $k_0 = 1, e_0 = 0.5$ ,在图3中  $k_0 = 1, e_0 = 0.495$ .

图1的数值结果表明:当控制器(2)开始作用于系统(1)后,原来比较密集的螺旋波逐渐变得稀疏. 进一步增加阈值则发现螺旋波的转变越来越不明显,也就是说,当阈值进一步增加时,这种非连续反馈对系统的螺旋波的影响越来越小. 在实际控制

中,反馈强度  $k_0$  显然不能取得无限大,当进一步增加反馈强度而不改变阈值时,发现螺旋波只变得稀疏而根本不能被抑制掉. 如在数值模拟中保持阈值  $e_0 = 0.54$  而将反馈强度增加到  $k_0 = 3$ ,历经大约2100时间单位后系统的螺旋波仍然是变得稀疏而没有被消除掉.

进一步减小阈值,发现螺旋波开始破裂,数值计算结果见图2.

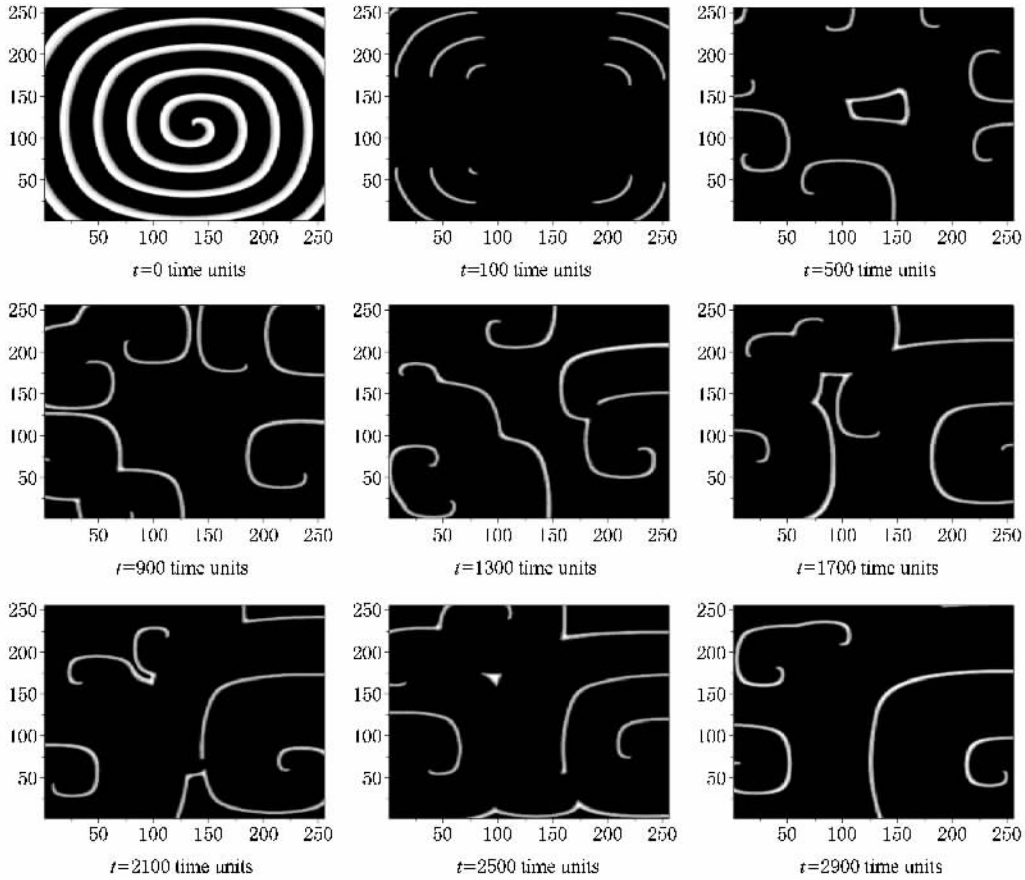


图2 螺旋波在非连续反馈下的演化(控制强度和阈值  $k_0 = 1, e_0 = 0.5$ )

