

# 单向耦合映象格子的时空混沌同步\*

吕翎† 李钢 柴元

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2008 年 3 月 10 日收到, 2008 年 7 月 11 日收到修改稿)

以耦合映象格子为对象, 研究了时空混沌系统的同步问题. 基于 Lyapunov 稳定性定理, 通过恰当地选择驱动函数, 实现了两个单向耦合映象格子的完全同步. 仿真模拟验证了这种同步方法的有效性. 讨论了控制参量对同步速率的影响. 仿真模拟还表明, 在存在系统偏差并受到噪声影响的情况下, 仍然可以实现两系统的同步, 这种同步方法具有一定的抗干扰能力.

关键词: 时空混沌, 同步, 耦合映象格子

PACC: 0545

## 1. 引言

时空耦合映象格子是一个时间空间离散化, 但状态变量仍保持连续的动力学系统<sup>[1]</sup>. 与其他类型的时空混沌系统相比较, 耦合映象格子不但相对简单易计算, 而且其本身能够呈现极丰富的时空混沌动力学行为, 因此它是理论上描述时空混沌系统最常见的一种形式, 被广泛应用于时空混沌、控制和同步研究之中. 虽然研究耦合映象格子这样的时空混沌系统的同步问题与时间混沌系统的同步问题相比较更加困难, 但由于它在物理、信息通信以及自动控制等领域有重大的应用前景而更具挑战性和实际意义, 所以近年来时空混沌系统的同步研究引起了人们极大的兴趣. Rulkov 等<sup>[2]</sup>利用驱动系统和响应系统状态变量之间的线性耦合完成了时空混沌系统之间的广义同步. 胡岗等<sup>[3]</sup>提出了一种利用单向耦合映象格子同步系统的码分多址扩频通信和信息存储方案. 张旭等<sup>[4]</sup>利用单向耦合法实现了一维耦合映象格子的恒等同步. 文献[5, 6]利用变量耦合法实现了神经网络的时空混沌同步. 与时间混沌同步<sup>[7-15]</sup>相比较, 有关时空混沌同步的研究目前文献报道相对较少, 而且同步方法也较为单一. 另外, 由于时空混沌系统的同步具有更大的应用潜力, 因此时空混沌系统同步新方法的研究便十分必要.

本文以耦合映象格子为对象, 研究了时空混沌系统的同步问题. 基于 Lyapunov 稳定性定理, 通过选择恰当的驱动函数, 实现了两个单向耦合映象格子的完全同步. 仿真模拟验证了这种同步方法的有效性. 进一步讨论了控制参量对同步速率的影响. 仿真模拟还表明, 当存在系统偏差并受到噪声影响的情况下仍然可以实现两系统的同步, 说明这种同步方法具有一定的抗干扰能力.

## 2. 同步原理

首先, 我们采用单向耦合映象格子来说明本文提出的同步原理. 单向耦合映象格子的动力学方程可以表示为<sup>[1]</sup>

$$x_{n+1}(i) = (1 - \epsilon)f(x_n(i)) + \epsilon f(x_n(i-1)). \quad (1)$$

这里  $x_n(i)$  为系统的状态变量,  $n$  为离散化时间,  $i$  为空间离散点坐标 ( $i = 1, 2, \dots, L$ ), 其中  $L$  为系统尺寸;  $\epsilon$  为系统空间离散点间的耦合强度因子; 局域函数  $f(x_n(i))$  取 Logistic 映象,

$$f(x_n(i)) = 1 - ax_n^2(i), \quad (2)$$

式中  $a$  为参量. 取系统尺寸  $L = 100$ , 初始值  $x_0(i) = 0.6$ , 系统参量取  $\epsilon = 0.1$ ,  $a = 2.0$ , 单向耦合映象格子动力学方程 (1) 在  $i = 1, 2, \dots, L$  格点上的最大 Lyapunov 指数如图 1 所示. 由图 1 可见, 其 Lyapunov

\* 辽宁省自然科学基金(批准号 20082147)和辽宁省教育厅创新团队计划资助的课题.

