

# 偶极旋量玻色-爱因斯坦凝聚体在外场中的 自旋混合动力学\*

李菊萍 谭磊<sup>†</sup> 臧小飞 杨科

(兰州大学理论物理研究所, 兰州 730000)

(2008 年 4 月 25 日收到, 2008 年 6 月 3 日收到修改稿)

探讨了外场中偶极旋量玻色-爱因斯坦凝聚体的静态和动力学行为. 研究结果表明, 可以调节外场、自旋交换相互作用和偶极-偶极相互作用来调控三组分之间的隧穿, 控制布居数动力学演化范围和相对相位动力学行为.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 偶极-偶极相互作用, 自旋混合动力学

PACC: 0530J, 2110H

## 1. 引 言

$^{52}\text{Cr}$  原子玻色-爱因斯坦凝聚体(BEC)<sup>[1,2]</sup>的实现为研究偶极-偶极相互作用开辟了广阔的前景. 偶极-偶极相互作用具有长程性和矢量性, 这种各向异性的相互作用与用  $s$  波散射长度表征的短程相互作用有本质上的不同, 它使旋量 BEC 体现出许多奇特的性质<sup>[3-11]</sup>, 如基态量子相变<sup>[3]</sup>、基态自旋结构<sup>[4]</sup>、光学晶格中的量子相变<sup>[5-7]</sup>、自旋涡旋<sup>[8]</sup>等等. 偶极旋量 BEC 的一个重要特性就是原子间除了存在通常的两体硬核排斥相互作用以外, 还存在自旋交换相互作用以及磁偶极-偶极相互作用. 与外场引起自旋态的混合类似, 后两种相互作用也可以引起凝聚体的自旋混合, 即原子在内部非线性相互作用或在外场作用下从一个自旋态转移到另一个自旋态. 实验和理论方面已对自旋交换相互作用引起的动力学行为进行了许多研究<sup>[12-17]</sup>. 实验方面, Chang 等<sup>[18]</sup>已观测到自旋交换相互作用. 理论方面, Law 等<sup>[12]</sup>首先建立了  $F=1$  的旋量 BEC 的哈密顿量并用单空间模近似(single spatial mode approximation, 简记为 SMA)研究了自旋交换相互作用引起的动力学行为. 随后 Pu 等<sup>[14]</sup>建立了外磁场作用下旋量 BEC 自旋混合动力学模型. Zhang 等<sup>[15]</sup>利用 SMA 和平均

场理论研究了在外磁场中处于  $|0\rangle$  态的原子数振荡周期及平均自旋的演化行为. Saito 和 Ueda<sup>[16]</sup>详细讨论了在总粒子数和总自旋守恒条件下的局域自发磁化现象, 并研究了势阱形状对自旋混合动力学行为的影响. Romano 等<sup>[17]</sup>得到了外场中旋量 BEC 的半经典动力学行为, 研究结果表明凝聚体的动力学行为只与二阶塞曼效应和自旋交换相互作用有关.

Cheng 等<sup>[19]</sup>研究了偶极-偶极相互作用对 BEC 动力学行为的影响, 结果证明自发磁化现象和自旋混合动力学取决于自旋交换相互作用与偶极-偶极相互作用的比率, 三组分间的初始布居数差和相对相位以及凝聚体的总超精细自旋对半经典动力学都有重要影响. 利用偶极旋量 BEC 可以实现和控制宏观量子自俘获现象和约瑟夫森振荡现象. 文献 [19] 就无外场情况下偶极旋量 BEC 的隧穿动力学进行了半经典研究, 给出实现自俘获现象的参数条件. 本文在文献 [19] 的基础上详细探讨了外场和偶极-偶极相互作用对 BEC 系统静态和动力学行为的影响, 将文献 [19] 的结果推广到更一般的情况. 静态点、动力学行为与外场和凝聚体的非线性相互作用决定参数的变化应满足一定的规律, 可以调节外场、自旋交换相互作用和偶极相互作用来调控三组分之间的隧穿, 控制布居数动力学演化范围和相对相位动力学行为.

\* 国家自然科学基金(批准号:10704031)、国家基础科学人才培养基金(批准号:J0730314)和甘肃省自然科学基金(批准号:3ZS061-A25-035)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯联系人. E-mail: tanlei@lzu.edu.cn

## 2. 外场中偶极旋量 BEC 自旋混合动力学方程

考虑外磁场中  $N$  个自旋  $F=1$  的玻色子组成的偶极旋量 BEC 哈密顿量  $\hat{H}_{\text{tot}}$  包含三部分, 第一部分是旋量 BEC 的哈密顿量  $\hat{H}_{\text{sp}}$ , 第二部分是外场对凝聚体的影响  $\hat{H}_B$ , 第三部分表示磁偶极-偶极相互作用哈密顿量  $\hat{H}_{\text{dd}}$ . 总哈密顿量的二次量子化形式为<sup>[3, 12]</sup>

$$\begin{aligned} \hat{H}_{\text{tot}} &= \hat{H}_{\text{sp}} + \hat{H}_B + \hat{H}_{\text{dd}}, \\ \hat{H}_{\text{sp}} + \hat{H}_B &= \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger \left( -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2M} + V_{\text{ext}} + E_\alpha \right) \hat{\psi}_\alpha \\ &+ \frac{c_0}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\beta^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{c_2}{2} \int d\mathbf{r} \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}) \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} \hat{\psi}_\nu(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}), \\ \hat{H}_{\text{dd}} &= \frac{c_d}{2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &\times [ \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}') \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{F}_{\mu\nu} \hat{\psi}_\nu(\mathbf{r}') \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) \\ &- 3 \hat{\psi}_\alpha^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}_\mu^\dagger(\mathbf{r}') \mathbf{F}_{\alpha\beta} \cdot \mathbf{e} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{e} \hat{\psi}_\nu(\mathbf{r}') \hat{\psi}_\beta(\mathbf{r}) ] \end{aligned} \quad (1)$$