图2的数值计算结果表明,控制器(2)在某些阈值下可能导致螺旋波的失稳而出现多个螺旋波片段. 分析其原因可能在于:和图1的结果相比较,比较小的阈值则意味着对系统扰动和刺激的程度增大,因此更能改变系统的组织结构进而诱发斑图的竞争. 与图1结果不同的是:当选择阈值  $e_0 = 0.5$  而进一步增加反馈强度,数值计算表明:大约反馈强度在  $k_0 = 1.6$  时,系统的螺旋波则完全可以被抑制使整个系统达到稳定均匀态. 分析其原因可能在于:比较小的阈值和比较大的反馈强度对系统的刺激很快镇定了螺旋波的波头而使螺旋波向外传播的过程被

中断,因而消除了螺旋波.

进一步减小阈值到  $e_0 = 0.495$  且保持反馈强度  $k_0 = 1$  不变化,相关数值结果见图3.

图3的数值计算结果表明:恰当的选择阈值可以完全抑制和消除系统的螺旋波,使系统完全进入稳定均匀态. 进一步的数值计算结果表明:继续减小阈值和增加反馈强度可以缩短系统达到稳定均匀态的暂态过程. 分析其原因可能在于:比较小的阈值相当于对系统施加了更多的扰动,在恰当的反馈强度下,直接负反馈则可以显著改变系统的动力学结构和组织结构,而这全局反馈首先对螺旋波的波

