

# 具有带头鼓掌者的掌声同步

孙永征<sup>1)†</sup> 阮 炯<sup>2)</sup> 李 望<sup>3)</sup>

1) 中国矿业大学理学院, 徐州 221008)

2) 复旦大学数学科学学院, 上海 200433)

3) 中国矿业大学计算机学院, 徐州 221008)

(2008 年 3 月 25 日收到, 2008 年 7 月 17 日收到修改稿)

研究了具有带头鼓掌者的掌声同步问题, 在掌声传播的时滞对观众有无明显影响的两种情形下给出了掌声同步的充分条件. 理论结果不仅说明了人们日常生活中观察到的现象: 在上座率高的剧场内更容易听到有节奏的掌声, 而且也得到了一个与人们直觉不同的结论: 即使在很大的剧场内一位带头鼓掌者就足以带领所有观众以相同的节奏鼓掌. 仿真示例验证了理论结果的正确性.

关键词: 同步, 时滞, 稳定性

PACC: 0565, 0175

## 1. 引 言

在物理系统和生物系统中存在着大量的同步现象, 如挂在同一个横梁上的两个钟摆同步摆动、停在同一棵树上的萤火虫同步发光、位于同一河岸上的青蛙齐鸣等. 在社会系统中也有许多同步现象, 如长期居住或工作在一起的妇女的月经周期会趋于一致、在一个精彩的节目表演结束后观众会爆发出雷鸣般的掌声, 在很短的时间内观众会同步地鼓掌. 虽然关于同步问题的研究最早可追溯到 Huygens 时代, 但混沌同步<sup>[1-8]</sup>、复杂网络的同步<sup>[9, 10]</sup>、智能体的同步<sup>[11, 12]</sup>仍然是最近研究的热点. 近十几年来生物、物理、数学、计算机和控制领域的学者从各自领域的角度对同步问题作了深入研究.

Néda 等在文献[13]中给出了掌声同步时周期加倍的实验结论. 随后在文献[14]中 Néda 等借助 Kuramoto 模型将掌声同步的问题转化成相同步问题, 从非线性动力学的观点阐述了观众掌声产生同步的机理, 给出了掌声同步时耦合强度的临界值. 但 Kuramoto 模型是典型的相同步模型没有考虑周期的变化, 对问题进行了过分简化, 并且文献[14]考虑的是全局相耦合. 在文献[15]中 Néda 等考虑了随机因素的影响以及观众之间的耦合是局部耦合, 给出了掌声同步的模型. 文献[16]建立了掌声同步的涌现

模型, 利用计算机仿真给出了掌声同步的基本判据. 文献[17]研究了同步掌声的合成问题.

为了提升剧场的气氛, 一些大型表演会预先安排一些观众带头鼓掌. 另外, 由于声音的速度为 340 m/s, 如果剧场上座率高相邻观众间的距离很小, 此时不需要考虑声音传播的时滞. 否则, 如果剧场很大且上座率不高时相邻观众间的距离可能有十几米, 声音传播的时滞就不能忽略. 文献[13-17]没有考虑有带头鼓掌者以及有掌声传播时滞影响的掌声同步问题. 本文构建了掌声同步的新模型, 考虑了具有带头鼓掌者的掌声同步问题, 并且观众之间的耦合是局部的. 针对有时滞和无时滞的两种情形给出了掌声同步的充分条件. 本文的分析结果从理论上说明了人们日常生活中观察到的现象: 在上座率高的剧场内观看精彩节目时更容易听到有节奏的掌声. 同时, 也给出一个与人们直觉不同的结论: 如果节目很精彩、上座率很高, 即使在很大的剧场内一位带头鼓掌者就足以带领所有的观众以相同的节奏鼓掌.

## 2. 基础知识

为了研究掌声同步, 需要用到一些图论和矩阵分析中的概念及结论.

在研究因大量个体的相互作用而形成同步的问题时, 通常将每个个体看作网络中的一个节点. 设网

† E-mail: 071018027@fudan.edu.cn

络上有  $n$  个节点,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  表示节点集,  $E \subseteq V \times V$  表示边的集合,  $(i, j)$  表示从节点  $i$  到节点  $j$  的边, 若节点  $i$  和节点  $j$  之间有连接, 即  $(i, j) \in E$  则  $a_{ij} = 1$ , 否则  $a_{ij} = 0$ . 同时规定  $a_{ii} = 0$ , 邻接矩阵  $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$  表示网络的拓扑结构. 这样, 网络上节点间的耦合关系就可以用一个简单图  $G = (V, E, A)$  来表示. 如果存在一条从节点  $i$  到节点  $j$  的边, 则称节点  $j$  是节点  $i$  的邻居节点, 节点  $i$  的邻居节点集表示为

$$N_i = \{j \in V \mid (i, j) \in E\}.$$

对于序列  $i_0, i_1, \dots, i_f$ , 如果  $(i_{j-1}, i_j) \in E, \forall j = 1, 2, \dots, f$  是  $G$  中的一条边, 则称序列  $i_0, i_1, \dots, i_f$  是  $G$  中的一条路径.