这里  $\hat{\psi}_\alpha^\dagger$  ( $\alpha = 0, \pm 1$ ) 为原子处在超精细自旋态  $|f, m_f = \alpha\rangle$  的产生算符,  $\hat{\psi}_\alpha$  为湮没算符; 单原子的超精细自旋算符  $F$  可用自旋矩阵表示;  $M$  为原子质量; 外束缚势  $V_{\text{ext}}$  是远离共振的光偶极阱, 对三个自旋组分都是相同的;  $c_0 = 4\pi\hbar^2(g_0 + 2g_2)/(3M)$  和  $c_2 = 4\pi\hbar^2(g_2 - g_0)/(3M)$  分别表示密度-密度碰撞相互作用和自旋-自旋相互作用;  $a_f$  代表总自旋  $f$  轨道的  $s$  波散射长度; 磁偶极-偶极相互作用参数  $c_d = \mu_0 \mu_B^2 g_f^2 / (4\pi)$ , 其中  $g_f$  为朗德因子,  $\mu_B$  为玻尔磁子; (1) 式重复指标求和. 外磁场沿  $z$  轴时,  $E_\alpha$  ( $\alpha = 0, \pm 1$ ) 是塞曼效应引起的原子处于  $|\alpha\rangle$  态的能量, 分别表示为<sup>[20]</sup>

$$\begin{aligned} E_{+1} &= -\frac{E_{\text{HFS}}}{8} - g_I \mu_B B - \frac{1}{2} E_{\text{HFS}} \sqrt{1 + \xi + \xi^2}, \\ E_0 &= -\frac{E_{\text{HFS}}}{8} - \frac{1}{2} E_{\text{HFS}} \sqrt{1 + \xi^2}, \\ E_{-1} &= -\frac{E_{\text{HFS}}}{8} + g_I \mu_B B - \frac{1}{2} E_{\text{HFS}} \sqrt{1 - \xi + \xi^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $E_{\text{HFS}}$  是磁场引起的超精细能级分裂<sup>[20]</sup>,  $g_I$  为朗德因子,  $\mu_I$  为核磁子,  $\xi = (g_I \mu_I B + g_I \mu_B B) / E_{\text{HFS}}$ .

根据绝大多数的实验情况, 可将量子化轴  $z$  选

作凝聚体的对称轴. 在这种情况下, 哈密顿量  $\hat{H}_{\text{dd}}$  可以简化. 采用单模近似<sup>[12]</sup>, 即  $\hat{\psi}_\alpha(\mathbf{r}) \approx \varphi(\mathbf{r}) \hat{a}_\alpha$ , 其中  $\varphi(\mathbf{r})$  表示与自旋无关的凝聚体空间波函数,  $\hat{a}_\alpha$  是磁量子数  $m_f = \alpha$  的自旋组分的湮没算符. 将  $\psi_\alpha = \hat{\psi}_\alpha = \varphi(\mathbf{r}) \xi_\alpha$ ,  $\xi_\alpha = \sqrt{\rho \alpha} e^{-i\theta_\alpha}$  代入总哈密顿算符并略去不重要的常数项, 可得到总哈密顿量  $E$  的表达式<sup>[3]</sup>

$$\begin{aligned} E &= (\epsilon + E_0 - c'_d)N + 3c'_d N_0 + c_0 N^2 \\ &+ (c_0 + 3c'_d) \mathcal{X} (N_1 - N_{-1})^2 \\ &+ \mathcal{X} (c'_2 - c'_d) N_0 [N_1 + N_{-1} + \sqrt{N_1 N_{-1}} \\ &\times \cos(2\theta_0 - \theta_1 - \theta_{-1})] \\ &- \mathcal{Y} (N_1 - N_{-1}) + \delta (N_1 + N_{-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

这里

$$\begin{aligned} \epsilon &= \int d\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}) [\mathbf{I} - \hbar^2 \nabla^2 / (2m) + V] \varphi(\mathbf{r}), \\ c'_{0,2} &= (c_{0,2} / 2) \int |\varphi(\mathbf{r})|^4 d\mathbf{r} \end{aligned}$$

表示短程碰撞相互作用,

$$\begin{aligned} c'_d &= (c_d / 4) \int \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' |\varphi(\mathbf{r})|^2 |\varphi(\mathbf{r}')|^2 \\ &\times (1 - 3\cos^2 \theta_e) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 \end{aligned}$$

则表示磁偶极-偶极相互作用,  $\theta_e$  为矢量  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  的极角,

$$N_\alpha = \int |\psi_\alpha|^2$$

为处于超精细态  $|\alpha\rangle$  的凝聚总原子数.

总原子数  $N = \sum_\alpha N_\alpha$  和凝聚体的总超精细自旋  $M (M = N_1 - N_{-1})$  是哈密顿量中的两个守恒量. 引入正则变量

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_1 &= (\theta_1 + \theta_0 + \theta_{-1}) / 3, \\ \bar{N}_1 &= N_1 + N_0 + N_{-1}, \\ \bar{\theta}_2 &= \theta_0 - (\theta_1 + \theta_{-1}) / 2, \\ \bar{N}_2 &= (2/3)N_0 - (1/3)(N_1 + N_{-1}), \\ \bar{\theta}_3 &= \theta_1 - \theta_{-1}, \\ \bar{N}_3 &= (N_1 - N_{-1}) / 2. \end{aligned} \quad (4)$$

哈密顿量 (3) 式利用正则变量改写为

$$\begin{aligned} E &= (\epsilon + E_0) \bar{N}_1 + 3c'_d \bar{N}_2 + c_0 \bar{N}_1^2 \\ &+ \mathcal{A} (c'_2 + 3c'_d) \bar{N}_3^2 \\ &+ \mathcal{X} (c'_2 - c'_d) \mathcal{Y} (1/3) \bar{N}_1 + \bar{N}_2 \mathcal{Z} (2/3) \bar{N}_1 \\ &- \bar{N}_2 + \sqrt{((2/3) \bar{N}_1 - \bar{N}_2)^2 - 4\bar{N}_3^2} \cos 2\bar{\theta}_2 \\ &- 2\eta \bar{N}_3 + \delta ((2/3) \bar{N}_1 - \bar{N}_2). \end{aligned} \quad (5)$$

这里  $\bar{\theta}_1$  和  $\bar{\theta}_3$  为循环坐标, 总原子数  $\bar{N}_1$  和总超精细

自旋  $2\bar{N}_3$  的平均值是两个运动常数,总哈密顿量的动力学行为由  $\bar{\theta}_2$  和  $\bar{N}_2$  两个变量决定.

$$\begin{aligned}\bar{\theta}_2 &= \frac{\partial E}{\partial \bar{N}_2}, \\ \bar{N}_2 &= -\frac{\partial E}{\partial \bar{\theta}_2}.\end{aligned}\quad (6)$$

由于  $\rho_a = N_a/N$ ,因而可以得到哈密顿方程

$$\begin{aligned}\hbar\dot{\rho}_0 &= 4N(c'_2 - c'_d)\rho_0\sqrt{(1-\rho_0^2)-m^2}\sin 2\theta, \\ \hbar\dot{\theta} &= -\delta + 3c'_d + 2N(c'_2 - c'_d)(1-2\rho_0) \\ &\quad + 2N(c'_2 - c'_d)\frac{(1-\rho_0)(1-2\rho_0)-m^2}{\sqrt{(1-\rho_0)^2-m^2}}\cos 2\theta.\end{aligned}\quad (7)$$

式中  $\theta = \bar{\theta}_2$ .与经典力学相比,可以认为  $E_{\text{tot}}$  描述的是一个非刚性摆.  $\alpha = 0$  和  $\alpha = \pm 1$  自旋组分构成的玻色-约瑟夫森结隧穿流为  $(N/2)\rho_0^2$ ,与双势阱中两弱连接 BEC 的玻色-约瑟夫森结隧穿流相比要复杂得多,这正是系统非线性的体现.

### 3. 平衡结构

为了得到外磁场、偶极-偶极相互作用和自旋交换相互作用对三组分布居数和相位的动力学影响.首先研究  $\alpha = 0$  和  $\alpha = \pm 1$  自旋组分构成的玻色-约瑟夫森结隧穿流为零的平衡情况.令运动方程(7)中的时间导数项为零,得

$$\begin{aligned}\rho_0\sqrt{(1-\rho_0^2)-m^2}\sin 2\theta &= 0, \\ -(\delta - 3c'_d)[2N(c'_2 - c'_d)] + (1-2\rho_0) \\ &\quad + \frac{(1-\rho_0)(1-2\rho_0)-m^2}{\sqrt{(1-\rho_0)^2-m^2}}\cos 2\theta = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

定义

$$\lambda = (\delta - 3c'_d)[2N(c'_2 - c'_d)],$$

描述二阶塞曼效应、磁偶极-偶极相互作用和自旋相互作用相对强度.

在方程组(8)中,  $-1 < m < 1, 0 < \rho_0 < 1 - |m|$ , 求解后存在四种情形.

情形 I 首先,  $\cos 2\theta = 1, \rho_0 m \neq 0$ , 在  $-\infty < \lambda < 1 + \sqrt{1-m^2}$  区间内有唯一解  $\rho_0(\lambda, m)$ ; 当  $\lambda \rightarrow -\infty$  时,  $\rho_0$  的平衡值趋近于它的上边界值  $1 - |m|$ . 这时, 占据超精细自旋态  $|\pm 1\rangle$  的分数分别为  $\rho_1 =$

$(|m| + m)/2, \rho_{-1} = (|m| - m)/2$ . 当  $\lambda = 1 + \sqrt{1-m^2}$  时,  $\rho_0 = 0$ , 占据超精细自旋态  $|\pm 1\rangle$  的分数分别为  $\rho_1 = (1+m)/2, \rho_{-1} = (1-m)/2$ . 其次,  $\cos 2\theta = 1, m = 0$ , 在  $-2 \leq \lambda \leq 2$  区间内有唯一解  $\rho_0(\lambda, m)$ ; 占据超精细自旋态的原子分数分别为  $\rho_0 = (1-\lambda)/2, \rho_1 = \rho_{-1} = (1+\lambda)/4$ .

情形 II 首先,  $\cos 2\theta = -1, \rho_0 m \neq 0$ , 在  $\lambda > 1 - \sqrt{1-m^2}$  区间内有唯一解  $\rho_0(\lambda, m)$ , 当  $\lambda = 1 - \sqrt{1-m^2}$  时,  $\rho_0$  的平衡值趋近下边界值 0,  $\rho_1 = (1+m)/2, \rho_{-1} = (1-m)/2$ . 当  $\lambda \rightarrow \infty$  时,  $\rho_0$  的平衡值为趋近上边界值  $1 - |m|, \rho_1 = (|m| + m)/2, \rho_{-1} = (|m| - m)/2$ . 其次,  $\cos 2\theta = -1, m = 0, \lambda = 0$ , 只有当二阶塞曼效应与磁偶极-偶极相互作用抵消时, 各量子态粒子数才可不随时间变化.

在情形 I 和情形 II 中, 发生碰撞  $1+(-1) \rightarrow 0+0$  和  $0+0 \rightarrow 1+(-1)$  的概率相等. 此外, 还会发生  $1+1 \rightarrow 1+1, (-1)+(-1) \rightarrow (-1)+(-1), 1+0 \rightarrow 1+0, (-1)+0 \rightarrow (-1)+0, 1+(-1) \rightarrow 1+(-1)$ .

情形 III  $\rho_0 = 0$ , 当不考虑外磁场和磁偶极相互作用时, 这对应铁磁相互作用凝聚体的基态<sup>[21]</sup>.

情形 IV  $\rho_0 = 1$ , 当不考虑外磁场和磁偶极相互作用时, 这对应反铁磁相互作用凝聚体的基态<sup>[21]</sup>.

情形 III 和情形 IV 的解与相对相位和外磁场无关. 除了这两种情况外, 当外磁场为零且原子间相互作用是反铁磁时, BEC 磁化强度仍不为零, 也就是磁偶极-偶极相互作用会导致旋量 BEC 发生自发磁化<sup>[22, 23]</sup>. 考虑到磁偶极-偶极相互作用系数的符号和大小与凝聚体的几何形状有关<sup>[24, 25]</sup>, 因此我们可以通过调节外磁场或调整凝聚体势阱的纵横比, 达到方便地控制旋量 BEC 基态磁性质的目的.

### 4. 外场及偶极-偶极相互作用对 BEC 三组分隧穿的调控

通过调节外场、自旋交换相互作用和偶极相互作用来调控三组分之间的隧穿, 可以达到控制布居数动力学演化范围和相对相位动力学行为. 下面分两种情况讨论三种相互作用对  $\rho_0$  和  $\theta$  动力学行为的影响(图 1—图 3).