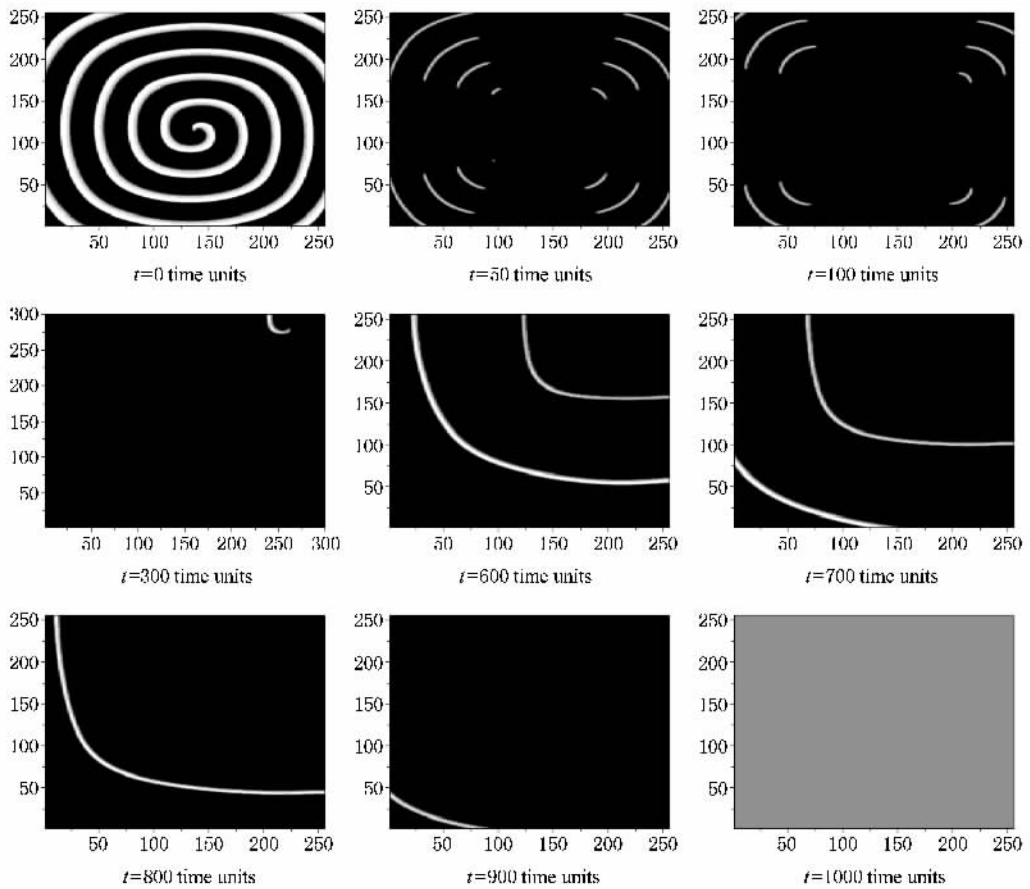


图3 螺旋波在非连续反馈下的演化(控制强度和阈值  $k_0 = 1, e_0 = 0.495$ )

头进行有效的作用,将螺旋波的波头从系统的中心消除掉,当波头到达系统边界时与边界发生碰撞而消失,最终消除了螺旋波使系统达到稳定均匀态.进一步观察和分析式(2)表示的控制器可以发现,即使系统在达到稳定均匀态后由于不确定因素重新激发了螺旋波,那么控制器将立即开始工作,具有自适应的特性.

以上我们研究了对系统全局观测,当观测的格点的快变量的值超过所选定的阈值则对系统进行负反馈来抑制系统的螺旋波.在实际问题上,对于整个系统的格点变量进行同时观测可能会遇到困难.相对来说,对于系统中有限格点进行观测,看观测的格点的快变量的值是否超过所设定的阈值来开启和关闭负反馈控制器具有重要的意义.当然,观测格点一般要选择在系统的边界,观测格点可以选择一行或者一列,也可以选择一个非常小的方形区域,最小可以到一格点.

这里我们研究和讨论只监测一个任意格点下的负反馈对螺旋波的抑制问题.则(2)式控制器对应为

$$G = -k_0 e(x, y) H(e(x_0, y_0) - e_0), \quad (3)$$

其中  $e(x_0, y_0)$  为观测点的快变量的值,在数值计算中我们任意选择为  $e(5, 120)$  选择不同的阈值和反馈强度来研究螺旋波在该反馈控制下的演化问题,数值计算结果见图4和图5.

图4的数值计算结果表明:在对单个格点的快变量进行监测并设定合适的阈值在比较小的反馈强度下也可以完全消除螺旋波而使系统完全达到稳定均匀态.和图1的结果不同的是,虽然阈值完全相同,但由于图1的结果要求对整个系统的格点进行观测并要求各个格点快变量的值处于阈值之内,否则就有反馈施加到整个系统.显然要使整个系统的格点的快变量的值都同步地处于阈值下而自动关闭反馈控制器的要求比较高.而图4的结果要求只对单个格点的快变量的值进行观测并和阈值进行比较来决定反馈控制器是否开启,这个要求相对容易.考虑到螺旋波具有自持续性和实际操作性,一般选择观测点在系统边界和远离波头.如果观测点选择在波头附近的话,由于反馈控制容易使波头移动进

