

# 玻色-爱因斯坦凝聚中的混沌反控制

王志霞<sup>1,2)</sup> 张喜和<sup>1)</sup> 沈 柯<sup>1)</sup>

1) 长春理工大学物理系, 长春 130022)

2) 空军航空大学基础部, 长春 130022)

(2007 年 9 月 11 日收到, 2008 年 8 月 27 日收到修改稿)

提出一种实现玻色-爱因斯坦凝聚中的混沌反控制方法——周期信号驱动法. 数值模拟结果表明, 用小的周期信号控制系统, 采用恰当的调制相位和强度, 只要满足系统的最大 Lyapunov 指数大于零即可实现不同的混沌轨道重构. 调制相位在混沌轨道重构中起了很重要的作用.

关键词: 玻色-爱因斯坦凝聚, 混沌反控制, 小周期信号, Lyapunov 指数

PACC: 3280P, 0545

## 1. 引 言

混沌控制可以分为两类, 一类是当混沌有害时抑制混沌动力学行为, 另一类是当混沌有用时可以产生或加强混沌动力学行为, 后者被称为混沌反控制(anti-control of chaos, chaotification). 混沌生成(chaos generation)或混沌合成(chaos synthesis)等. 人们已经在很多领域发现混沌的用处. 混沌反控制是对一个原来没有混沌的系统产生出混沌行为, 所谓系统“混沌化”, 或对一个原来的混沌系统进一步增强其混沌行为, 或者维持其混沌行为. 在实际中发现混沌有越来越多的用途. 例如, 在工业生产中应用混沌使两种或多种流体能以最小能量消耗达到均匀混合的效果; 当热脉冲燃烧器与空气混合或者贫乏燃料运行时, 也需要在混沌状态下工作; 在生物系统中有时更需要混沌状态, 否则就意味着生病; 混沌反控制可以应用于受控核聚变中等离子体的加热, 在混沌状态下加热能达到最佳效果; 利用混沌进行保密通信; 经典混沌可以导致量子纠缠的增加, 有利于人们研究玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)中的量子纠缠, 这是当前非常热门的一个研究课题. 所以, 混沌反控制的研究不仅具有重要的理论意义, 而且还具有广阔的应用前景<sup>[1-5]</sup>.

目前, 混沌反控制的研究已引起人们的极大兴趣, 并取得一些有益的进展. 对于离散系统, Chen 等<sup>[6]</sup>提出了利用状态反馈, 再进行模操作, 用 Devaney<sup>[7]</sup>提出的方法使得闭环系统具有混沌. 随

后, Wang 等<sup>[8,9]</sup>证明了该方法不仅具有 Devaney 提出的混沌, 而且还具有 Li-Yorke<sup>[10]</sup>提出的混沌. 对于连续系统, Yang 等<sup>[11]</sup>研究了具有极限环的连续系统反控制问题. 文献 [12—17] 研究了简并光学参量振荡器的混沌反控制.

BEC 的实现为研究原子物理、凝聚态物理和量子光学中的很多重要现象提供了条件, 而且有着极其广泛的应用. 关于吸引相互作用 BEC 的理论和实验研究引起了人们极大的兴趣. 运动光学晶格中的 BEC 除了在原子物理和激光物理中的应用外, 在物理学的其他领域也有很重要的应用<sup>[18,19]</sup>. 系统的动力学特征是由带非线性项的薛定谔方程描述的, 此方程在平均场理论中代表了多体相互作用.

关于 BEC 中的混沌和混沌控制研究已有一些报道. 文献 [18,19] 讨论了 BEC 中的混沌动力学, 文献 [20] 研究了利用 Ott, Grebogi, Yorke 创立的 OGY 方法来对弱耦合 BEC 阵列进行的混沌控制, 但至今仍未见有关 BEC 混沌反控制方面的报道. 本文研究 BEC 中的混沌反控制, 即 BEC 中的混沌合成.