第一种情况是  $m \neq 0$ . 从图 4 的等能相图可以看出, 哈密顿系统的演化有两种轨道: 静态点和它周围

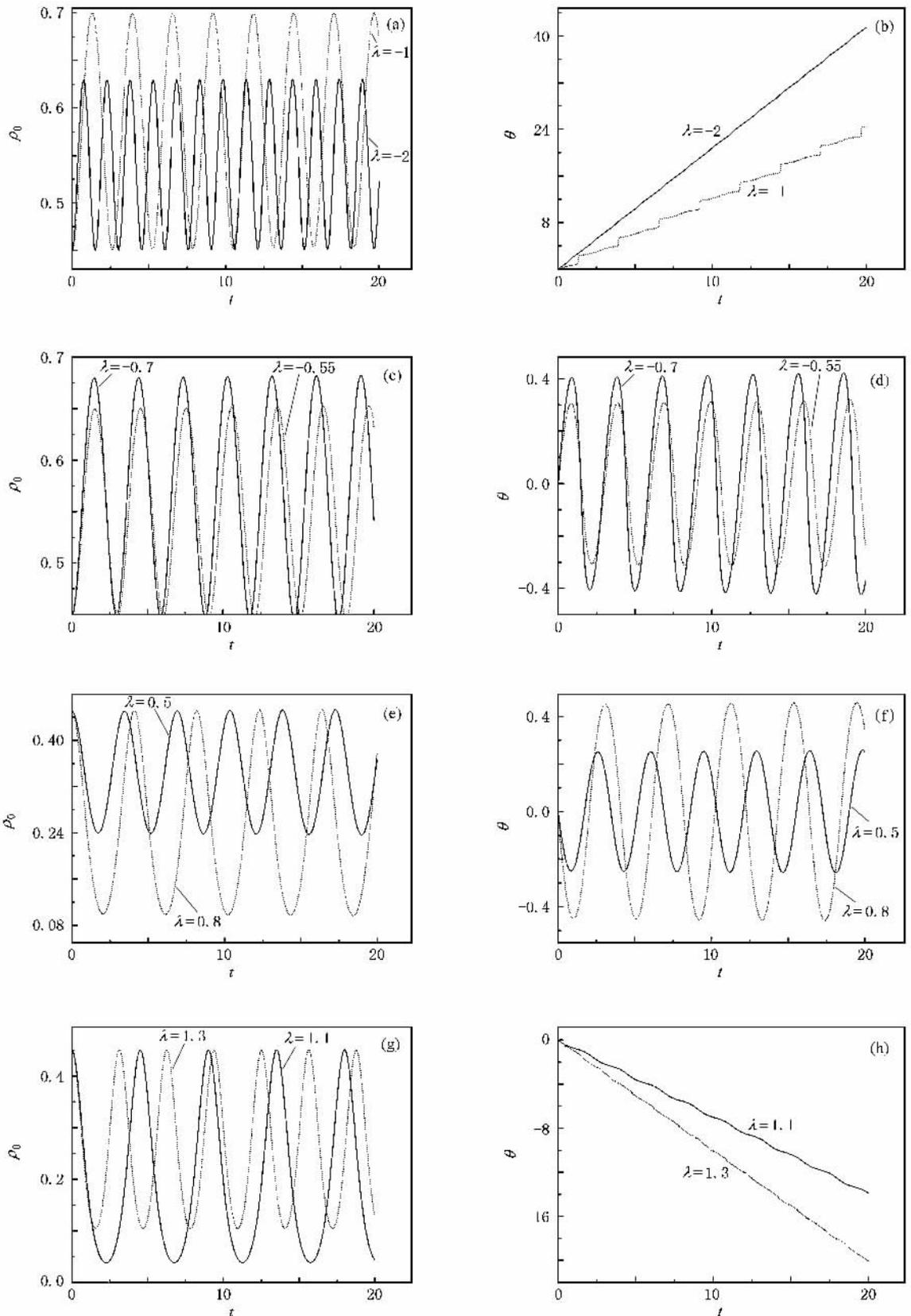


图1 初始条件  $\rho_0(0)=0.45, m=0.3, \mathcal{A}(0)=0$  时  $\rho_0$  和相对相位  $\theta$  的动力学演化行为 (a)  $\lambda = -1, -2$  时  $\rho_0$  的演化 (b)  $\lambda = -1, -2$  时  $\theta$  的演化 (c)  $\lambda = -0.55, -0.7$  时  $\rho_0$  的演化 (d)  $\lambda = -0.55, -0.7$  时  $\theta$  的演化 (e)  $\lambda = 0.5, 0.8$  时  $\rho_0$  的演化 (f)  $\lambda = 0.5, 0.8$  时  $\theta$  的演化 (g)  $\lambda = 1.1, 1.3$  时  $\rho_0$  的演化 (h)  $\lambda = 1.1, 1.3$  时  $\theta$  的演化