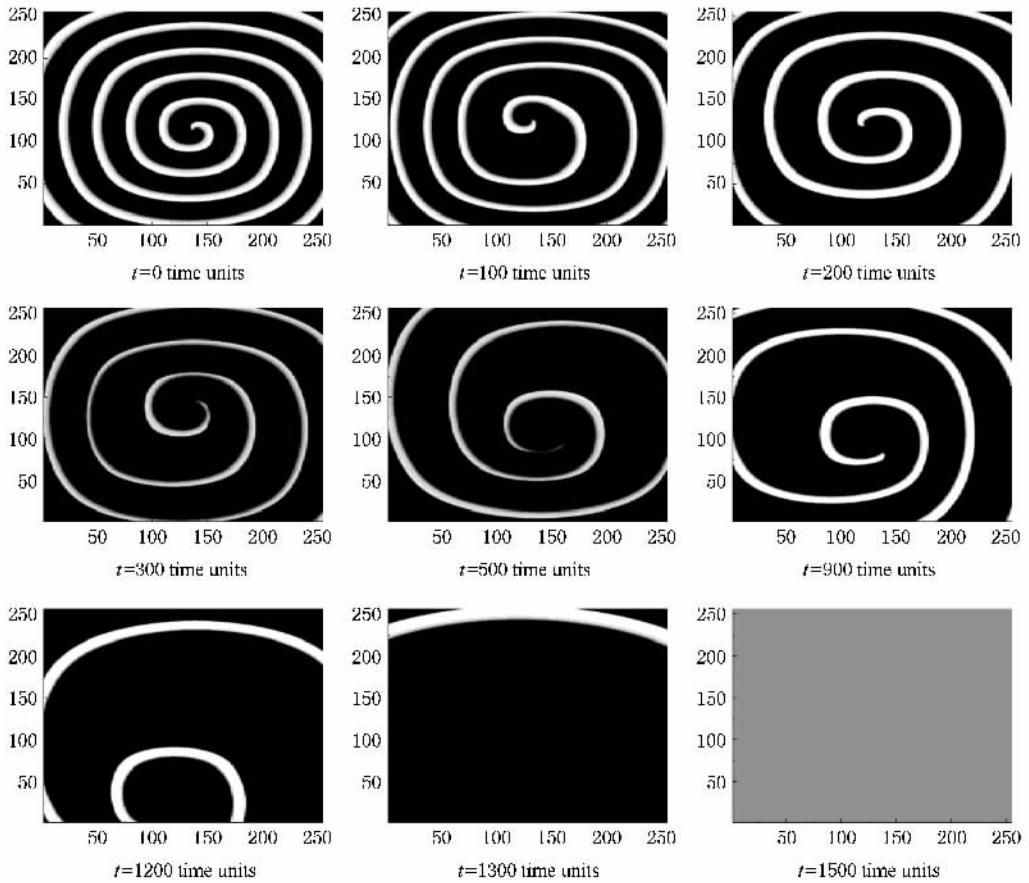


图 4 螺旋波在非连续反馈下的演化(控制强度和阈值  $k_0 = 0.4$ ,  $e_0 = 0.54$ )

一步使观测点达到阈值下而自动关闭了控制器,但波头漂移到其他位置或者系统中则重新诱导出螺旋波,这样不能完全控制住螺旋波。

下面我们研究在比较大的阈值下螺旋波的镇定问题,数值计算结果见图 5。

图 5 的数值计算结果表明:即使进一步提高阈值,在对单个格点的快变量的值进行观测并选择比较小的反馈强度仍然可以完全消除螺旋波并使整个系统完全达到均匀态。和图 4 结果不同的是,在控制的过程中螺旋波发生了破裂但很快被消除了。

以上分别讨论了在全局观测和单个格点观测快变量的值并和设定的阈值比较来决定是否开启反馈控制器问题,可以看到在全局观测下要求阈值比较小,在对单个格点快变量观测下阈值的选择范围相对大些而且反馈强度比较小,系统的螺旋波也更容易被消除而使系统达到稳定均匀态。

在图 5 的数值研究中,我们选取的单个采样格点是(5, 120)相对靠近系统边界,且远离螺旋波中心,在螺旋波没彻底消除前,螺旋波的片段通过扩散

作用仍然会影响该采样格点快变量的值,导致该采样格点的快变量值与选择的阈值有差别,那么控制器就打开并作用于系统,直到该采样格点的值与阈值相同时才关闭控制器。我们进一步从数值上研究了采样格点比较靠近螺旋波中心的情况,数值结果见图 6。

图 6 的数值结果表明,当采样格点接近螺旋波的中心时,螺旋波则容易发生破裂,即使经过比较长的暂态过程也不能消除,系统也不能达到均匀态。

从实际控制的可行性角度看,我们一般先预测系统快变量的最大幅值,选择其最大幅值的一半左右作为阈值,选择系统边界的有限个格点,如一个格点来作为采样监测。将该采样点的值与阈值进行比较来决定控制器的开启与关闭。如果选择的采样点接近螺旋波的中心,在反馈作用下该采样点很快接近阈值,此时控制器就自动关闭。那么在边界和远离螺旋波中心的位置可能诱发出新的螺旋波,从而很难在系统内彻底消除螺旋波。另外一个问题是:如果同时选择几个点来观测并和阈值进行比较,如