定义 1<sup>[18]</sup> 如果图  $G$  的任意两个节点间都存在一条路径, 则图  $G$  称为是强连通的.

对于有向加权图  $G$ , 任意节点  $i$  的入度  $k_{in}(i) = \sum_{j=1}^n a_{ji}$ , 出度  $k_{out}(i) = \sum_{j=1}^n a_{ij}$ . 节点  $i$  的出度等于其邻居节点的个数, 记  $\Delta_{ii} = k_{out}(i)$ , 则对角矩阵  $\Delta = \text{diag}(\Delta_{ii})$  为图  $G$  的度矩阵,  $L = \Delta - A$  为图  $G$  的 Laplace 矩阵.

引理 1( Geršgorin 圆盘定理 )<sup>[18]</sup> 设  $A = (a_{ij})$  是  $n$  阶方阵,

$$R_i(A) = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| \quad (1 \leq i \leq n), \quad (1)$$

则  $A$  的所有特征值位于  $n$  个 Geršgorin 圆盘的并集  $\text{Ge}(A)$  内, 其中

$$\text{Ge}(A) = \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}. \quad (2)$$

引理 2<sup>[18]</sup> 设图  $G = (V, E, A)$  是强连通的,  $\lambda$  是其邻接矩阵  $A$  的特征值, 如果  $\lambda$  是  $\text{Ge}(A)$  的边界点, 则每一个 Geršgorin 圆盘都通过  $\lambda$ .

引理 3<sup>[18]</sup> 如果  $A$  和  $C$  都是方阵,  $B$  为实对称阵, 则

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0$$

的充分必要条件为

$$\begin{aligned} A &> 0, \\ C - B^T A^{-1} B &> 0, \end{aligned}$$

其中记号  $A > 0$  表示方阵  $A$  是正定矩阵.

考虑如下的时滞微分系统:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x_t) \quad (t > 0), \\ x(\theta) &= \varphi(\theta) \quad (\theta \in [-\tau, 0]), \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $x_t(\theta) = x(t + \theta), \forall \theta \in [-\tau, 0], x(0) = 0, \mathcal{C}[-\tau, 0], R^n$  表示由连续函数构成的具有一致收敛拓扑结构  $\|x\| = \max_{\theta \in [-\tau, 0]} \|x(\theta)\|$  的 Banach 空间.

引理 4( Lyapunov-Razuminkhin 定理 )<sup>[19]</sup> 设  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  和  $\phi$  为连续非负非减的函数, 满足  $\phi_1(s) > 0, \phi_2(s) > 0, \phi_3(s) > 0, \phi(s) > s, \forall s > 0$  且  $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0, f \in \mathcal{C}[R^+ \times C, R^n], R^+ = [0, +\infty), f$  是从有界集到有界集的映射. 如果存在连续函数  $V(t, x)$  满足条件  $\phi_1(\|x\|) \leq V(t, x) \leq \phi_2(\|x\|), \forall t \in R, x \in R^n$  以及当  $V(t + \theta, x(t + \theta)) < \phi(V(t, x(t)))$  时有  $V(t, x)|_{(3)} \leq \phi_3(\|x\|)$ , 则系统 (3) 的零解一致渐近稳定. 称满足上述条件的函数  $V(t, x)$  为 Lyapunov-Razuminkhin 函数.

### 3. 不考虑时滞影响的掌声同步

如上所述, 当相邻观众间的距离很小时可以不考虑声音传播的时滞, 下面首先研究没有时滞的掌声同步问题.

假设剧场内有  $n$  个观众, 为了提升剧场的气氛, 预先安排了  $m(1 \leq m \ll n)$  个人分布在剧场的不同位置, 在表演过程中根据需要带头鼓掌 ( $n$  个观众中不包括带头鼓掌者). 观众每拍一次手称为一次击掌, 从观众开始击掌到停止击掌的过程称为一次鼓掌. 当所有观众击掌的时刻与每两次击掌的时间间隔一致时就称掌声达到了同步. 所以, 在研究掌声同步问题时观众击掌的时刻  $x$  和每两次击掌之间的间隔  $y$  就是两个关键变量. 如果观众击掌的频率不变, 则击掌间隔  $y$  就是击掌的周期  $T$ . 如假设观众在  $t_0 = 0$  时刻开始击掌, 则观众第  $k$  次击掌的时刻  $x$  就等于  $kT$ . 由于年龄、性格、心情等多方面的差异, 观众击掌的频率也会有所不同, 所以在剧场内每个观众的鼓掌行为会受到周围观众的影响, 同时这个观众也作为周围人去影响其他观众. 在从众心理的影响下, 鼓掌过程中每位观众都会根据周围观众的击掌时刻和击掌间隔, 自发地调整其下一次击掌的间隔. 如果将  $n$  个观众看作图  $G = (V, E, A)$  中的  $n$  个节点, 则矩阵  $A = (a_{ij})$  给出了观众间的邻居关系. 如果观众  $i$  能听到观众  $j$  的掌声, 则观众  $j$  也能听到观众  $i$  的掌声, 因此在研究掌声同步问题时, 矩阵  $A$  为对称矩阵, 图  $G$  为无向图.