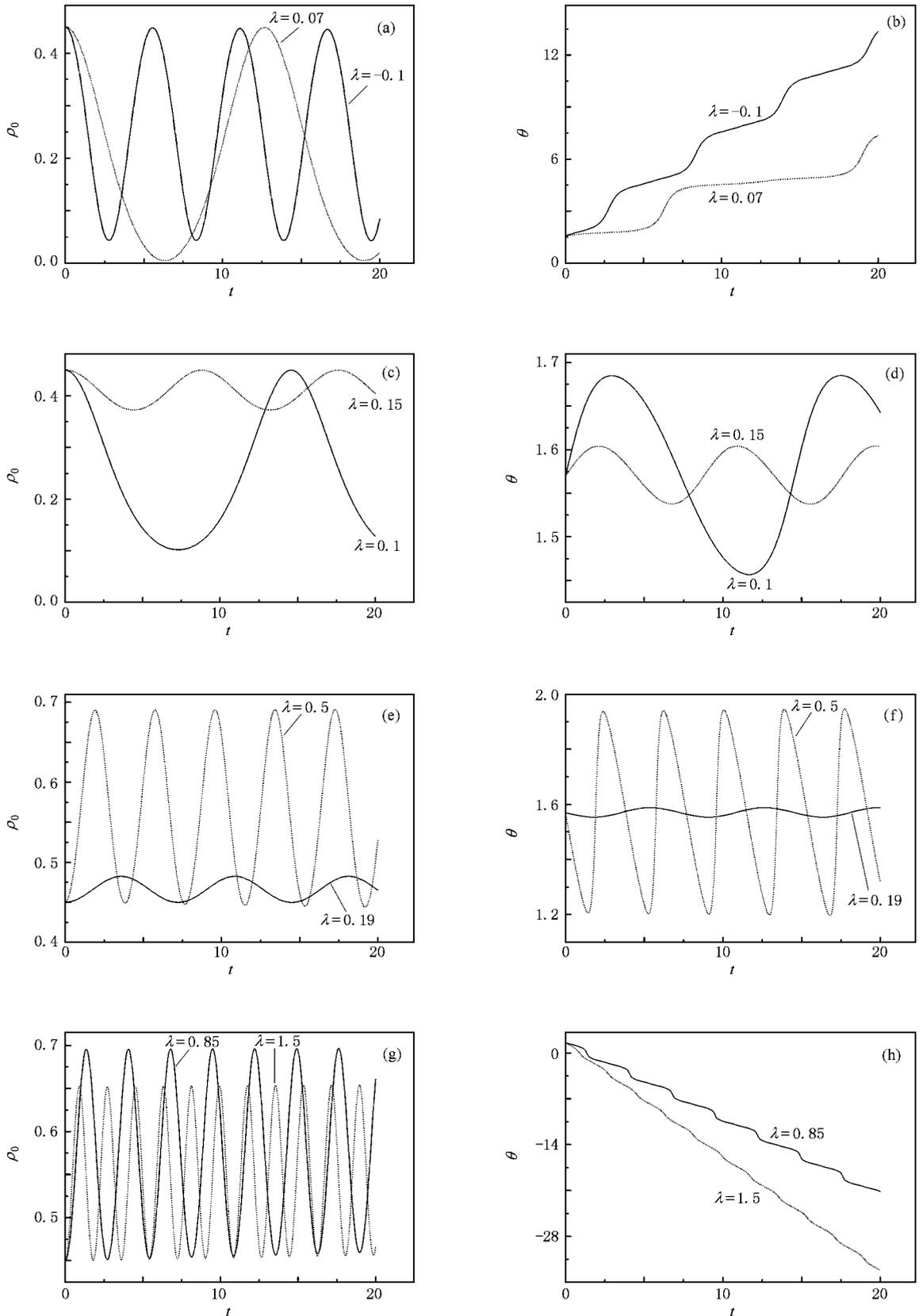


图2 初始条件  $\rho_0(0)=0.45, m=0.3, \theta=\pi/2$  时  $\rho_0$  和相对相位  $\theta$  的动力学演化行为 (a)  $\lambda = -0.1, 0.07$  时  $\rho_0$  的演化 (b)  $\lambda = -0.1, 0.07$  时  $\theta$  的演化 (c)  $\lambda = 0.1, 0.15$  时  $\rho_0$  的演化 (d)  $\lambda = 0.1, 0.15$  时  $\theta$  的演化 (e)  $\lambda = 0.19, 0.5$  时  $\rho_0$  的演化 (f)  $\lambda = 0.19, 0.5$  时  $\theta$  的演化 (g)  $\lambda = 0.85, 1.5$  时  $\rho_0$  的演化 (h)  $\lambda = 0.85, 1.5$  时  $\theta$  的演化

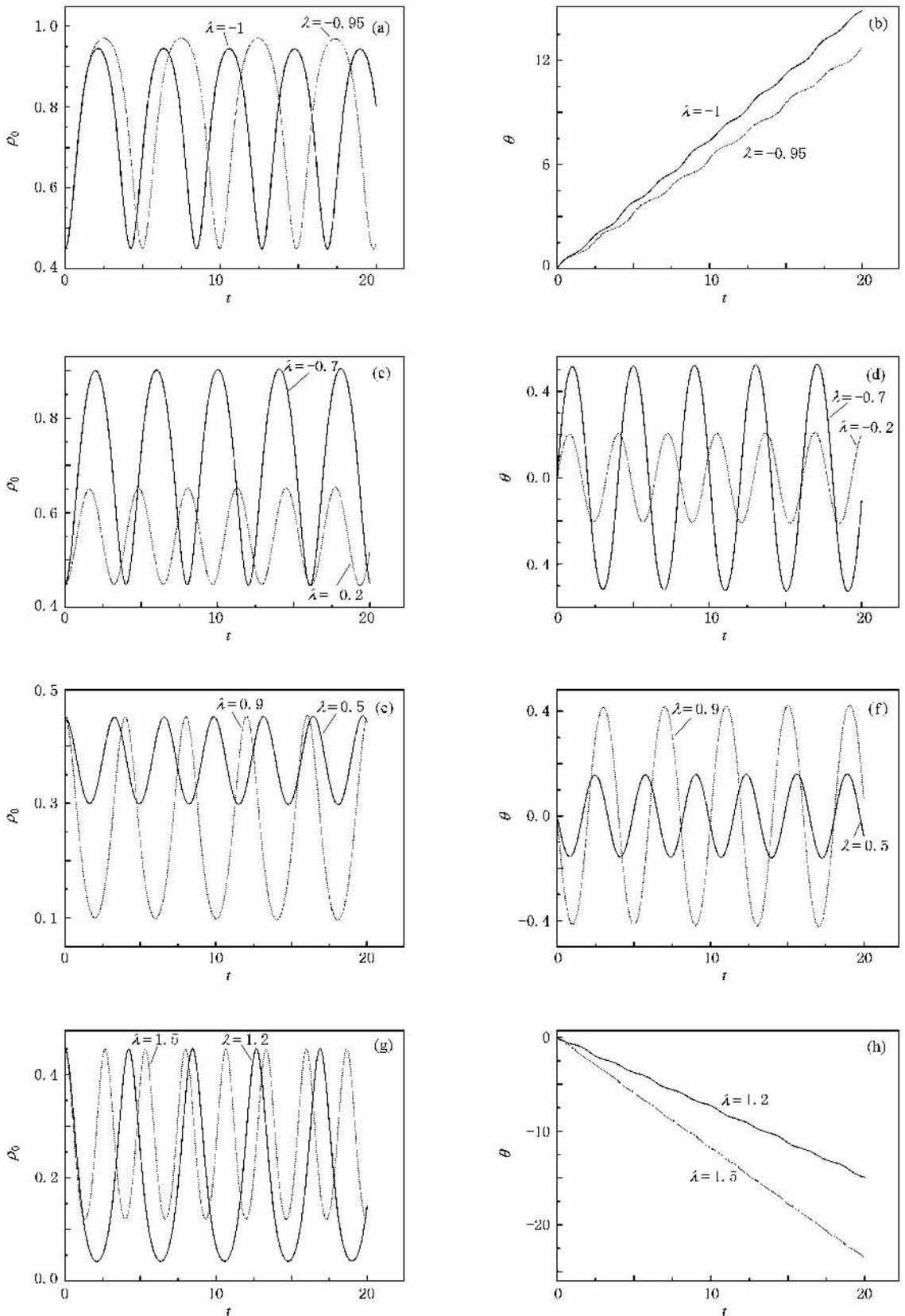


图3 初始条件  $\rho_0(0)=0.45, m=0, \theta=0$  时,  $\rho_0$  和相对相位  $\theta$  的动力学演化行为 (a)  $\lambda = -0.95, -1$  时  $\rho_0$  的演化 (b)  $\lambda = -0.95, -1$  时  $\theta$  的演化 (c)  $\lambda = -0.2, -0.7$  时  $\rho_0$  的演化 (d)  $\lambda = -0.2, -0.7$  时  $\theta$  的演化 (e)  $\lambda = 0.5, 0.9$  时  $\rho_0$  的演化 (f)  $\lambda = 0.5, 0.9$  时  $\theta$  的演化 (g)  $\lambda = 1.2, 1.5$  时  $\rho_0$  的演化 (h)  $\lambda = 1.2, 1.5$  时  $\theta$  的演化