† E-mail: luling1960@yahoo.com.cn

指数均为正值,表明系统处于混沌状态,相应的时空演化如图 2 所示. 局域函数(2)式的最大 Lyapunov 指数以及分岔图如图 3、图 4 所示.

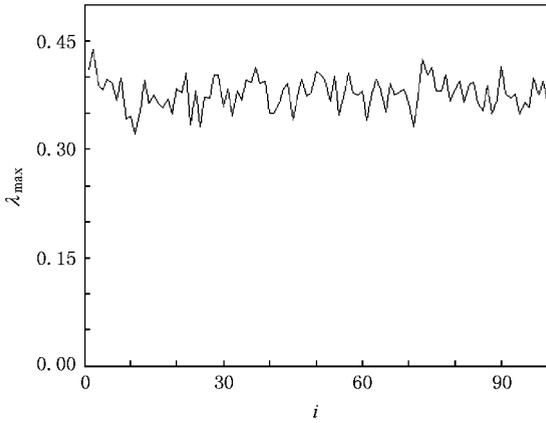


图 1 系统(1)的最大 Lyapunov 指数谱

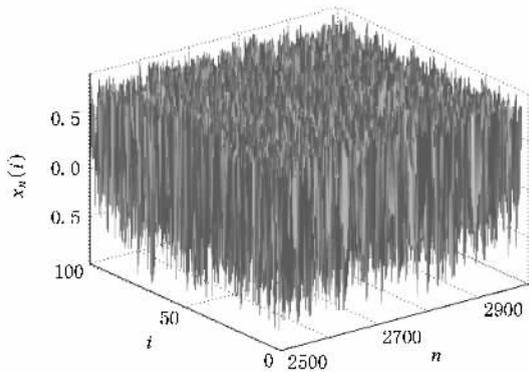


图 2 系统(1)的时空演化

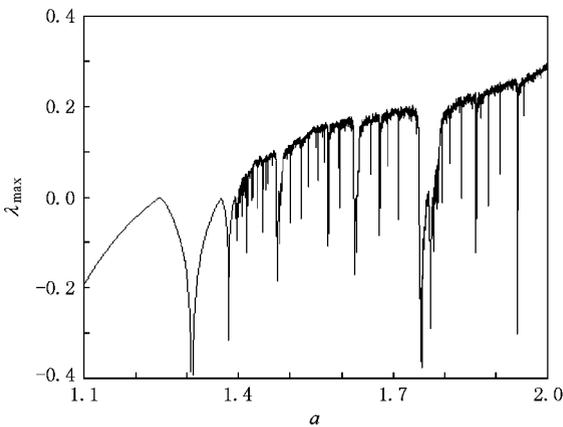


图 3 局域函数(2)式的最大 Lyapunov 指数谱

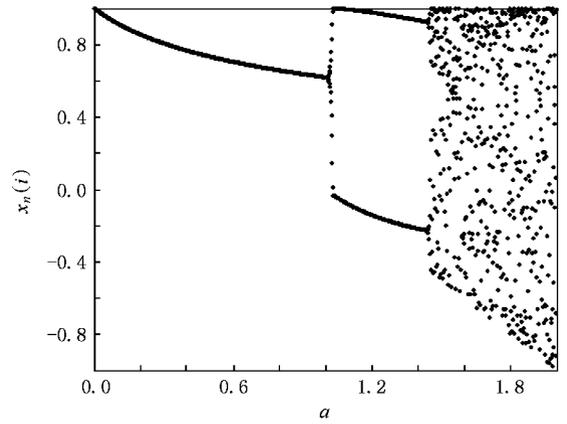


图 4 局域函数(2)式的分岔图

式中  $m$  为控制参数,  $H(x_n(i))$  为选取的驱动函数,

$$H(x_n(i)) = -mx_n(i) + (1 - \epsilon)[1 - ax_n^2(i)] + \epsilon[1 - ax_n^2(i-1)]. \quad (4)$$

构造系统(3)的一个复制系统作为响应系统,即

$$y_{n+1}(i) = my_n(i) + H(x_n(i)). \quad (5)$$

定义系统(3)和系统(5)的状态变量之间的误差

$$e_n(i) = x_n(i) - y_n(i). \quad (6)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V = |e_n(i)|, \quad (7)$$

