第 57 卷 第 12 期 2008 年 12 月
1000-3290/2008/57(12)/7419-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57,No.12,December,2008

扰动 KdV 方程孤子的同伦映射解*

莫嘉琪† 姚静荪
(安徽师范大学数学系,芜湖 241000)
(2008 年 5 月 15 日收到;2008 年 6 月 4 日收到修改稿)

利用同伦映射方法研究了一类非线性 KdV(Korteweg de Vries)方程.首先引入一个同伦变换,使相应的方程求孤子解问题转化为映射变换问题.然后利用映射特性得到了原方程孤子的近似解.

关键词:孤子,扰动,同伦映射
PACC:0340,0230

1.引 言

孤子理论在流体物理、等离子体物理、凝聚态物理、非线性光学及其他自然科学的许多领域中都有重要的应用,是当前国际学术界十分关注的研究对象.近来一些学者在激波[1—3]、光波散射[4]、量子力学[5]、大气物理[6—8]、神经网络[9]、爆炸与燃烧[10]等方面都作了一些有关孤子理论的研究.非线性孤子理论的各种定量和定性方法也不断地得到改进.其中一种研究方法是孤子扰动理论的渐近方法,其要点是用扰动理论的渐近展开式将非线性孤子方程转化为易求解的方程来进行求解.这类理论完全摆脱了对逆散射变换所依赖的直接方法,本文使用的同伦映射方法就是属于这一类方法.同伦映射方法的优点在于思路直接简明、计算简单、可得到解的较高近似度,并且求得的近似解保留了相应的解析特性,因而不但能对得到的结果直接进行定量分析,而且还能进行更深入的定性解析分析.本方法还可适用于其他非线性问题,具有较广阔的研究前景.

文献[11—22]利用微分不等式、变分迭代、不动点原理等方法也研究了一系列孤子理论和相应的非线性问题.本文是研究一类广义 Korteweg de Vries (KdV) 扰动方程.近来,对典型的 KdV 方程已有所研究[23—25],它代表的是各类相应自然现象的精简和浓缩.因此从进一步研究的意义看,有必要研究更能代表真实自然现象的扰动 KdV 方程.

2.同伦映射方法和孤子解的近似式

现讨论如下扰动 KdV 方程[25]:

$$u_t + 6uu_{xx} + u_{xxx} = f(t,x,u,u_x,u_t), \quad (1)$$

其中 f 为扰动项,设 f 是关于其变量的充分光滑函数.

为了得到方程(1)的近似解,引入一组同伦映射[26,27] $H(u,p):R\times I\to R$,

$$H(u,p) = L(u) - L(v) + p(L(v) + 6uu_{xx} - f(t,x,u,u_x,u_t)), \quad (2)$$

式中 $R=(-\infty,+\infty)$,$I=[0,1]$,v 为辅助函数,而线性算子 L 表示为

$$L(u) = u_t + u_{xxx}.$$

首先考虑对应于方程(1)的典型 KdV 方程

$$L(v) = -6uu_{xx}. \quad (3)$$

方程(3)具有如下单孤子解[22,23]:

$$v(t,x) = 2a\operatorname{sech}a(x - x_0 - 4a^2 t), \quad (4)$$

式中 a,x_0 为任意常数,它们可由 KdV 扰动的具体条件来确定.由(2)式可知,$H(u,1)=0$ 与方程(1)相同,故方程(1)的解 $u(t,x)$ 就是当 $p\to 1$ 的情形下 $H(u,p)=0$ 的解.

令

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(t,x)p^i. \quad (5)$$

* 国家自然科学基金(批准号:40676016)、国家重点基础研究发展规划(批准号:2003CB415101-03,2004CB418304)、中国科学院知识创新工程重要方向性项目(批准号:KZCX3-SW-221)和上海市教育委员会科研计划(批准号:E03004)资助的课题.

† E-mail:mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

考虑到(2),(5)式,对方程 $H(u,p)=0$ 中关于 p 的同次幂的系数加以比较.

比较 $H(u,p)=0$ 中 p 的零次幂系数可得

$$L(u_0) = L(v).$$

显然

$$u_0(t,x) = 2a\operatorname{sech}a(x - x_0 - 4a^2 t). \tag{6}$$

由(2)式, 比较 $H(u,p)=0$ 的 p 的一次幂的系数可得

$$L(u_1) = -L(v) + 6u_0 u_{0xx} - f(t,x,u_0,u_{0x},u_{0t}), \tag{7}$$

式中的 u_0 由(6)式表示. 由(4), (6)式, (7)式可简化为

$$L(u_1) = f(t,x,u_0,(u_0)_x,(u_0)_t). \tag{8}$$

于是,由(6), (8)式并利用 Fourier 变换,在初始条件 $u_1|_{t=0}=0$ 时,可得

$$u_1(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau,\xi,u_0,(u_0)_\xi,(u_0)_\tau) \times [\cos(-\lambda^3(t-\tau)+\lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{9}$$