不带时滞的模型为

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i, \\ \dot{y}_i = u_i, \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$u_i = c_1(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j - x_i) + c_2(t) \sum_{j \in N_i} a_{ij} (y_j - y_i) + c_1(t) b_i (x_0 - x_i) + c_2(t) b_i (y_0 - y_i) \quad (5)$$

为控制输入.这里  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $x_0$  和  $y_0$  分别为带头鼓掌者的击掌时刻和击掌间隔,  $c_1(t)$  和  $c_2(t)$  为非负连续的耦合函数, 分别表示邻居观众的击掌时刻和击掌间隔对观众  $i$  的影响程度,  $b_i \geq 0$  表示观众与带头鼓掌者的邻居关系, 只要观众  $i$  的邻居中有一个带头鼓掌者, 则  $b_i = 1$ , 否则  $b_i = 0$ . 本文假定所有观众间的耦合函数相同, 易见耦合函数  $c_1(t), c_2(t)$  与掌声强度成正比.

由于带头鼓掌者的目的就是希望通过自己的鼓掌行为去影响周围的观众, 提升剧场的气氛, 因此假定带头鼓掌者的鼓掌行为不受其他观众的影响. 从而每个带头鼓掌者的鼓掌行为可以用下列动力学方程描述:

$$\dot{x}_0 = y_0, \quad (6)$$

其中  $y_0$  为带头者期望达到的常周期.

记

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in R^n,$$

$$B = \text{diag}(b_1, \dots, b_n) \in R^{n \times n}.$$

由于  $a_{ii} = -\sum_{j=1}^n a_{ij}$ , 所以  $L\alpha = \beta$ . 利用图  $G$  的 Laplace 矩阵  $L$  (4) 式可以写成如下的向量形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -c_1(t)L(x - x_0\alpha) - c_2(t)L(y - y_0\alpha) - c_1(t)B(x - x_0\alpha) - c_2(t)B(y - y_0\alpha). \end{cases} \quad (7)$$

令

$$\begin{cases} e_x = x - x_0\alpha, \\ e_y = y - y_0\alpha \end{cases}$$

分别表示观众与带头鼓掌者之间的鼓掌时刻误差向量和击掌间隔误差向量, 从而(7)式可以进一步写成以下的向量形式:

$$\dot{\varepsilon} = D\varepsilon. \quad (8)$$

这里

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -c_1(t)\hat{L} & -c_2(t)\hat{L} \end{pmatrix},$$

其中  $\hat{L} = L + B$ ,  $I$  为  $n$  阶单位矩阵.

如果从某一时刻开始, 所有观众的击掌时刻与击掌间隔和带头鼓掌者相同, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$ , 则称掌声达到了同步. 从而掌声的同步问题等价于(8)式的零解渐近稳定性问题.

**引理 5** 如果  $G$  是强连通的且至少有一个观众的邻居中有带头鼓掌者, 则矩阵  $\hat{L}$  为正定矩阵.

**证明** 由引理 1, 矩阵  $\hat{L}$  的特征值  $\lambda(\hat{L})$  位于区域  $\text{Ge}(\hat{L})$  内, 其中

$$\text{Ge}(\hat{L}) = \bigcup_{i=1}^n \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii} - b_i| \leq a_{ii}\}. \quad (9)$$

又  $\hat{L}$  为实对称阵, 所以  $\lambda(\hat{L}) \geq 0$ . 由于至少有一个观众的邻居中有带头鼓掌者, 则至少有一个  $b_i > 0$ , 从而至少有一个 Geršgorin 圆盘不与原点相切. 故由引理 2 得  $\lambda(\hat{L}) > 0$ . 证毕.

**引理 6** 设  $d$  为大于 1 的常数, 若  $\hat{L}$  为正定矩阵,

$$\Phi = \begin{pmatrix} dI & I \\ I & I \end{pmatrix},$$

$$P = -(D^T \Phi + \Phi D),$$

则  $P$  正定的充分必要条件为  $c_1(t) > 0$  以及  $[\chi d - 4)c_1(t) + 2dc_2(t)]\lambda(\hat{L}) - [c_2(t) - c_1(t)]\lambda^2(\hat{L})$

>  $d^2$ .