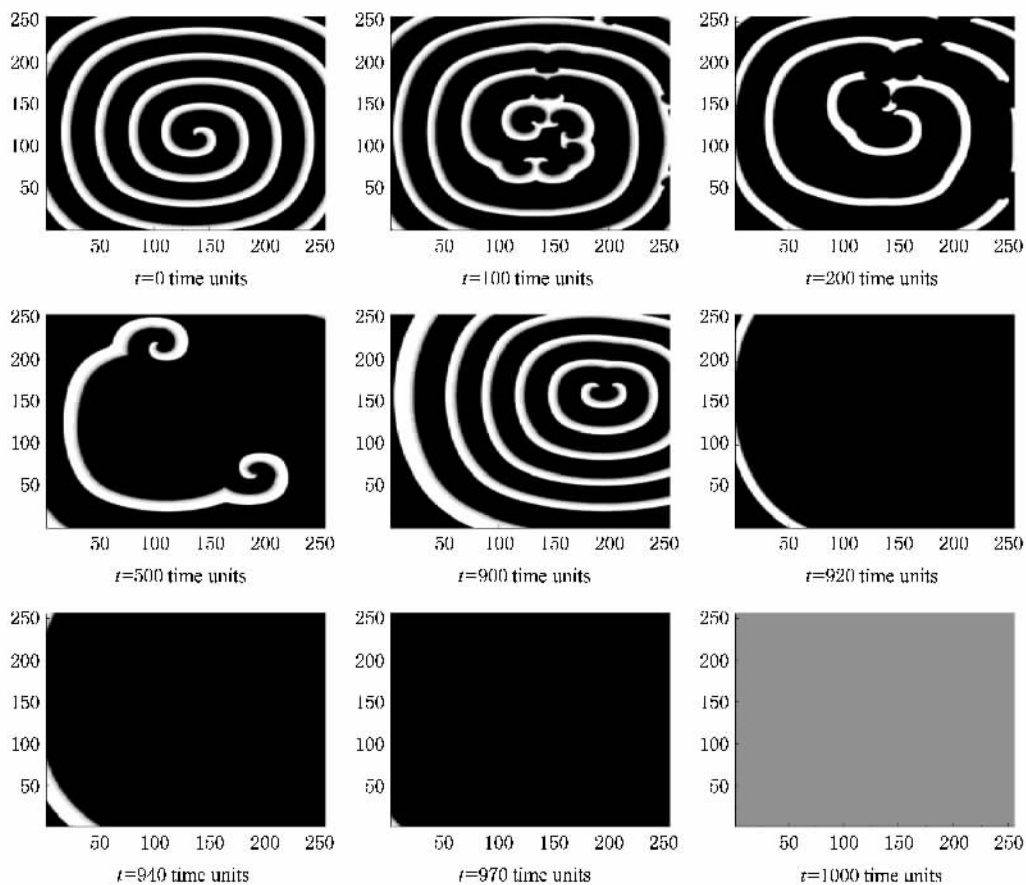


图 5 螺旋波在非连续反馈下的演化(控制强度和阈值  $k_0 = 0.5$ ,  $e_0 = 0.7$ )