由(2)式, 比较 $H(u,p)=0$ 的 p 的二次幂的系数可得

$$L(u_2) = 6(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) + F(u_0,u_1), \tag{10}$$

式中 u_0, u_1 分别由(6), (9)式表示, 而

$$F(u_0,u_1) = \left[\frac{\partial}{\partial p}\left(f\left(t,x,\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i,\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i\right)_x,\left(\sum_{i=0}^{\infty}u_i p^i\right)_t,\varepsilon\right)\right)\right]_{p=0}.$$

用相同的方法可得到方程(10)在初始条件 $u_2|_{t=0}=0$下的解

$$u_2(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}[6(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) + F(u_0,u_1)][\cos(-\lambda^3(t-\tau) + \lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{11}$$

于是,由(6), (9), (11)式可得扰动 KdV 方程(1)孤子解的二次近似解

$$\begin{aligned}u(t,x) &= 2a\operatorname{sech}a(x - x_0 - 4a^2 t)\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}[f(\tau,\xi,u_0,(u_0)_\xi,(u_0)_\tau)\\ &\quad + 6(u_0 u_{1xx} + u_1 u_{0xx}) + F(u_0,u_1)]\\ &\quad \times [\cos(-\lambda^3(t-\tau) + \lambda(x-\xi))]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau,\end{aligned} \tag{12}$$

式中 a, x_0 为任意常数,u_0, u_1 分别由(6), (9)式表示.

用同样的方法比较(2)式关于 p 的更高次幂的系数,可得到 KdV 方程(1)的更高次扰动孤子近似解.

3. 微扰孤子解

若扰动 KdV 方程(1)中的扰动项是微扰的,并设 $f=\varepsilon u^3$,其中 ε 为正的小参数, 这时相应的微扰方程为

$$u_t + 6uu_{xx} + u_{xxx} = \varepsilon u^3. \tag{13}$$

用上述类似的方法,不难得到 KdV 微扰方程(13)的孤子扰动解 $u(t,x,\varepsilon)$ 关于 p 的零次幂和一次幂的系数分别为

$$u_0(t,x) = 2a\operatorname{sech}a(x - x_0 - 4a^2 t), \tag{14}$$

$$u_1(t,x) = \frac{4\varepsilon a^3}{\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}[\operatorname{sech}a(\xi - x_0 - 4a^2 t)]^3 \times \cos(-\lambda^3(t-\tau) + \lambda(x-\xi))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau. \tag{15}$$

于是,由(14), (15)式可得 KdV 微扰方程(13)的孤子扰动解 $u(t,x,\varepsilon)$的一次近似如下:

$$\begin{aligned}u(t,x,\varepsilon) &= 2a\operatorname{sech}a(x - x_0 - 4a^2 t)\\ &\quad + \frac{4\varepsilon a^3}{\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}[\operatorname{sech}a(\xi - x_0 - 4a^2 t)]^3\\ &\quad \times \cos(-\lambda^3(t-\tau) + \lambda(x-\xi))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau\\ &\quad (0 < \varepsilon \ll 1).\end{aligned} \tag{16}$$

还可用相同的方法得到微扰方程(13)的扰动孤子解 $u(t,x,\varepsilon)$的更高次近似.

由于方程(6)是微扰方程, 现利用摄动方法再来求其近似解. 设方程(6)的摄动解为

$$u = \sum_{i=0}^{\infty} u_i \varepsilon^i.$$

我们能够依次地求出摄动解的各次近似, 其中一次近似 u_{per}为

$$\begin{aligned}u_{\mathrm{per}} &= 2a\operatorname{sech}a(x - x_0 - 4a^2 t)\\ &\quad + \frac{4\varepsilon a^3}{\pi}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}[\operatorname{sech}a(\xi - x_0 - 4a^2 t)]^3\\ &\quad \times \cos(-\lambda^3(t-\tau) + \lambda(x-\xi))\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau + O(\varepsilon^2)\\ &\quad (0 < \varepsilon \ll 1).\end{aligned}$$

上述结果与用同伦映射方法得到的结果一致. 这从一个侧面说明,用同伦方法求得的扰动 KdV 方程孤子近似解具有较高的精度.

4. 结 论

1）由扰动 KdV 方程(1)的左端项的结构及扰动项 f 关于其变元的性态和由本文引入的同伦映射关系式的解析性等条件，我们可以得到(2)式所决定的级数(5)式在 $p\in[0,1]$ 上是一致收敛的[26]．从而得到 $u(t,x)=\sum_{i=0}^{\infty}u_i(t,x)$ 为原扰动方程(1)的孤子解．

2）本文用同伦映射方法，选取的初始近似 $u_0(t,x)$ 是采用非扰动情形下的典型 KdV 方程的孤子解(4)式．它保证了对应于扰动情形下的 KdV 方程能较快地求得在所要求的精度范围内的近似解，特别是对微扰方程(13)，从而能快速而有效地得到孤子解的近似解．这更接近模型的真实现象，故所得的结果更加实用简捷．