则  $V$  的微分可以写成

$$\begin{aligned} \Delta V &= |e_{n+1}(i)| - |e_n(i)| \\ &= |x_{n+1}(i) - y_{n+1}(i)| - |e_n(i)| \\ &= |[mx_n(i) + H(x_n(i))] \\ &\quad - [my_n(i) + H(x_n(i))]| - |e_n(i)| \\ &= |me_n(i)| - |e_n(i)| \\ &= (|m| - 1)|e_n(i)|. \end{aligned} \quad (8)$$

由(8)式容易看出,只要取  $|m| \leq 1$ , 则必有

$$\Delta V \leq 0. \quad (9)$$

根据 Lyapunov 稳定性定理<sup>[16]</sup>, 此时系统(5)与系统(3)达到完全同步.

### 3. 仿真模拟

系统的参量取  $\epsilon = 0.1$ ,  $a = 2.0$ ,  $L = 100$ , 状态变量的初始值  $x_0(i) = 0.6$ ,  $y_0(i) = 0.3$ , 在 2500 步开始施加同步控制, 两系统的误差变量  $e_n(i)$  在控制参量  $m = 0.5$  时的时空演化如图 5 所示. 控制参量  $m = -0.8$  时的同步结果如图 6 所示. 由此可以看出, 施加同步控制后误差变量  $e_n(i)$  随着时空演化

取系统(1)作为目标系统, 并将其改写为

$$x_{n+1}(i) = mx_n(i) + H(x_n(i)), \quad (3)$$

迅速趋于零,两个时空耦合映象格子达到完全同步.

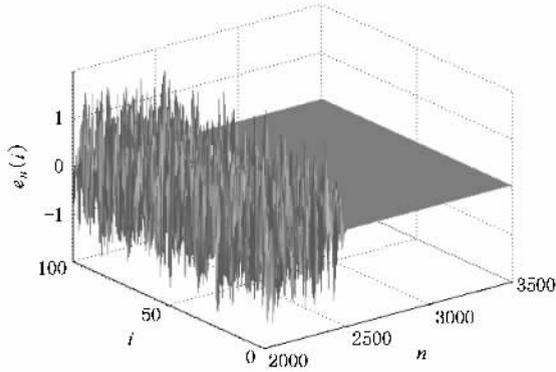


图5  $m = 0.5$  时误差变量  $e_n(i)$  随时空的演化

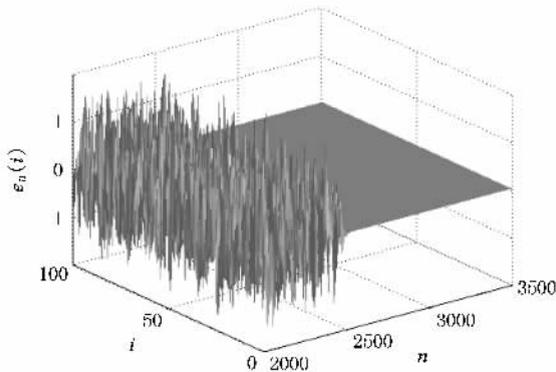


图6  $m = -0.8$  时误差变量  $e_n(i)$  随时空的演化

取误差变量  $e_n(i)$  的整体误差

$$e_a = \sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^L \|e_n(i)\|^2}$$

可以更加清楚地看出误差逐渐变小的过程以及同步效果. 图7显示了控制参量  $m = 0.5$  以及  $m = -0.8$  时  $e_n(i)$  的整体误差. 图7清楚地反映出在2500步施加同步控制后,  $e_n(i)$  的整体误差均迅速降到零,

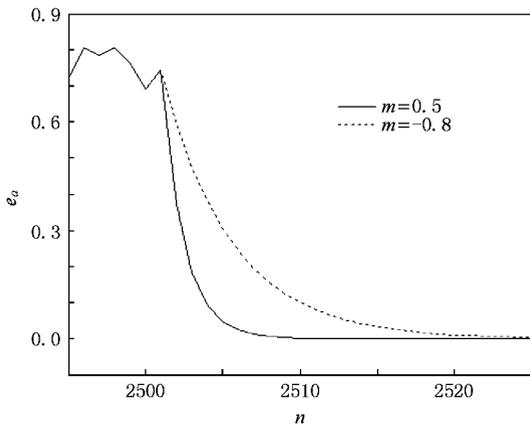


图7  $e_n(i)$  的整体误差

不出现误差信号陡然上升或激烈振荡等无规振荡行为. 另外,由图7还可以看出,控制参量  $m$  对同步速率有一定影响. 在目标系统和响应系统参量选择以及所有模拟数据保持不变的情况下,控制参量  $m$  的取值不同,同步速率将不同.

通常情况下,实际的混沌系统不可避免地存在系统偏差并受到噪声的干扰. 因此,一种同步方法的优劣不但要看其在应用中的简易方便程度,还要检验其抗系统偏差以及抗噪声的能力. 这里我们令目标系统(3)和响应系统(5)的参量  $\epsilon, a$  分别存在 0.001 的相对偏差,同时在系统(3)和系统(5)的状态变量进行同步时加入随机噪声,其值在 0.002 之间. 以控制参量  $m = 0.5$  为例,分别仿真模拟存在系统偏差、加入随机噪声以及系统偏差和随机噪声同时存在时的同步情况,结果如图8—图10所示. 由图8—图10可以清楚地看出,在系统存在偏差、受到噪声影响以及系统偏差和噪声同时存在的情况下两系统均能实现同步,可见这种同步方法具有一定的抗系统偏差以及抗噪声的能力.

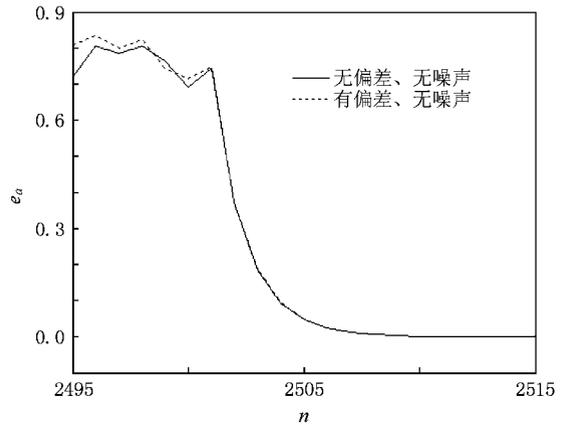


图8 存在系统偏差时  $e_n(i)$  的整体误差

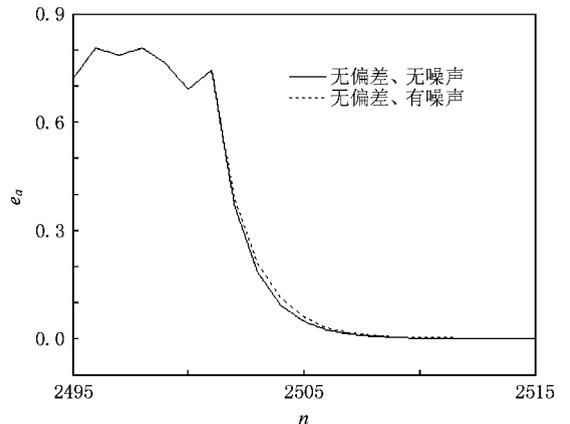


图9 存在噪声时  $e_n(i)$  的整体误差

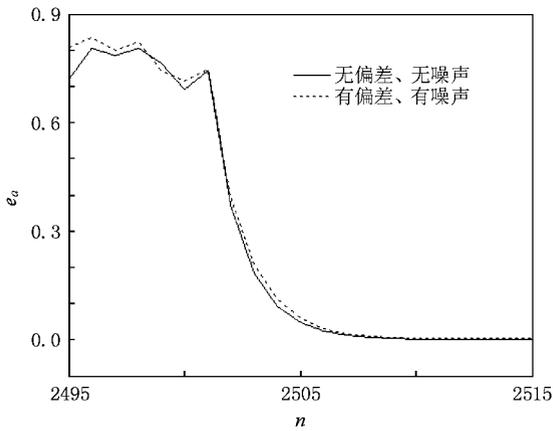


图 10 系统偏差和噪声同时存在时  $e_n(i)$  的整体误差

## 4. 结 论

研究了时空混沌系统之间的同步问题. 通过选取恰当的驱动函数实现了两个单向耦合映象格子之间的时空混沌同步. 基于 Lyapunov 稳定性定理, 确定了驱动函数的具体表达式. 仿真模拟结果显示, 通过调节控制参量  $m$ , 目标系统和响应系统可以达到完全同步, 两系统状态变量随时空的演化轨迹完全一致, 并且误差变量经过短暂的时空序列以后始终平稳地趋于零. 通过研究存在系统偏差并受到噪声影响情况下系统的同步效果, 表明这种同步方法具有一定的抗系统偏差以及抗噪声的能力.

- [ 1 ] Raparal R 1985 *Phys. Rev. A* **31** 3868
- [ 2 ] Rulkov N F, Sushchik M M, Tsimring L S, Abarbanel H D I 1995 *Phys. Rev. E* **51** 980
- [ 3 ] Hu G, Xiao J H, Yang J Z, Xie F G, Qu Z L 1997 *Phys. Rev. E* **56** 2738
- [ 4 ] Zhang X, Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2702 ( in Chinese ) [ 张旭、沈柯 2002 物理学报 **51** 2702 ]
- [ 5 ] Emura T 2006 *Phys. Lett. A* **349** 306
- [ 6 ] Brandt S, Dellen B K, Wessel R 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 34104
- [ 7 ] Tsimring L S, Rulkov N F, Larsen M L, Gabbay M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 14101
- [ 8 ] Lü L, Guo Z A, Zhang C 2007 *Chin. Phys.* **16** 1603
- [ 9 ] Min F H, Wang Z Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6238 ( in Chinese ) [ 闵富红、王执铨 2007 物理学报 **56** 6238 ]
- [ 10 ] Chen L Q 2004 *Chaos Solitons Fract.* **19** 1239
- [ 11 ] Lü L, Luan L, Guo Z A 2007 *Chin. Phys.* **16** 346
- [ 12 ] Tao C H, Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5058 ( in Chinese ) [ 陶朝海、陆君安 2005 物理学报 **54** 5058 ]
- [ 13 ] Yu H J, Liu Y Z 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3029 ( in Chinese ) [ 于洪洁、刘延柱 2005 物理学报 **54** 3029 ]
- [ 14 ] Li S H, Cai H X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 1687 ( in Chinese ) [ 李世华、蔡海兴 2004 物理学报 **53** 1687 ]
- [ 15 ] Tao C H, Lu J A, Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 ( in Chinese ) [ 陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497 ]
- [ 16 ] Lü L 2000 *Nonlinear Dynamics and Chaos* ( Dalian : Dalian Publishing House ) ( in Chinese ) [ 吕翎 2000 非线性动力学与混沌 ( 大连 : 大连出版社 ) ]

# The synchronization of spatiotemporal chaos of unilateral coupled map lattice <sup>\*</sup>

Lü Ling<sup>†</sup> Li Gang Chai Yuan

( *College of Physics and Electronic Technology , Liaoning Normal University , Dalian 116029 , China* )

( Received 10 March 2008 ; revised manuscript received 11 July 2008 )

## Abstract

Coupled map lattices are taken as examples to study synchronization of spatiotemporal chaotic systems. Based on Lyapunov stability theory , global synchronization of two unilateral coupled map lattices is realized through appropriate choice of driving functions . Simulation results show the effectiveness of the method . The effect of control parameters on the rate of synchronization is further discussed . Simulation results also show that synchronization can also be realized when there is a systematic bias and system noise , which shows that the method has certain anti-jamming capability .

**Keywords** : spatiotemporal chaos , synchronization , coupled map lattice

**PACC** : 0545

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Natural Science Foundation of Liaoning Province , China ( Grant No. 20082147 ) and the Innovative Research Team Program of the Education Bureau of Liaoning Province , China .

<sup>†</sup> E-mail : luling1960@yahoo.com.cn