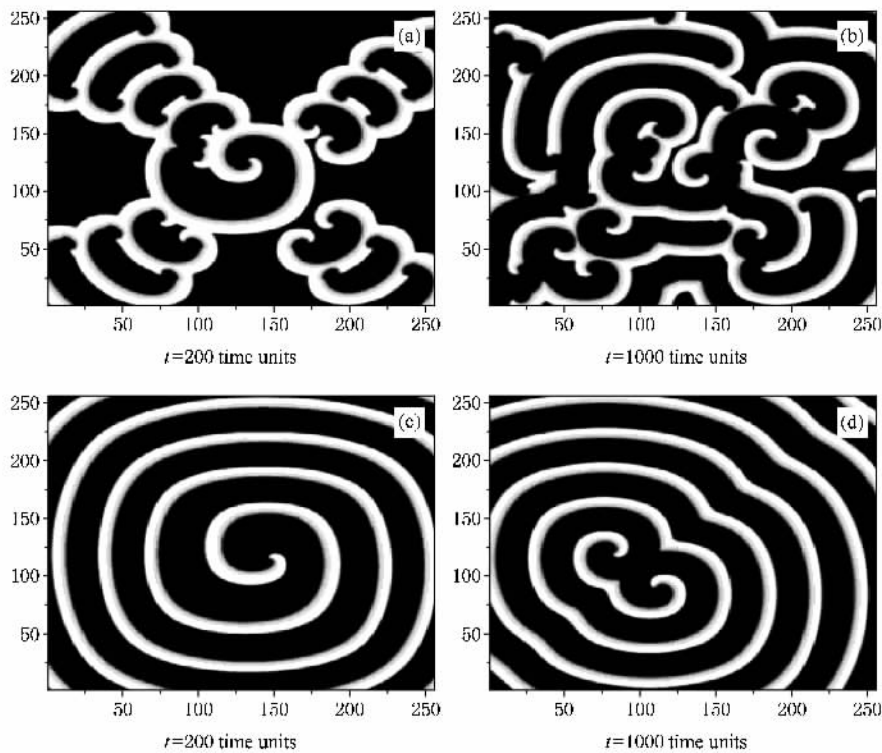


图 6 螺旋波在非连续反馈下的演化(控制强度和阈值  $k_0 = 0.5$ ,  $e_0 = 0.7$ ) (a)和(b)对应的采样格点是(100, 120),(c)和(d)对应的采样格点是(80, 120)

同时观测采样点  $(5, 120)$ 、 $(80, 120)$  和  $(100, 120)$ , 实际上起决定作用的还是边界附近的采样点, 因为按照我们控制器的规则, 必须三个采样点的快变量的值都要和阈值相同, 即使  $(80, 120)$  和  $(100, 120)$  达到了阈值, 控制器还要工作直到  $(5, 120)$  的快变量的值也接近  $(5, 120)$  为止. 另外一方面, 在实际控制中, 我们一般尽可能地选取最少的采样和控制点来实验, 因此, 选取一个采样格点相对容易操作.

## 4. 结 论

本文提出采用一类非连续反馈方法来控制激发

介质中的螺旋波. 通过对系统的所有格点或者有限格点快变量进行观测, 当观测的格点的快变量值超过了所选择的阈值时, 负反馈控制自动作用在整个系统上, 在比较小的反馈强度下和恰当的阈值下可以完全消除系统的螺旋波并使系统达到稳定均匀态, 而且, 当系统达到稳定均匀态时, 控制器自动关闭. 和通常采用的连续反馈等方法相比, 该方法具有控制代价小且具有自适应的特点, 这可能为其他系统螺旋波的抑制和斑图转变提供有意义的参考.

感谢应和平教授和马军博士对本文工作的有益讨论和建议.