3）同伦映射方法是一个近似的解析方法，它不同于一般的数值方法和模拟方法．用同伦映射方法得到解的表达式能够继续进行解析运算．因此由相应近似解的表达式，还能够用微分、积分等手段来进一步研究方程解各种定性和定量的性态．本文中对此未加以讨论．

[1] McPhaden M J，Zhang D 2002 *Nature* **415** 603

[2] Gu A F，Philander S G H 1997 *Science* **275** 805

[3] Liu S K，Fu Z T，Liu S D，Zhao Q 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 10 (in Chinese)［刘式适、付遵涛、刘式达、赵 强 2002 物理学报 **51** 10］

[4] Pan L X，Zuo W M 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 1 (in Chinese)［潘留仙、左伟明 2005 物理学报 **54** 1］

[5] Pan L X，Liu J L，Li S S，Niu Z C，Feng S L，Zheng H Z 2002 *Sci*. *China* A **32** 556 (in Chinese)［潘留仙、刘金龙、李树深、牛智川、封松林、郑厚植 2002 中国科学 A **32** 556］

[6] Lin Y H，Ceng Q C 1999 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **9** 211

[7] Lin Y H，Ji Z Z，Zeng Q C 1999 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **9** 532

[8] Feng G L，Dai X G，Wang A H，Chou J F 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 606 (in Chinese)［封国林、戴新刚、王爱慧、丑纪范 2001 物理学报 **50** 606］

[9] Wang L S，Xu D Y 2003 *Sci*. *China* E **32** 488 (in Chinese)［王林山、徐道义 2003 中国科学 E **32** 488］

[10] Wu J F，Ye W H，Zhang W Y，He X T 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1688 (in Chinese)［吴俊峰、叶文华、张维岩、贺贤土 2003 物理学报 **52** 1688］

[11] Mo J Q，Zhu J，Wang H 2003 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **13** 768

[12] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 550

[13] Mo J Q，Lin W T 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 996 (in Chinese)［莫嘉琪、林万涛 2004 物理学报 **53** 996］

[14] Mo J Q，Lin W T 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 993 (in Chinese)［莫嘉琪、林万涛 2005 物理学报 **54** 993］

[15] Mo J Q，Lin W T 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 1291 (in Chinese)［莫嘉琪、林万涛 2008 物理学报 **57** 1291］

[16] Mo J Q，Lin W T 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 875

[17] Mo J Q，Wang H，Lin W T，Lin Y H 2006 *Chin*. *Phys*. **15** 671

[18] Mo J Q，Lin W T，Wang H 2007 *Chin*. *Phys*. **16** 578

[19] Mo J Q，Lin W T，Zhu J 2004 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **14** 112

[20] Lin W T，Mo J Q 2004 *Chin*. *Sci*. *Bull*. **48**(Ⅱ) 5

[21] Lin W T，Ji Z Z，Wang B 2002 *Adv*. *Atmosph*. *Sci*. **19** 699

[22] Lin W T，Ji Z Z，Wang B，Zhang X 2002 *Prog*. *Nat*. *Sci*. **12** 1326 (in Chinese)［林万涛、季仲贞、王 斌、张 昕 2002 自然科学进展 **12** 1326］

[23] Pan L X，Yan J R，Zhou C H 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 594

[24] Pan L X，Yu H Y，Yan J R 2008 *Acta Phys*. *Sin*. **57** 1316 (in Chinese)［潘留仙、俞慧友、颜家壬 2008 物理学报 **57** 1316］

[25] Yan J R，Tang Y 1998 *Phys*. *Rev*. E **54** 6818

[26] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation*：*Introduction to the Homotopy Analysis Method* (New York：CRC Press)

[27] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou：Henan Science and Technology Publisher) (in Chinese)［何吉欢 2002 工程和科学中的近似非线性分析方法（郑州：河南科学技术出版社）］

Homotopic mapping solution of soliton for perturbed KdV equation*

Mo Jia-Qi† Yao Jing-Sun

(*Department of Mathematics*, *Anhui Normal University*, *Wuhu* 241000, *China*)

(Received 15 May 2008; revised manuscript received 4 June 2008)

Abstract

Using the homotopic mapping method, a class of nonlinear KdV (Korteweg de Vries) equation is considered. Firstly, by introducing a homotopic transform, the problem of solving soliton for the corresponding equation is changed into a problem of mapping transform. Then on account of the property of the homotopic mapping, the approximate solution of soliton for the original equation is obtained.

Keywords: soliton, perturbation, homotopic mapping

PACC: 0340, 0230

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 40676016), the State Key Development Program for Basic Research of China (Grant Nos. 2003CB415101-03, 2004CB418304), the Main Diraction Program of the Knowledge Innovation of Chinese Academy of Sciences (Grant No. KZCX3-SW-221) and the Scientific Research Program of the Education Committee of Shanghai, China (Grant No. E03004).

† E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn