

基于 Lyapunov 方程的分数阶混沌系统同步^{*}

胡建兵[†] 韩 焱 赵灵冬

(中北大学仪器科学与动态测试教育部重点实验室, 电子测试技术国家重点实验室, 太原 030051)

(2008 年 4 月 7 日收到, 2008 年 7 月 18 日收到修改稿)

对阶次小于 1 的分数阶系统提出了基于 Lyapunov 方程的系统稳定性判定理论. 将该理论应用于分数阶混沌系统的同步, 实现了未知参数的分数阶 Lorenz 混沌系统的自适应同步. 仿真结果证实了该理论的正确性.

关键词: 分数阶混沌系统, 同步, Lyapunov 方程, 自适应

PACC: 0545

1. 引 言

分数阶微分方程是指微分阶次可以是任意的或者是分数的方程, 它扩展了整数阶微分方程的描述能力, 是整数阶微分方程的推广. 分数阶微分方程不仅为研究提供了新的数学工具, 而且为系统提供了更完善的数学模型. 一方面, 在自然界及许多科学技术领域中存在大量的自相似于整数阶微积分动力学描述的分数维现象^[1], 另一方面, 在生物分子工程、细胞组织工程和神经网络工程的一些新兴领域^[2], 用传统的微分方程为动态系统建模的方法存在很大局限性, 分数阶微积分可以提供一种线性运算模型, 往往能取得比较满意的效果.

混沌理论由于其在信息、生物、物理、化学等领域具有潜在的应用价值而得到了广泛研究^[3,4], 这些研究主要集中于整数阶混沌系统. 然而实际的系统通常是以分数阶形式存在的, 整数阶混沌系统是对实际混沌系统的理想化处理, 因此研究分数阶混沌系统更具有普遍意义和实用性.

近年来, 混沌同步问题得到了广泛研究. 基于 Lyapunov 稳定理论, 人们提出了多种整数阶混沌系统的同步方法^[5,6], 但分数阶混沌系统通常不便于直接构造 Lyapunov 函数, 对其同步方法的研究也远不如对整数阶混沌同步方法的研究那么充分. 对于分数阶混沌同步方法, 目前采用较多的一种是将分数阶混沌系统近似化为整数阶系统来处理^[7,8], 但由于

混沌系统具有初值和参数敏感性, 所以这种近似在实际应用中可能难以达到预期的效果. 另一种方法是通过控制系统的系数矩阵的特征值使其在一定范围内实现控制^[9-12], 但是非线性系统的系数矩阵通常是含有变量的非定常矩阵, 很难求出其特征值. 鉴于此, 一些文献提出通过设计控制器使系统的系数矩阵成为定常矩阵^[13,14]的方法, 这种方法虽然能达到一定的效果, 但控制代价较大, 当系统的参数未知时该方法又往往无能为力.

本文针对上述分数阶混沌系统同步方法中存在的不足, 提出了根据 Lyapunov 方程判定分数阶混沌系统稳定的理论. 该理论指出, 当分数阶混沌系统的阶次小于 1 时(本文中分数阶系统阶次都小于 1), 如果根据分数阶混沌系统的系数矩阵能构造出 Lyapunov 方程则该分数阶混沌系统渐近稳定. 对于两个分数阶混沌系统的同步误差方程而言, 如果也能根据误差方程的系数矩阵构造出 Lyapunov 方程, 则同步误差也渐近稳定, 即两系统实现了同步. 该理论的成立为多种整数阶混沌同步方法应用于分数阶混沌系统奠定了理论基础.

2. 分数阶系统稳定理论

对于一般的分数阶混沌系统(如 Lorenz 分数阶混沌系统、Rössler 分数阶混沌系统等)都可以表示成如下形式:

$$\frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} = A(X)X, \quad (1)$$

^{*} 国家自然科学基金(批准号: 60372073)资助的课题.

[†] E-mail: hjb@nuc.edu.cn

式中 $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为系统状态变量, $A(X)$ 为包含变量的系数矩阵. 为使混沌系统(1)稳定, 设计控制项 $u(t)$, 受控系统应为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha X}{dt^\alpha} &= A(X)X - u(t) \\ &= A'(X)X. \end{aligned} \quad (2)$$

文献 [15] 给出了受控分数阶系统(2)稳定的充要条件.

引理 对受控分数阶混沌系统(2), 如果系数矩阵 $A'(X)$ 的任意特征值 λ 满足 $|\arg(\lambda)| > \frac{\alpha\pi}{2}$, 则受控系统渐近稳定.

阶次为 α 的分数阶系统的稳定性区域如图 1 所示. 很明显, 如果 $\alpha < 1$, 无论状态变量为何值, 只要使含有状态变量的系数矩阵 $A'(X)$ 的所有特征值实部都不大于零, 则分数阶受控系统(2)渐近稳定. 然而由于 $A'(X)$ 通常含有状态变量, 不便于直接计算其特征值, 难以根据特征值直接判断系统是否稳定.

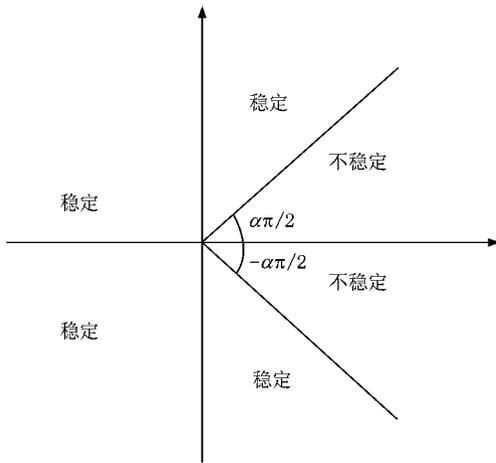


图 1 分数阶系统的稳定区间

针对上述问题, 本文提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶混沌系统(阶数小于 1)的稳定判定定理.

定理 1 对于分数阶受控系统(2), 当阶数 $\alpha < 1$ 时, 如果控制项 $u(t)$ 能使分数阶受控系统(2)的系数矩阵 $A'(X)$ 满足 Lyapunov 方程, 即存在实对称正定矩阵 P 、半正定矩阵 Q , 使得方程 $A'(X)P + P(A'(X))^H = -Q$ 对于任意的状态变量 X 恒成立, 则分数阶受控系统(2)渐近稳定.

证明 如果矩阵 $A'(X)$ 满足 Lyapunov 方程, 只需证明 $A'(X)$ 的所有特征值实部都不大于零, 根据引理即可判定分数阶受控系统(2)稳定.

令 λ 为 $A'(X)$ 的任意一个特征值, 则存在非零向量 ξ 为其对应的特征向量. 于是可得

$$A'(X)\xi = \lambda\xi. \quad (3)$$

对(3)式等号两边取共轭转置得

$$\overline{(A'(X)\xi)^H} = \overline{\lambda} \xi^H. \quad (4)$$

(3)式左乘 $\xi^H P$ 与(4)式右乘 $P\xi$ 相加得

$$\xi^H (PA'(X) + (A'(X))^H P)\xi = (\lambda + \overline{\lambda})\xi^H P\xi. \quad (5)$$

由于

$$A'(X)P + P(A'(X))^H = (A'(X)P + P(A'(X))^H)^H. \quad (6)$$

故矩阵 $A'(X)P + P(A'(X))^H$ 为厄米特矩阵. 这里 P 为实对称正定阵. 由条件 $A'(X)P + P(A'(X))^H = -Q$ (Q 为半正定矩阵)可知, 矩阵 $A'(X)P + P(A'(X))^H$ 为半负定矩阵. 根据半负定矩阵和正定矩阵的性质, 对任意非零向量 ξ 有

$$\xi^H (PA'(X) + (A'(X))^H P)\xi = \xi^H (-Q)\xi \leq 0, \quad (7)$$

$$\xi^H P\xi > 0. \quad (8)$$

因而

$$\begin{aligned} (\lambda + \overline{\lambda})\xi^H P\xi &= \xi^H (-Q)\xi / \xi^H P\xi \\ &\leq 0, \end{aligned} \quad (9)$$

即系数矩阵 $A'(X)$ 的任意特征值 λ 都满足

$$|\arg(\lambda)| \geq \frac{\pi}{2} > \frac{\alpha\pi}{2} \quad (\alpha < 1).$$

根据引理可知, 分数阶受控系统(2)渐近稳定. 定理 1 得证.

3. 参数未知的分数阶 Lorenz 混沌系统自适应同步

分数阶 Lorenz 混沌系统具有如下的形式:

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha z}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & -x \\ 0 & x & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \quad (10)$$

文献 [16] 研究了该系统的非线性动力学行为, 指出当阶数 $\alpha = 0.96$, 参数 $a = 10, b = 8/3, c = 28$ 时, 系统具有如图 2 所示的复杂混沌吸引子.

下面讨论当系统的参数未知时如何实现同步. 假定分数阶驱动混沌系统为

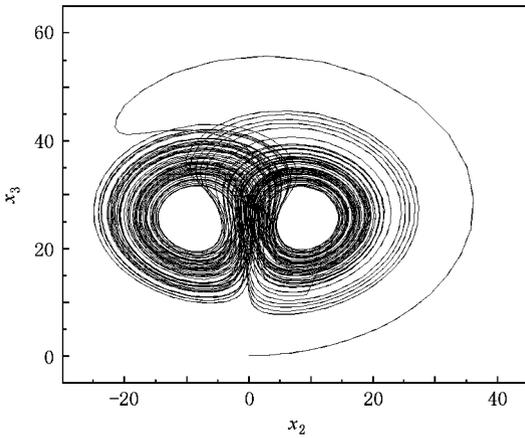


图2 分数阶 Lorenz 系统混沌吸引子 $\alpha = 0.96, a = 10, b = 8/3, c = 28$

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha x_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha x_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha x_3}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ b & -1 & -x_1 \\ 0 & x_1 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

式中系统参数 a, b, c 未知. 分数阶响应混沌系统为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha y_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha y_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha y_3}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{a} & \tilde{a} & 0 \\ \tilde{b} & -1 & -y_1 \\ 0 & y_1 & \tilde{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} - u(t), \quad (12)$$

式中参数 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ 分别为驱动系统中未知参数 $a,$

b, c 的参数估计. 定义参数估计误差为

$$\begin{aligned} e_a &= \tilde{a} - a, \\ e_b &= \tilde{b} - b, \\ e_c &= \tilde{c} - c. \end{aligned} \quad (13)$$

其同步误差方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_a}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_b}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_c}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\tilde{a} & \tilde{a} & 0 & -x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ \tilde{b} - x_3 - 1 - y_1 & 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & y_1 & \tilde{c} & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} - u(t). \quad (14)$$

设计响应系统的控制项 $u(t)$ 如下:

$$u(t) = \begin{bmatrix} -\tilde{a} + 1 & \tilde{a} + \tilde{b} - x_3 & x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c} + 1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 + x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix}. \quad (15)$$

实际上,设计的控制器 $u(t)$ 不仅包含了控制项还隐含了参数自适应规则. 将该控制器用于分数阶误差系统

$$\begin{bmatrix} \frac{d^\alpha e_1}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_2}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_3}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_a}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_b}{dt^\alpha} \\ \frac{d^\alpha e_c}{dt^\alpha} \end{bmatrix} = A'(X, Y) \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -(\tilde{b} - x_3) - x_2 & -x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ \tilde{b} - x_3 & -1 & -y_1 & 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & y_1 & -1 & 0 & 0 & x_3 \\ -(-x_1 + x_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_a \\ e_b \\ e_c \end{bmatrix}. \quad (16)$$

误差系统 (16) 的系数矩阵 $A'(X, Y)$ 可表示为

$A'(X, Y)$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -(\tilde{b} - x_3) - x_2 & -x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ \tilde{b} - x_3 & -1 & -y_1 & 0 & x_1 & 0 \\ x_2 & y_1 & -1 & 0 & 0 & x_3 \\ -(-x_1 + x_2) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -x_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

定理 2 矩阵 $A'(X, Y)$ 满足 Lyapunov 方程, 即存在正定矩阵 P 和半正定矩阵 Q , 使得方程

$$A'(X, Y)P + P(A'(X, Y))^H = -Q$$

对于任意的状态变量 X, Y 恒成立.

证明 令正定矩阵 P 为

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

则

$$\begin{aligned} & A'(X, Y)P + PA'^T(X, Y) \\ &= - \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \\ &= -Q, \end{aligned} \quad (19)$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

显然矩阵 Q 为半正定, 故矩阵 $A'(X, Y)$ 满足 Lyapunov 方程. 定理 2 得证.

根据定理 1, 分数阶同步误差系统 (16) 渐近稳定, 即分数阶混沌系统 (11) 和分数阶混沌系统 (12) 实现了同步.

基于改进的 Adams-Bashforth-Moulton 理论^[16], 文献 [17] 提出了分数阶混沌系统仿真算法. 用该算法进行仿真, 仿真时设 $\alpha = 0.96$, 选择驱动系统的未知参数 $a = 10, b = 8/3, c = 28$, 初始值 $x_1 = 0.1, x_2 = 0.1, x_3 = 0.1, y_1 = 2.1, y_2 = 1.1, y_3 = 0.11, \hat{a} = 2.1, \hat{b} = 1.1, \hat{c} = 0.1$, 得到的仿真结果如图 3、图 4 所示. 仿真结果表明实现了两分数阶混沌系统的同步, 并实现了未知参数的辨识.

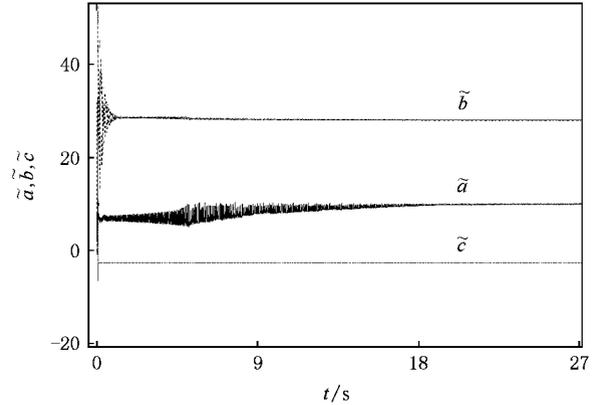


图 3 参数 a, b, c 的估计 $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$ 随时间的演化

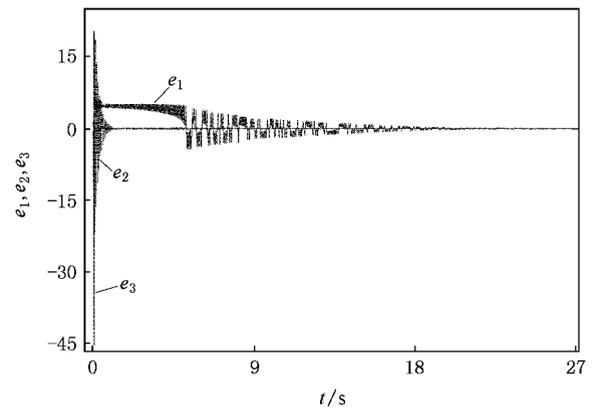


图 4 同步误差 e_1, e_2, e_3 随时间的演化

4. 结 论

本文提出了基于 Lyapunov 方程的分数阶系统稳定性理论. 基于该理论, 分数阶混沌系统的同步问题可以得到简化. 这为多种分数阶系统同步方法打下了理论基础, 具有较大的理论意义和应用价值.



- [1] Mandelbort B B 1983 *The Fractal Geometry of Nature* (New York : Freeman)
- [2] Magin R L 2004 *Crit. Rev. Biomed. Eng.* **32** 193
- [3] Wang Y W , Guan Z H , Xiao J W 2004 *Chaos* **14** 199
- [4] Huang L , Feng R , Wang M 2004 *Phys. Lett. A* **32** 271
- [5] Ning D , Lu J A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4590 (in Chinese) [宁 娣、陆君安 2005 物理学报 **54** 4590]
- [6] Zhang X , Shen K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2702 (in Chinese) [张 旭、沈 柯 2002 物理学报 **51** 2702]
- [7] Chen X R , Liu C X , Wang F Q , Li Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1416 (in Chinese) [陈向荣、刘崇新、王发强、李永勋 2008 物理学报 **57** 1416]
- [8] Mohammad S T , Mohammad H 2008 *Physica A* **387** 57
- [9] Liu C X , Liu T , Liu L , Liu K 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 1031
- [10] Li G H , Xu D M , Zhou S P 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 379 (in Chinese) [李国辉、徐得名、周世平 2004 物理学报 **53** 379]
- [11] Li A , Chen G R 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 549
- [12] Yan J P , Li C P 2007 *Chaos Solitons Fract.* **32** 725
- [13] Tan W , Wang Y N , Zeng Z F , Huang D , Zhou S W 2004 *Chin. Phys.* **13** 459
- [14] Zhang C F , Gao J F , Xu L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5124 (in Chinese) [张成芬、高金峰、徐 磊 2007 物理学报 **56** 5124]
- [15] Matignon D 1996 *IMACS-SMC Proceedings* (Lille : IEEE) p963
- [16] Yan J P , Li C P 2004 *Chaos Solitons Fract.* **22** 443
- [17] Wang J W , Xiong X H , Zhang Y B 2006 *Physica A* **370** 279

Synchronizing fractional chaotic systems based on Lyapunov equation *

Hu Jian-Bing[†] Han Yan Zhao Ling-Dong

(Key Laboratory of Instrumentation Science and Dynamic Measurement of Ministry of Education , State Key Laboratory for Electronic Measurement Technology , North University of China , Taiyuan 030051 , China)

(Received 7 April 2008 ; revised manuscript received 18 July 2008)

Abstract

This paper advances a theory of stability identification based on Lyapunov equation for fractional system whose order is not higher than 1. The theory is successfully applied to synchronize fractional Lorenz chaotic systems with uncertain parameters. Numerical simulation certifies validity of the theory.

Keywords : fractional chaotic system , synchronizing , Lyapunov equation , adaptive

PACC : 0545

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60372073).

[†] E-mail: hjb@nuc.edu.cn