的轨道. 静态点即为(1)(2)式的两个解, 当初始条件  $\cos 2\theta(0) = \pm 1$ ,  $\rho_0(0)$  偏离不动点时,  $\rho_0$  随时间周期振荡, 相对相位  $\theta$  随时间单调变化或围绕 0,  $\pi/2$  周期振荡, 这取决于  $\rho_0(0)$  和参数  $\lambda$ . 当  $\lambda \rightarrow -\infty$ , 零相位对应的静态点  $\rho_0(\lambda, m)$  趋近最大值  $1 - |m|$ . 随着  $\lambda$  的增大, 静态点向下移动. 当  $\lambda = 0$  时,  $\rho_0 = (1 - m^2)/2$ . 当  $\lambda$  增大到  $1 - \sqrt{1 - m^2}$  时,  $\pi/2$  相位对应的静态点出现在相图的下部, 即对应  $\rho_0 = 0$ . 在  $(1 - \sqrt{1 - m^2}, 1 + \sqrt{1 - m^2})$  区间, 随着  $\lambda$  增大, 零相位对应的静态点向下移动,  $\pi/2$  对应的静态点向上移动. 当  $\lambda$  增大到  $1 + \sqrt{1 - m^2}$  时,

零相位对应的静态点为  $\rho_0 = 0$ . 当  $\lambda > 1 + \sqrt{1 - m^2}$ , 零相位对应的静态点消失.  $\pi/2$  相位对应的静态点向上移动. 当  $\lambda \rightarrow \infty$  时,  $\pi/2$  相位对应的静态点  $\rho_0$  达到最大值  $1 - |m|$ . 综上所述可知, 随着  $\lambda$  增大, 零相位对应的静态点在相图上从上向下移动, 最后消失;  $\pi/2$  相位对应的静态点在相图上出现并从下向上移动, 最后趋近  $\rho_0 = 1 - |m|$ . 为了更深入了解三种相互作用对自旋混合动力学的影响, 下面采用数值法分别给出  $\rho_0$  和相对相位随时间演化的动力学行为. 本文中时间的单位为  $\hbar / (2|c_2' - c_4'|)$ .

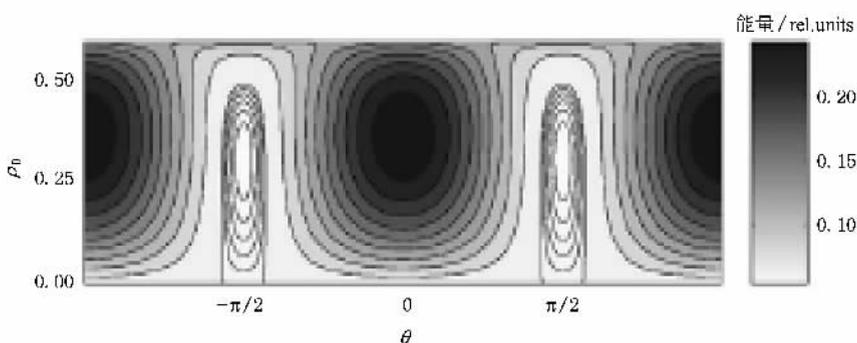


图4  $^{23}\text{Na}$  原子的等能相图  $B = 1.5 \times 10^{-6} \text{ T}$ ,  $|c_2' - c_4'| = \pi \text{ Hz}$ ,  $m = 0.3$

对于  $\theta(0) = 0$ , 当参数  $\lambda < \lambda_1(\rho_0(0), m)$  时,  $\rho_0$  在大于  $\rho_0(0)$  范围振荡, 如图 1(a)–(d) 所示. 在开放轨道, 相对相位随时间单调变大, 随着  $\lambda$  的增大, 振荡范围增大(图 1(a)(b)), 进入闭合轨道后, 随着  $\lambda$  的增大,  $\rho_0$  振荡范围减小(图 1(c)(d)). 将  $\rho_0, \theta = 0$  代入静态方程组(8)可得

$$\lambda_1(\rho_0(0), m) = (1 - 2\rho_0(0)) + \frac{(1 - \rho_0(0))(1 - 2\rho_0(0)) - m^2}{\sqrt{(1 - \rho_0(0))^2 - m^2}}. \quad (9)$$

$\lambda_1$  与  $\rho_0(0)$  的关系如图 5 所示. 当  $\lambda > \lambda_1(\rho_0(0), m)$  时, 随着  $\lambda$  的增大,  $\rho_0(0)$  振荡范围增大(图 1(e), (f)). 进入开放轨道后, 相对相位随时间单调减小,  $\rho_0$  振荡范围减小, 如图 1(g)(h) 所示. 图 1(c)–(f) 中  $\rho_0$  的振荡范围  $(p, q)$  与参数  $\lambda$  满足下列关系:

$$\lambda = \frac{p[1 - p + \sqrt{(1 - p)^2 - m^2}] - q[1 - q + \sqrt{(1 - q)^2 - m^2}]}{p - q}. \quad (10)$$

这里  $p$  为初始  $|0\rangle$  态布居数. 文献 [19] 研究的情况对应于图 1(a)–(f). 随着  $\lambda$  的增大, 布居数差的演化从约瑟夫森振荡现象转化为自囚禁现象, 相对相位从“连续-相模”转变为“零-相模”,  $q < \lambda = 1/3$  时, 对应的  $\lambda_c$  即为文献 [19] 中的约瑟夫森振荡现象,  $\lambda$  小于  $\lambda_c$  即文献 [19] 中的自囚禁现象. 从上述分析可知, 当初始  $\rho_0(0) < 1/3$ , 即初始布居数差小于零时, 即使  $\lambda < \lambda_c$  也不会发生自囚禁现象. 随着  $\lambda$  减小,

相对相位从“连续-相模”转变为“零-相模”, 最后又转变为“连续-相模”. 这说明在自囚禁范围内相对相位也可表现为“连续-相模”.