## 2. 混沌反控制方案

这里我们考虑一个先在谐振子势阱中制备而后被装入运动光学晶格中的 BEC. 因此三维情况下的联合势可以写成

$$V(x, y, z, t_1) = V_1 \cos^2(k\xi) + n(\omega_x^2 x^2 + \omega_y^2 y^2 + \omega_z^2 z^2)/2. \quad (1)$$

(1) 式等号右边第二项表示磁阱提供的谐振子囚禁

势,其中  $m$  为凝聚原子质量,  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  分别为  $x, y, z$  三个方向上的谐振子势阱的囚禁频率. 周期势为运动的光学晶格, 光学晶格中的时空变量为

$$\xi = x + \frac{\delta t_1}{2k},$$

其中  $\delta$  为两束相对传播激光的频率差,  $k$  为光学晶格的波矢,  $\delta$  和  $k$  共同决定了光学晶格的运动速度  $v_L = \delta/(2k)$ , 实验中速度  $v_L$  可以由声光调制器来调节. 当产生的凝聚体处于谐振子囚禁势阱的中心位置附近时, 磁阱要比光阱弱得多, 可以忽略不计. 谐振子的囚禁频率分别取为  $\omega_x = \sqrt{2}\omega_y = 2\omega_z = 2\pi \times 27 \text{ Hz}$ , 波矢量  $k = 2\pi/\lambda$ , 光学晶格的波长为  $\lambda = 589 \text{ nm}$ . 我们发现, 在区域  $k \sqrt{x^2 + y^2/2 + z^2/4} \leq 100\pi$  中谐振子囚禁势的量级大约在  $10^{-2} E_r$ . 这里  $E_r$  为原子的反冲能,

$$E_r = \hbar^2 k^2 / (2m),$$

光学晶格的强度为  $V_1 = 14E_r$ , 显然磁囚禁势阱要远小于光学势阱. 因此, 一维光学晶格势对系统而言起了主导作用, 在这一区域中准一维近似成为有效描述系统动力学性质的方法. 另一方面, 对于这样的运动光学晶格系统, 我们需要考虑其中的阻尼效应.

在考虑上述因素的情况下, 系统可以由下列平均场理论中含时的 Gross-Pitaevski (GP) 方程来描述<sup>[18,19]</sup>:

$$i\hbar(1 - i\gamma) \frac{\partial \psi}{\partial t_1} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g_0 |\psi|^2 \psi + V_1 \cos^2(k\xi) \psi + \alpha V_1 \cos^2(\Omega t_1 + \varphi) \psi. \quad (2)$$

这里  $\psi$  为宏观量子系统的波函数,  $\Omega$  为外加激光的角频率,  $g_0$  为原子间相互作用,

$$g_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m},$$

其中  $a$  是 s 波散射长度,  $a > 0$  表示排斥相互作用,  $a < 0$  表示吸引相互作用. 方程(2)等号右边第一项为阻尼项, 与阻尼因子  $\gamma$  成比例,  $\alpha V_1 \cos^2(\Omega t_1 + \varphi) \psi$  代表叠加到光学晶格上的外加势, 是外加的高度聚焦的激光脉冲, 它刚好可以被作为一个反控制信号来反控制系统的规则运动.

由于方程(2)是一个非常复杂的方程, 我们在这里仅讨论系统中行波形式的解

$$\psi = \varphi(\xi) \exp[i(\alpha_2 x + \beta t_1)]. \quad (3)$$

这里  $\varphi(\xi)$  为行波,  $\alpha_2$  和  $\beta$  是两个不定实数. 把方程(3)代入方程(2), 偏微分方程转变为下列常微分

方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} + i \left( \frac{\hbar^2 \alpha_2}{m} + \hbar v_L - i\hbar\gamma v_L \right) \frac{d\varphi}{d\xi} \\ & - \left( \hbar\beta + \frac{\hbar^2 \alpha_2^2}{2m} - i\hbar\beta\gamma \right) \varphi - g_0 |\varphi|^2 \varphi \\ & = V_1 \cos^2(k\xi) \varphi + \alpha V_1 \cos^2(\Omega t_1 + \phi) \varphi, \quad (4) \end{aligned}$$

式中  $\phi$  为相位. 为了简化, 使用无量纲参数和变量

$$\begin{aligned} \eta &= k\xi, \\ V &= \frac{2mv_L}{\hbar k}, \\ \beta_1 &= \hbar\beta/E_r, \\ \alpha_1 &= \alpha_2/k, \\ I_0 &= V_1/E_r. \end{aligned} \quad (5)$$

由

$$\varphi = R(\eta) \exp(i\theta(\eta)),$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -\frac{\beta_1}{V} = -\left(\frac{V}{2} + \alpha_1\right),$$

方程(4)变成为

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R}{d\eta^2} - \frac{1}{4} V^2 R - gR^3 \\ & = I_0 \cos^2(\eta) R + \alpha I_0 \cos^2(\Omega\eta + \phi) R \\ & - \gamma V \frac{dR}{d\eta}. \end{aligned} \quad (6)$$

这里  $I_0$  为激光光强,  $g$  为无量纲相互作用强度,  $g = 8\pi ak$ . 按照 Duffing 方程的一般理论, 只有方程(6)等号左边的线性项  $R$  与非线性项  $R^3$  符号相反时有同宿解. 因此, 为了研究同宿混沌, 对于方程(6)等号左边的第三项我们必须考虑原子间吸引相互作用, 即  $g < 0$ . 方程(6)类似于带阻尼项参数驱动的 Duffing 方程, 振幅  $R$  (即  $y_1$ ) 的平方是粒子数密度. 我们将方程(6)变为

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\eta} &= \frac{dR}{d\eta} = y_2, \\ \frac{dy_2}{d\eta} &= \frac{d^2 R}{d\eta^2} \\ &= \frac{1}{4} V^2 y_1 + g y_1^3 + I_0 \cos^2(\eta) y_1 \\ &+ \alpha I_0 \cos^2(\Omega\eta + \phi) y_1 - \gamma V y_2. \end{aligned} \quad (7)$$

### 3. 数值模拟

在模拟过程中, 首先是系统处于周期状态(第二个周期信号不起作用, 亦即  $\alpha = 0$ , 此时反控制激光没有打开). 为了清楚地说明混沌反控制的过程, 我

们将设置一组系统参数来给出具体的数值模拟结果. 模拟中采用四阶 Runge-Kutta 法求解方程(7), 计算了 30000 步的  $y_1, y_2$  值, 为了避免暂态混沌, 在计算中舍去前 20000 步的  $y_1, y_2$  值, 只保留了后 10000 步的  $y_1, y_2$  值. 所选取的初始值  $(y_1, y_2) = (1.0, 1.0)$ ,  $\eta = 0.0$ , 参数分别取  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, \alpha = 0.06, 0 < I_0 < 0.51, 1 < I_0 < 1.6, 1.79 < I_0 < 1.82$  时, BEC 系统处于规则运动, 在此选取  $I_0 = 1.8$ . 图 1 是系统在相空间  $y_1-y_2$  (粒子数密度) 中的吸引子和相应的时间序列图. 从图 1 可以看到, 此时 BEC 的系统处于周期一状态, 是规则运动.

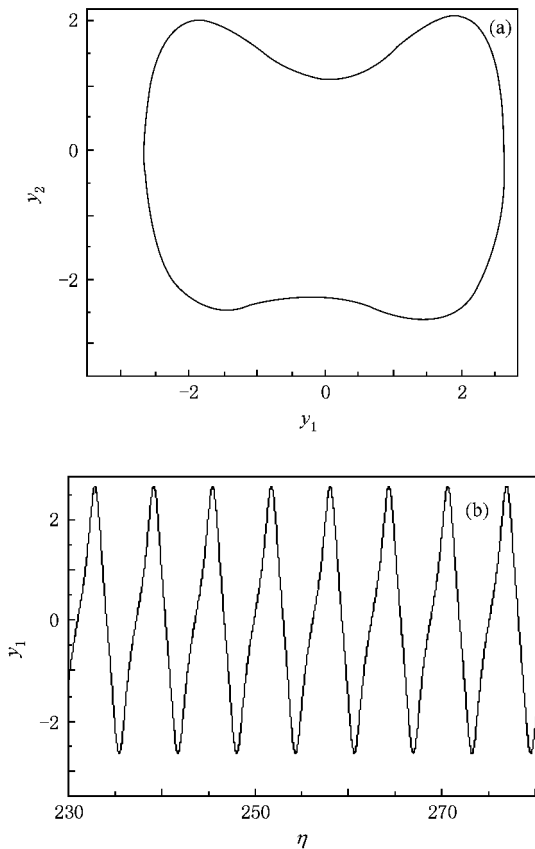


图 1 BEC 处于周期一状态的吸引子和时间序列  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \alpha = 0$ . (a) 吸引子 (b)  $y_1$  的时间序列

由控制理论可知, 本文给出的方案具有两个反控制参数. 当  $\phi = 0$  时, 两个周期力 (即  $I_0 \cos^2(\eta)y_1$  和  $\alpha I_0 \cos^2(\Omega\eta + \phi)y_1$ ) 可以合并,  $\phi$  只不过影响到合并后的周期力振幅, 这时反控制信号 ( $\alpha I_0 \cos^2(\Omega\eta + \phi)y_1$ ) 只能稍稍移动第一个周期信号 ( $I_0 \cos^2(\eta)y_1$ ) 产生的各种分岔结构位置, 而不能对结构本身产生根本改造. 但当  $\phi \neq 0$  时, 相位  $\phi$  对反

控制效果会产生重大影响.  $\gamma, V, g, I_0$  的选取与图 1 相同, 即取  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8$ , 另外再取  $\alpha = 0.06, \Omega = 3.0$ . 首先把相位  $\phi$  作为反控制参数, 系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随相位  $\phi$  的变化如图 2 所示. 我们发现, 在  $1.4 < \phi < 3.51, 4.45 < \phi < 6.75$  和  $7.65 < \phi < 9.85$  等很多区域内, 最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  都是正值. 当运动光学晶格的 BEC 系统位于这些区域时, 系统处于混沌状态.