证明

$$P = -(D^T \Phi + \Phi D) \\ = \begin{pmatrix} 2c_1(t)\dot{\mathcal{Y}} & (c_1(t) + c_2(t))\dot{\mathcal{Y}} - dI \\ (c_1(t) + c_2(t))\dot{\mathcal{Y}} - dI & 2c_2(t)\dot{\mathcal{Y}} - 2I \end{pmatrix}. \quad (10)$$

故由引理 3 知, 矩阵  $P$  正定的充分必要条件为

$$2c_1(t)\dot{\mathcal{Y}} > 0, \quad (11)$$

$$2c_2(t)\dot{\mathcal{Y}} - 2I - [(c_1(t) + c_2(t))\dot{\mathcal{Y}} - dI] \\ \times (2c_1(t)\dot{\mathcal{Y}})^{-1} [(c_1(t) + c_2(t))\dot{\mathcal{Y}} - dI] > 0. \quad (12)$$

由引理 5 知, 矩阵  $\hat{L}$  正定. 同时可知, 当  $c_1(t) > 0$  时  $2c_1(t)\dot{\mathcal{Y}} > 0$ , 而

$$2c_2(t)\dot{\mathcal{Y}} - 2I - [(c_1(t) + c_2(t))\dot{\mathcal{Y}} - dI] \\ \times (2c_1(t)\dot{\mathcal{Y}})^{-1} [(c_1(t) + c_2(t))\dot{\mathcal{Y}} - dI] > 0 \quad (13)$$

等价于

$$[\mathcal{X}d - 4)c_1(t) + 2dc_2(t)] \\ - [c_2(t) - c_1(t)]\dot{\mathcal{Y}} - d^2 L^{-1} > 0. \quad (14)$$

设  $\lambda(\hat{L})$  为矩阵  $\hat{L}$  的特征值, 则  $\lambda^{-1}(\hat{L})$  为矩阵  $\hat{L}^{-1}$  的特征值, 从而当  $[\mathcal{X}d - 4)c_1(t) + 2dc_2(t)]\lambda(\hat{L}) - [c_2(t) - c_1(t)]\dot{\mathcal{Y}}\lambda^2(\hat{L}) > d^2$  时, (14) 式成立. 证毕.

**定理 1** 如果  $G$  是强连通的且至少有一个观众的邻居中有带头鼓掌者, 则当条件  $c_1(t) > 0$  以及  $[\mathcal{X}d - 4)c_1(t) + 2dc_2(t)]\lambda(\hat{L}) - [c_2(t) - c_1(t)]\dot{\mathcal{Y}}\lambda^2(\hat{L}) > d^2$  满足时, (8) 式的零解渐近稳定.

证明 当  $d > 1$  时,  $\Phi$  为正定矩阵, 为此取 Lyapunov 函数  $V = \epsilon^T \Phi \epsilon$ , 则

$$\dot{V}|_{(8)} = \epsilon^T (D^T \Phi + \Phi D) \epsilon \\ = -\epsilon^T P \epsilon. \quad (15)$$

由引理 6 知, 定理 1 条件满足时, 矩阵  $P = -(D^T \Phi + \Phi D)$  正定. 设  $\lambda_{\min}(P)$  为  $P$  的最小特征值, 则

$$\dot{V} \leq -\lambda_{\min}(P) \epsilon^T \epsilon < 0 \quad (\forall \epsilon \neq 0). \quad (16)$$

从而根据 Lyapunov 稳定性定理, 可得 (8) 式的零解是一致渐近稳定的. 证毕.

#### 4. 具有时滞的掌声同步

当剧场很大或者是在室外举办的大型演出且上座率不高时, 相邻观众间的距离可能有几米甚至几十米, 掌声传播的时滞就会影响到掌声的同步. 假设掌声传播的时滞为常数  $\tau$ , 并假定耦合函数为常数, 即  $c_1(t) = c_1, c_2(t) = c_2$  时, 得到如下的

模型:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= y_i, \\ \dot{y}_i &= u_i, \end{aligned} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} u_i &= c_1 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (x_j(t - \tau) - x_i(t - \tau)) \\ &+ c_2 \sum_{j \in N_i} a_{ij} (y_j(t - \tau) - y_i(t - \tau)) \\ &+ c_1 b_i (x_0(t - \tau) - x_i(t - \tau)) \\ &+ c_2 b_i (y_0(t - \tau) - y_i(t - \tau)) \end{aligned} \quad (18)$$

为控制输入. 这里  $i = 1, 2, \dots, n$ . (17) 式的向量形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{X}} &= \mathcal{Y}, \\ \dot{\mathcal{Y}} &= -c_1 L \mathcal{X}(t - \tau) - c_2 L \mathcal{Y}(t - \tau) \\ &- c_1 B \mathcal{X}(t - \tau) - c_2 B \mathcal{Y}(t - \tau) \\ &- c_1 B \mathcal{Y}(t - \tau) - c_2 B \mathcal{X}(t - \tau). \end{aligned} \quad (19)$$