对于初始相位  $\theta(0) = \pi/2$ ,  $\rho_0$  和相对相位  $\theta$  的动力学演化行为与  $\theta(0) = 0$  时不同, 如图 2 所示. 参数  $\lambda$  大于  $\lambda_2(\rho_0(0), m)$  时,  $\rho_0$  在大于  $\rho_0(0)$  范围振荡. 参数  $\lambda$  小于  $\lambda_2(\rho_0(0), m)$  时,  $\rho_0$  在小于  $\rho_0(0)$  范围振荡. 将  $\rho_0, \theta = \pi/2$  代入静态方程组(8)得到

$$\lambda_2(\rho_0(0), m) = (1 - 2\rho_0(0)) - \frac{(1 - \rho_0(0))(1 - 2\rho_0(0)) - m^2}{\sqrt{(1 - \rho_0(0))^2 - m^2}}. \quad (11)$$

$\lambda_2$  与  $\rho_0(0)$  的关系如图 5 所示. 图 3(c)–(f) 中  $\rho_0$  的振荡范围  $(p, q)$  与参数  $\lambda$  满足

$$\lambda = \frac{p[(1 - p) - \sqrt{(1 - p)^2 - m^2}] - q[(1 - q) - \sqrt{(1 - q)^2 - m^2}]}{p - q}. \quad (12)$$

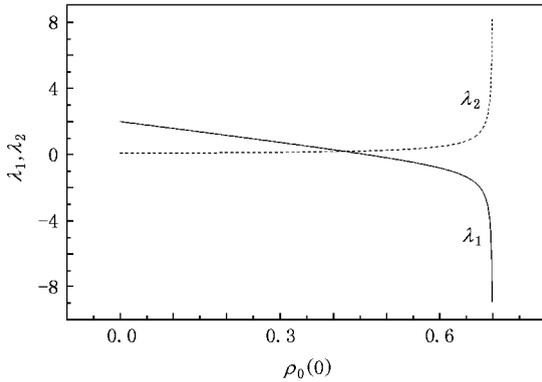


图 5  $m = 0.3$  时  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  与  $\rho_0(0)$  的关系

第二种情况是  $m = 0$ . 总哈密顿量的等能相图如图 6 所示.  $\pi/2$  相位对应的静态点只有当  $\lambda = 0$  时才出现, 即当  $\lambda = 0$  时, 初始值为  $\theta(0) = \pi/2$ , 不论  $\rho_0(0)$  取何值三个量子态上的粒子数均不随时间变化. 当  $\lambda \neq 0$ , 初始相位为  $\pi/2$  时, 不论  $\rho_0(0)$  取何值  $\rho_0$  随时间周期振荡, 相位随时间单调变化. 在  $m = 0$

的等能相图上, 不会出现围绕  $\pi/2$  的闭合轨道, 初始值  $\theta(0) \neq \pi/2$ ,  $\rho_0(0) \neq 0$  时, 粒子数和相对相位都随时间呈周期变化. 当  $\lambda < -2$  时, 没有静态点; 当  $\lambda = -2$  时, 零相位对应的静态点出现, 即  $\rho_0 = 3/2$ . 随着  $\lambda$  的增大, 零相位对应的静态点向下移动. 当  $\lambda = 0$  时, 零相位对应的不动点在  $\rho_0 = 0$  处,  $\rho_0$  的时间均值为零,  $\theta$  的时间均值为零. 当  $\lambda > 2$  时, 零相位对应的不动点消失. 图 3 给出了  $\theta(0) = 0$ ,  $\rho_0(0) = 0.45$  时  $\rho_0$  和  $\theta$  随时间演化的动力学行为,  $\rho_0$  振荡方式由  $\lambda(\rho_0(0))$  决定. 将  $\theta = 0$ ,  $m = 0$  代入静态方程组 (8) 得到

$$\lambda(\rho_0(0)) = \lambda(1 - 2\rho_0(0)). \quad (13)$$

$\lambda_1$  与  $\rho_0(0)$  的关系如图 7 所示. 当  $\lambda < \lambda(\rho_0(0))$  时,  $\rho_0$  在大于  $\rho_0(0)$  范围振荡; 当  $\lambda > \lambda(\rho_0(0))$  时,  $\rho_0$  在小于  $\rho_0(0)$  范围振荡. 图 3(c)–(f) 中的振荡范围  $(p, q)$  和参数  $\lambda$  满足

$$\lambda = \frac{2p(1 - p) - 2q(1 - q)}{q - p}. \quad (14)$$

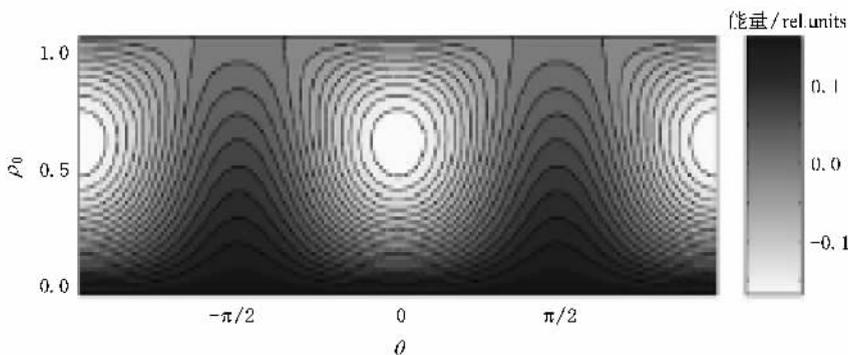


图 6  $^{87}\text{Rb}$  原子的等能相图  $B = 5.0 \times 10^{-6} \text{ T}$ ,  $|c_2 - c_4| = \pi \text{ Hz}$ ,  $m = 0$

自旋混合动力学行为不仅与参数  $\lambda$  有关, 而且与三组分的初始布居数及相对相位都有关. 初始布居数及相对相位可通过拉曼脉冲来调节. 有两种方法来控制旋量 BEC 的布居数和相对相位的动力学行为. 一种方法是初始布居数、磁化率及相位保持不变的情况下改变参数  $\lambda$ , 即通过改变凝聚体的几

何形状改变偶极相互作用, 或者通过调节外磁场改变二阶塞曼效应. 另一种方法是在保持参数  $\lambda$  不变的情况下调整布居数  $\rho_0$  和相对相位  $\theta$  的初始值<sup>[26]</sup>. 与文献 [27] 不同, 在双阱中由于初始时只有  $\alpha = \pm 1$  的粒子, 外场对隧穿的调控主要由一阶塞曼效应决定. 单阱中当初始有  $\alpha = 0$  态粒子时, 二阶塞

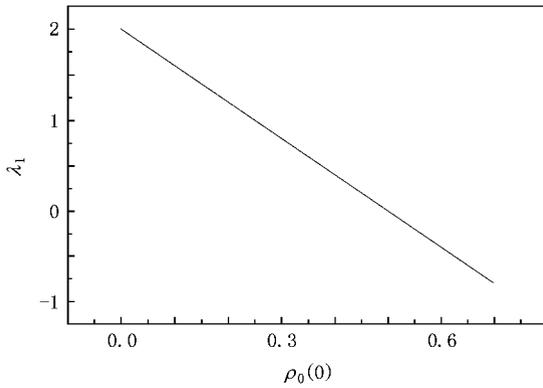


图7  $m=0$  时  $\lambda_1$  与  $\rho_0(0)$  的关系

曼效应会对  $\alpha=0$  和  $\alpha=\pm 1$  之间的隧穿产生影响,一阶塞曼效应对三组分间的隧穿不起作用.外磁场可以调控  $\alpha=0$  和  $\alpha=\pm 1$  之间的隧穿,使  $\alpha=0$  态自囚禁,控制  $\alpha=0$  态粒子数的振荡范围.隧穿情况由参数  $\lambda = (-\delta + 3c'_d) \times (2N(c'_2 - c'_d))$  和  $\lambda(\rho_0(0), \theta(0), m)$  (静态点对应的  $\lambda$ ) 决定.从哈密顿量(5)式和参数  $\lambda$  可以看出,磁偶极-偶极相互作用既有类似自旋交换相互作用的效果,又有类似于二阶塞曼效应的作用.即使在无外磁场的情况下,由于凝聚体内的非线性相互作用和磁化率守恒,  $\alpha=0$  和  $\alpha=\pm 1$  的态之间也会存在隧穿流.

## 5. 结 论

本文研究了外场作用下偶极旋量 BEC 的自旋混合动力学问题.利用原子数守恒与磁化率守恒的条件导出了运动方程,结果证明自发磁化现象由磁偶极-偶极相互作用导致.磁偶极-偶极相互作用既有类似自旋交换相互作用的效果,又有类似二阶塞曼效应的效果.可以通过调整凝聚体势阱的纵横比或外磁场,从而方便地控制其基态的磁性质.自旋混合动力学取决于自旋交换相互作用、磁偶极-偶极相互作用、二阶塞曼效应.可以通过调节外场、碰撞相互作用、偶极相互作用来实现和控制旋量 BEC 的布居动力学演化范围和相对相位动力学行为.同样,三组分间的初始布居数差和相对相位对凝聚体的动力学行为也有重要影响.布居数动力学演化范围与初始  $|0\rangle$  态的布居数和相对相位决定的参数  $\lambda$  有关.当  $\theta(0)=0$ ,  $\lambda < \lambda_1(\rho_0(0), m)$  时,  $\rho_0$  在大于  $\rho_0(0)$  范围振荡;  $\lambda > \lambda_1(\rho_0(0), m)$  时,  $\rho_0$  在小于  $\rho_0(0)$  范围振荡.当  $\theta(0)=\pi/2$ ,  $m \neq 0$ ,  $\lambda > \lambda_2(\rho_0(0), m)$  时,  $\rho_0$  在大于  $\rho_0(0)$  范围振荡;  $\lambda < \lambda_2(\rho_0(0), m)$  时,  $\rho_0$  在小于  $\rho_0(0)$  范围振荡.闭合轨道布居数的动力学演化范围与  $\lambda$  之间满足一定关系,而参数  $\lambda$  由外场、自旋相互作用、偶极-偶极相互作用所决定.

- [ 1 ] Santos L, Pfau T 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 190404
- [ 2 ] Diener R B, Ho T L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 190405
- [ 3 ] Yi S, You L, Pu H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 040403
- [ 4 ] Kawaguchi Y, Saito H, Ueda M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 130404
- [ 5 ] Pu H, Zhang W P, Meystre P 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 140405
- [ 6 ] Zhang W P, Pu H, Search C, Meystre P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 060401
- [ 7 ] Cross K, Search C P, Pu H, Zhang W P, Meystre P 2002 *Phys. Rev. A* **66** 033603
- [ 8 ] Wilson R M, Ronen S, Bohn J L, Tu H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 245302
- [ 9 ] Wang G F, Fu L B, Liu J 2008 *J. Phys.: Condens. Matter* **20** 045223
- [ 10 ] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [ 臧小飞、李菊萍、谭磊 2007 物理学报 **56** 4348 ]
- [ 11 ] Wang G F, Liu H 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 667 (in Chinese) [ 王冠芳、刘红 2008 物理学报 **57** 667 ]
- [ 12 ] Law C K, Pu H, Bigelow N P 1999 *Phys. Rev. Lett.* **81** 5257
- [ 13 ] Pu H, Law C K, Raghavan S, Eberly J H, Bigelow N P 1999 *Phys. Rev. A* **60** 1463
- [ 14 ] Pu H, Raghavan S, Bigelow N P 2000 *Phys. Rev. A* **61** 023602
- [ 15 ] Zhang W X, Zhou D L, Chang M S, Chapman M S, You L 2005 *Phys. Rev. A* **72** 013602
- [ 16 ] Saito H, Ueda M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **72** 023610
- [ 17 ] Romano D R, Passos E J V 2004 *Phys. Rev. A* **70** 043614
- [ 18 ] Chang M S, Hamley C D, Barrett M D, Sauer J A, Fortier K M, Zhang W, You L, Chapman M S 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 140403
- [ 19 ] Cheng R, Liang J Q, Zhang Y B 2005 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **38** 2569
- [ 20 ] Vanier J, Audoin C 1988 *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards* (Philadelphia: Hilger)
- [ 21 ] Ho T L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 742
- [ 22 ] Gu Q 2003 *Phys. Rev. A* **68** 025601
- [ 23 ] Yi S, Pu H 2006 *Phys. Rev. A* **73** 023602
- [ 24 ] Yi S, You L 2000 *Phys. Rev. A* **61** 041604
- [ 25 ] Giovanazzi S, Górlitz A, Pfau T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 130401

- [ 26 ] Anker T ,Albiez M ,Gati R ,Hunsmann S ,Eiermann B ,Trombettoni A ,Oberthaler M K 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 020403
- [ 27 ] Tan L ,Zang X F ,Li J P 2008 *J. Phys. Soc. Jpn.* **77** 044704

## Dynamics of dipolar spinor condensates in the external magnetic field <sup>\*</sup>

Li Ju-Ping Tan Lei<sup>†</sup> Zang Xiao-Fei Yang Ke

( *Institute of Theoretical Physics , Lanzhou University , Lanzhou 730000 , China* )

( Received 25 April 2008 ; revised manuscript received 3 June 2008 )

### Abstract

The equilibrium populations and the coherent off-equilibrium spin mixing with dipole-dipole interaction dynamics in an external magnetic field are investigated. By adjusting the external magnetic field , spin-exchange interaction and the aspect ratio of the potential well we can control the tunneling of the hyperfine components , the oscillation of the populations and the relative phases.

**Keywords** : Bose-Einstein condensation , dipole-dipole interaction , spin-mixing dynamics

**PACC** : 0530J , 2110H

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China( Grant No. 10704031 ) , the National Talents Training Foundation of Basic Science , China( Grant No. J0730314 ) and the Natural Science Foundation of Gansu Province , China( Grant No. 3ZS061-A25-035 ).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail tanlei@lzu.edu.cn