- 
- [ 1 ] Winfree A T 1987 *When Time Breaks Down* ( Princeton University Press , Princeton , NJ )
- [ 2 ] Winfree A T 2001 *The Geometry of Biological Time* 2nd ed. ( Springer-Verlag , Berlin ).
- [ 3 ] Mikhailov A S , Showalter K 2006 *Phys. Rep.* **425** 79
- [ 4 ] Ipsen M , Kramer L , Sorensen P G 2000 *Phys. Rep.* **337** 193
- [ 5 ] Tomita K , Ito A , Ohta T 1977 *J. Theor. Biol.* **68** 459
- [ 6 ] Aranson I S , Kramer L 2002 *Rev. Mod. Phys.* **74** 99
- [ 7 ] Ouyang Q , Felesselles J M 1996 *Nature* **379** 143
- [ 8 ] Zhang H , Hu B B , Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026134
- [ 9 ] Zhang H , Cao Z J , Wu N J *et al* 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 188301
- [ 10 ] He X Y , Zhang H , Hu B B *et al* 2007 *New J. Phys.* **9** 66
- [ 11 ] Zhang H , Hu B , Hu G 2003 *Phys. Rev. E* **68** 026134
- [ 12 ] Yang J Z , Xie F G , Qu Z L *et al* 2003 *Phys. Rev. Lett* **91** 148302
- [ 13 ] Zhan M , Wang X G , Gong X F *et al* 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036212
- [ 14 ] Zhan M , Luo J M , Gao J H 2007 *Phys. Rev. E* **75** 016214
- [ 15 ] Wang P Y , Xie P 2000 *Phys. Rev. E* **61** 5120
- [ 16 ] Wang P Y , Xie P , Yin H W 2003 *Chin. Phys.* **12** 674
- [ 17 ] Ma J , Ying H P , Pu Z S 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1065
- [ 18 ] Ma J , Ying H P , Li Y L 2007 *Chin. Phys.* **16** 955
- [ 19 ] Ma J , Pu Z S , Feng W J *et al* 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4602 ( in Chinese ) [ 马 军、蒲忠胜、冯旺军等 2005 物理学报 **54** 4602 ]
- [ 20 ] Jun M , Li Y L , Jiang J L *et al* 2006 *Phys. A* **369** 387
- [ 21 ] Ma J , Jin W Y , Li Y L *et al* 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2456 ( in Chinese ) [ 马 军、靳伍银、李延龙等 2007 物理学报 **56** 2456 ]
- [ 22 ] Ma J , Wang C N , Li Y L , Li S R 2007 *Chaos , Solitons and Fractals* **33** 965
- [ 23 ] Ma J , Jin W Y , Yi M *et al* 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2456 ( in Chinese ) [ 马 军、靳伍银、易 鸣等 2008 物理学报 **57** 2456 ]
- [ 24 ] Hou Z H , Xin H W 2002 *Phys. Rev. Lett.* **8** 280601
- [ 25 ] Wang H L , Ouyang Q 2005 *Chaos* **15** 023702
- [ 26 ] Aliev R R , Panfilov A V 1996 *Chaos , Soliton and Fractals* **7** 293
- [ 27 ] Pertsov A M , Davidenko J M , Salomonsz Z R *et al* 1993 *Circulation Research* **72** 631

# Suppression of spiral wave in the excitable media by using intermittent feedback scheme <sup>\*</sup>

Yin Xiao-Zhou<sup>1)</sup> Liu Yong<sup>2)†</sup>

<sup>1)</sup> *Lianyungang Technical College, Lianyungang 222006, China*

<sup>2)</sup> *School of Mathematical Science, Yancheng Teachers University, Yancheng 224051, China*

( Received 18 February 2008 ; revised manuscript received 30 March 2008 )

## Abstract

A class of intermittent feedback scheme is proposed to eliminate the spiral wave in the excitable media, which is described by the Fitz-Hugh-Nagumo equation. The activators of the sites is observed and compared with the selected threshold ( less than the maximum activator ), a negative feedback is imposed on the whole system by inputting linear negative variable into the equation only when the sampled activator exceeds the threshold. It is found that the spiral wave is easier to be removed and the whole media becomes homogeneous when all the sites are monitored and smaller threshold is used, and the spiral wave just becomes sparse and breakup of spiral wave can be observed when the threshold is not small. On the other hand, weaker intensity of feedback still causes the spiral wave to be removed and the whole media still can become homogeneous when only one site is monitored. The controller will stop working as the whole media become homogeneous synchronically.

**Keywords** : spiral wave, Fitz-Hugh-Nagumo equation, feedback control

**PACC** : 0545

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Nos. 10572056 ).

<sup>†</sup> E-mail : yongliumath@hotmail.com