注意到  $L\alpha = \beta$ , 可进一步将 (19) 式改写成如下的向量形式:

$$\dot{\epsilon} = E\epsilon + F\epsilon(t - \tau). \quad (20)$$

这里

$$\begin{aligned} E &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ F &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c_1 \hat{L} & -c_2 \hat{L} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $\hat{L} = L + B$ . 记

$$\begin{aligned} \bar{D} &= E + F, \\ \bar{P} &= -(D^T \Phi + \Phi D). \end{aligned}$$

**定理 2** 如果  $G$  是强连通的且至少有一个观众的邻居中有带头鼓掌者, 则模型 (17) 式所示的掌声可以同步的充分条件为  $c_1 > 0, [\mathcal{X}d - 4)c_1 + 2dc_2]\lambda(\hat{L}) - [c_2 - c_1]\dot{\mathcal{Y}}\lambda^2(\hat{L}) > d^2$  以及  $\tau < \tau^* = \lambda_{\min}(\bar{P})/\gamma$ , 其中  $\gamma = \|\Phi F E \Phi^{-1} E^T F^T \Phi^T\| + \|\Phi F^2 \Phi^{-1} F^{T2} \Phi^T\| + 2q \|\Phi\|$ ,  $\lambda_{\min}(\bar{P})$  为  $\bar{P}$  的最小特征值.

证明 取 Lyapunov-Razuminkhin 函数  $V = \epsilon^T \Phi \epsilon$ , 下面计算  $\dot{V}|_{(20)}$ . 由

$$\begin{aligned} \epsilon(t - \tau) &= \epsilon(t) - \int_{-\tau}^0 \dot{\epsilon}(t + s) ds \\ &= \epsilon(t) - E \int_{-\tau}^0 \epsilon(t + s) ds \\ &- F \int_{-\tau}^0 \epsilon(t + s) ds \end{aligned} \quad (21)$$

可得

$$\dot{\epsilon} = (E + F)\epsilon(t) - FE \int_{-\tau}^0 \epsilon(t + s) ds$$

$$\begin{aligned}
& - F^2 \int_{-2\tau}^{-\tau} \epsilon(t+s) ds \\
& = \bar{D}\epsilon(t) - FE \int_{-\tau}^0 \epsilon(t+s) ds \\
& - F^2 \int_{-2\tau}^{-\tau} \epsilon(t+s) ds. \tag{22}
\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}
\dot{V}|_{(20)} & = \epsilon^T (\bar{D}^T \Phi + \Phi \bar{D}) \epsilon \\
& - 2\epsilon^T \Phi FE \int_{-\tau}^0 \epsilon(t+s) ds \\
& - 2\epsilon^T \Phi F^2 \int_{-2\tau}^{-\tau} \epsilon(t+s) ds. \tag{23}
\end{aligned}$$

注意到

$$\bar{D} = E + F = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -c_1 \hat{L} & -c_2 \hat{L} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

易见当  $c_1(t) = c_1, c_2(t) = c_2$  时,有  $D = \bar{D}$ . 故由引理 6 知,如果定理 2 条件满足,则  $\bar{P} = -(\bar{D}^T \Phi +$

$\Phi \bar{D})$  正定. 易见

$$\begin{aligned}
& - 2\epsilon^T \Phi FE \int_{-\tau}^0 \epsilon(t+s) ds \\
& \leq \tau \epsilon^T \Phi FE \Phi^{-1} E^T F^T \Phi^T \epsilon \\
& + \int_{-\tau}^0 \epsilon^T(t+s) \Phi \epsilon(t+s) ds, \tag{25} \\
& - 2\epsilon^T \Phi F^2 \int_{-2\tau}^{-\tau} \epsilon(t+s) ds \\
& \leq \tau \epsilon^T \Phi F^2 \Phi^{-1} F^{T2} \Phi^T \epsilon^T \\
& + \int_{-2\tau}^{-\tau} \epsilon^T(t+s) \Phi \epsilon(t+s) ds. \tag{26}
\end{aligned}$$

故当  $V(t+\theta, x(t+\theta)) < qV(t, x(t)) \forall \theta \in [-\tau, 0], q > 0$  时,有

$$\begin{aligned}
\dot{V}(t, x)|_{(14)} & \leq -[\lambda_{\min}(\bar{P}) \epsilon^T \epsilon \\
& - \tau \epsilon^T (\Phi FE \Phi^{-1} E^T F^T \Phi^T \\
& + \Phi F^2 \Phi^{-1} F^{T2} \Phi^T + 2q\Phi) \epsilon] \tag{27}
\end{aligned}$$

因此,当

$$\tau < \tau^* = \frac{\lambda_{\min}(\bar{P})}{\|\Phi FE \Phi^{-1} E^T F^T \Phi^T\| + \|\Phi F^2 \Phi^{-1} F^{T2} \Phi^T\| + 2q\|\Phi\|} \tag{28}$$

时,存在  $\mu > 0$ ,使得

$$\dot{V}|_{(20)} \leq -\mu \epsilon^T \epsilon < 0 \quad (\forall \epsilon \neq 0). \tag{29}$$

根据引理 4,可得 (20) 式的零解是一致渐近稳定的. 证毕.

**注 1** 当周围邻居击掌的时刻与间隔对观众的影响程度相同,即耦合函数  $c_1(t) = c_2(t) = c$  且  $d > 2$  时,定理 1 与定理 2 的前两个条件可以简化为下列条件:

$$c > c^* = \frac{d^2}{4(d-2)\lambda_{\min}(\hat{L})}, \tag{30}$$

其中  $\lambda_{\min}(\hat{L})$  为矩阵  $\hat{L}$  的最小特征值. 可见,当观看精彩节目时观众掌声的强度越高,则相应的耦合强度  $c$  也越大,从而条件 (30) 式也就越容易满足. 同时,如果一个剧场的上座率越高,则时滞  $\tau$  也越小,从而条件  $\tau < \tau^*$  也就越容易满足. 所以,在上座率高的剧场内观看精彩节目时更容易听到同步的掌声.

**注 2** 如果只凭我们的直觉,在大的剧场内要想使所有的观众都按照预期的节奏 ( $y = y_0$ ) 鼓掌肯定需要安排很多带头鼓掌者,但定理 1 和定理 2 的结果说明,如果节目足够精彩而且剧场的上座率也足够高,即使在很大的剧场内只要有一名带头鼓

掌者就足以带领全场的观众按照期望的节奏鼓掌.

### 5. 数值仿真

为了验证本文定理的正确性,下面给出数值仿真的例子.

为了清楚地描绘出观众击掌时刻误差  $e_x$  和击掌间隔误差  $e_y$  随时间变化的趋势,下面给出只有 30 位观众 ( $n = 30$ ) 一位带头鼓掌者 ( $m = 1$ ) 的仿真结果. 对于观众人数更多的情形有类似的结论. 假设剧场内 30 位观众坐成 3 排每排 10 位,如图 1 所示,其中节点“0”代表带头鼓掌者,并假设每位观众的邻居只包括坐在其前后左右的观众. 图 1 中双向箭头表示观众之间的影响是相互的,单向箭头表示带头鼓掌者只影响离其最近的 3 位观众,而其鼓掌行为不受这 3 位观众的影响. 下面的仿真只验证定理 1 和定理 2 中  $c_1(t) = c_2(t) = c$  的情形. 在求解微分方程时用的是 Runge-Kutta 法,步长为 0.0001. 取  $d = 4$ ,状态变量  $e_x, e_y$  的初值取为均值为零的随机数. 不难写出图 1 对应的矩阵  $\hat{L}$ , 计算得  $\lambda_{\min}(\hat{L}) = 0.1426, \lambda_{\min}(\bar{P}) = 2.3595, c^* = 14.0252, \tau^* = 0.0025$ .

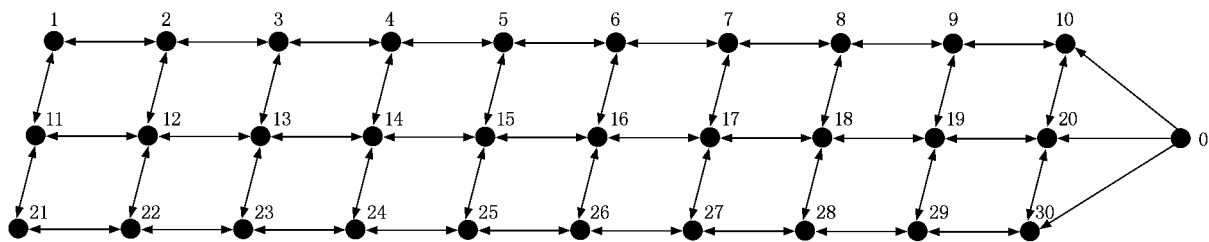


图1 观众之间的拓扑结构图

如果相邻观众间的距离很近,则不需要考虑掌声传播时滞的影响.当  $c = 14.1$  时定理 1 条件满足,此时仿真结果如图 2 所示.由此可知,经过短暂的调整后所有观众与带头鼓掌者的击掌时刻和击掌间隔一致.

$= 14.1$  对所有的  $\tau \leq 0.011$  掌声均可以同步,当参数  $\tau > 0.011$  时不会出现同步.由此可知,虽然耦合强度足够大,但如果掌声传播的时滞过大(即相邻观众间距离较远时),仍然不能形成同步的掌声.

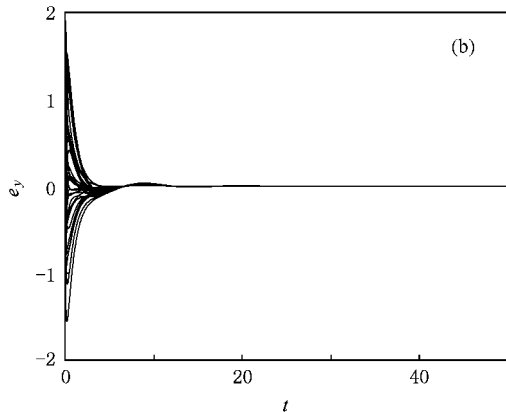
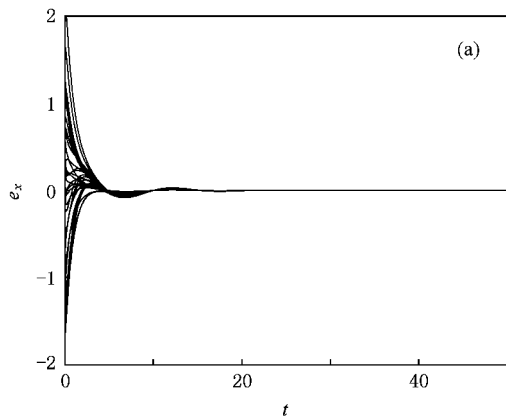


图2 不考虑时滞时观众的击掌时刻和击掌间隔误差 (a)击掌时刻误差 (b)击掌间隔误差

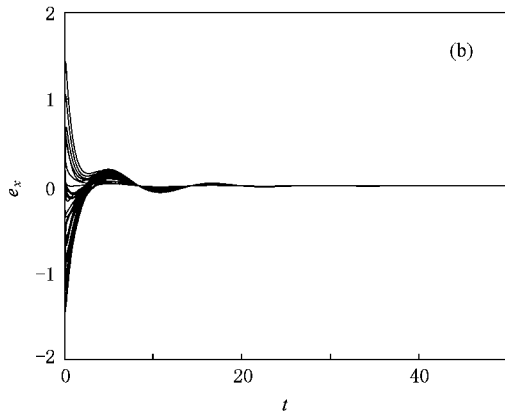
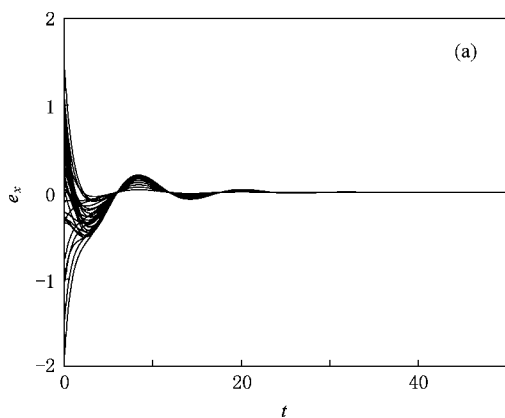


图3 时滞  $\tau = 0.002$  时观众的击掌时刻和击掌间隔误差 (a)击掌时刻误差 (b)击掌间隔误差

如果剧场上座率不高,相邻观众间的距离较远,此时需要考虑声音传播的时滞.当  $c = 14.1, \tau = 0.002 < \tau^*$  时定理 2 的条件满足,此时仿真结果如图 3 所示.同样经过短暂的调整后所有观众与带头鼓掌者的击掌时刻和击掌间隔一致.实际上,定理 2 只给出了掌声同步的充分条件,在仿真时发现,如  $c$

在仿真时还发现,如果参数  $c$  较小掌声也不会同步.图 4 是  $c = 3, \tau = 0.001$  时的仿真结果.由此可知,即使有带头鼓掌者和很高的上座率 ( $\tau = 0.001$ ),如果节目不精彩 ( $c = 3 < c^*$ ),也不会形成同步的掌声.因此,要想提升剧场的气氛,除了提高剧场的上座率和安排带头鼓掌者外,提高节目的精彩程度也非常关键.

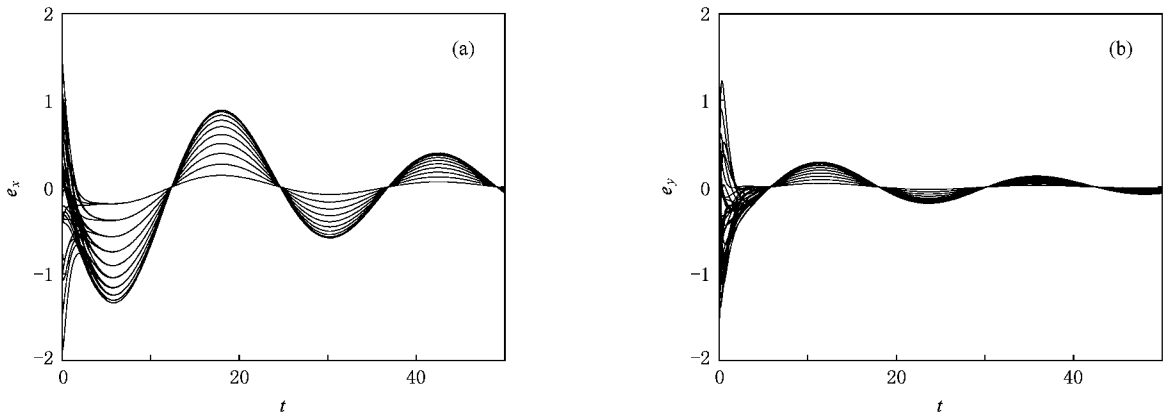


图4 耦合系数  $c = 3$  时滞  $\tau = 0.001$  时观众的击掌时刻和击掌间隔误差 (a) 击掌时刻误差 (b) 击掌间隔误差

## 6. 结 论

本文考虑了具有带头鼓掌者的掌声同步问题, 根据相邻观众间距离的不同, 分别在掌声传播的时滞可以忽略和不能忽略两种情况下建立了掌声同步的模型, 并给出了掌声同步的充分条件. 数值仿真验证了所给条件的正确性. 本文的分析结果从理论上

说明了人们在日常生活中观察到的现象: 在上座率高的剧场内观看精彩节目时更容易听到有节奏的掌声. 理论结果也给出了一个与人们直觉不同的结论: 如果上座率很高、节目很精彩, 即使在很大的剧场内也只要有一名带头鼓掌者就足以带领全场的观众按照期望的节奏鼓掌. 另外, 本文所给出的只是充分条件, 如何给出掌声同步的充分必要条件将是以后所要研究的问题.

- [ 1 ] Jia F L , Xu W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 3102 ( in Chinese ) 贾飞雷、徐伟 2007 物理学报 **56** 3102 ]
- [ 2 ] Wu Y , Xiao J H , Zhan M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5119 ( in Chinese ) 吴晔、肖井华、占萌 2007 物理学报 **56** 5119 ]
- [ 3 ] Wang X Y , Meng J 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 726 ( in Chinese ) 王兴元、孟娟 2008 物理学报 **57** 726 ]
- [ 4 ] Liu Y Z , Jiang C S , Lin C S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 709 ( in Chinese ) 刘扬正、姜长生、林长圣 2008 物理学报 **57** 709 ]
- [ 5 ] Liu Y J , Zhang S H , Qian X Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 463
- [ 6 ] Zhou P 2007 *Chin. Phys.* **16** 1263
- [ 7 ] Shao S Q , Gao X , Liu X W 2007 *Chin. Phys.* **16** 2612
- [ 8 ] Feng Y L , Shen K 2008 *Chin. Phys. B* **17** 550
- [ 9 ] Li X 2006 *Physica A* **360** 629
- [ 10 ] Li L X , Luo Q , Peng H P , Wu W , Yang Y X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1529 ( in Chinese ) 李丽香、罗群、彭海朋、吴薇、杨义先 2008 物理学报 **57** 1529 ]
- [ 11 ] Olfati-Saber R , Murray R 2004 *IEEE Trans. Automat. Contr.* **49** 1520
- [ 12 ] Xiao F , Wang L 2006 *Physica A* **370** 364
- [ 13 ] Néda Z , Ravasz E , Vicsek T , Brechet Y , Barabási A L 2000 *Nature* **403** 849
- [ 14 ] Néda Z , Ravasz E , Vicsek T , Brechet Y , Barabási A L 2000 *Phys. Rev. E* **61** 6087
- [ 15 ] Néda Z , Nikitin A , Vicsek T 2003 *Physica A* **321** 238
- [ 16 ] Li D Y , Liu K , Sun Y , Han M C 2007 *Sci. China E* **37** 1248 ( in Chinese ) 李德毅、刘坤、孙岩、韩明畅 2007 中国科学 E **37** 1248 ]
- [ 17 ] Peltola L , Erkut C , Cook P R 2007 *IEEE Trans. Audio Speech Lang. Proc.* **15** 1021
- [ 18 ] Horn R , Johnson C 1985 *Matrix Analysis* ( New York : Cambridge University Press ) pp176 358 472
- [ 19 ] Hale J K , Lunel S M V 1991 *Introduction to the Theory of Functional Differential Equations* ( New York : Springer ) p12

# Synchronization of the applause with leaders

Sun Yong-Zheng<sup>1,2,†</sup> Ruan Jiong<sup>2)</sup> Li Wang<sup>3)</sup>

<sup>1</sup> *School of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China*

<sup>2</sup> *School of Mathematical Science, Fudan University, Shanghai 200433, China*

<sup>3</sup> *College of Computer, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China*

( Received 25 March 2008 ; revised manuscript received 17 July 2008 )

## Abstract

Synchronization of the applause with leaders is investigated. The cases of the presence or absence of the effect of the applause transmission time delay on the part of the spectators are considered respectively. Sufficient conditions for the applause synchronization are presented for each case. The obtained theoretical results not only manifest the observation that rhythmic applauds are more frequently heard in a theater with high attendance rate, but also show a surprising conclusion that one leader is enough to make all spectators clap with the same frequency in a very large theater. Furthermore, numerical examples are provided to illustrate the validity of the theoretical results.

**Keywords** : synchronization, time delay, stability

**PACC** : 0565, 0175

† E-mail: 071018027@fudan.edu.cn