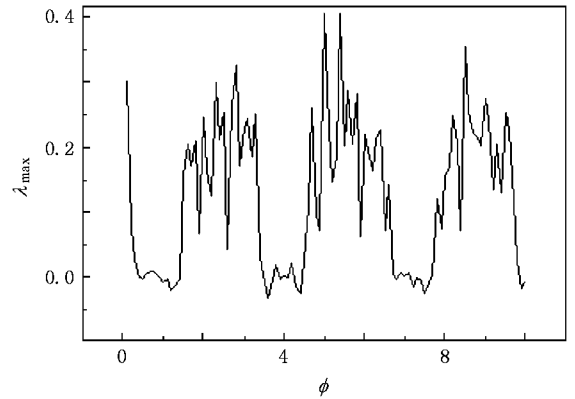


图 2 系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随相位  $\phi$  的变化  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \alpha = 0.06, \Omega = 3.0$

为了清楚地说明混沌反控制的过程, 我们将设置一组系统参数来给出具体的数值模拟结果. 利用四阶 Runge-Kutta 法求解方程(7), 为了避免暂态混沌, 在计算中舍去前 20000 步  $y_1, y_2$  的值. 图 3(a), (b) 分别为粒子数密度  $y_1$  的混沌吸引子和  $y_1$  的时间序列. 所选取的初始值  $(y_1, y_2) = (0.01, 0.0)$ ,  $\eta = 0.0$ , 参数分别取  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \alpha = 0.06, \Omega = 3.0, \phi = 2.1$ . 图 3 是系统在相空间  $y_1-y_2$  (粒子数密度) 中的奇怪吸引子和相应的时间序列图. 从图 3 可以看到, 此时 BEC 系统处于混沌状态. 这样我们就实现了 BEC 系统的混沌反控制.

下面把激光强度作为反控制参数, 系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随强度  $\alpha$  的变化如图 4 所示, 参数分别取  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \Omega = 3.0, \phi = 3.8$ . 我们发现, 在  $0 < \alpha < 3.6, 7.3 < \alpha < 8.8$  和  $9.1 < \alpha < 9.5$  等很多区域内, 最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  都是正值. 当运动光学晶格的 BEC 系统位于这些区域时, 系统处于混沌状态.

为了清楚地说明混沌反控制的过程, 我们将设置一组系统参数来给出具体的数值模拟结果. 图 5

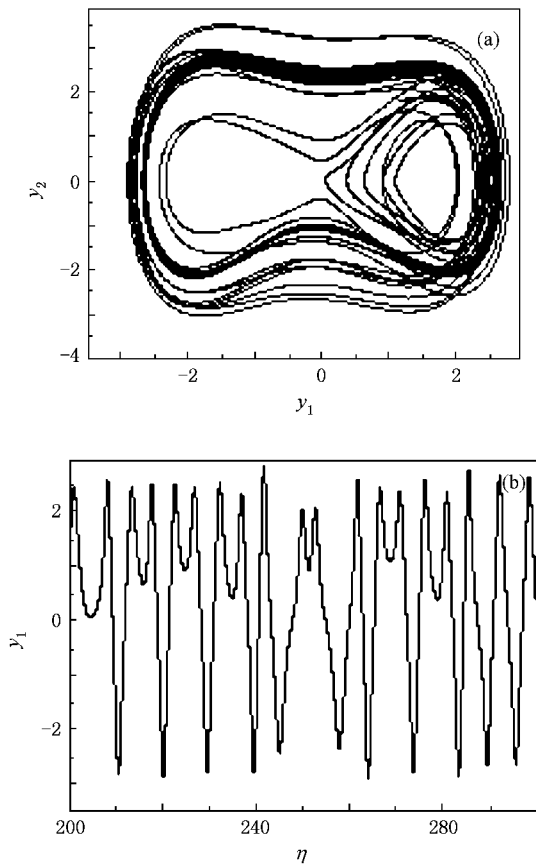


图3 混沌吸引子和时间序列  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \alpha = 0.06, \Omega = 3.0, \phi = 2.1$ . (a)混沌吸引子, (b)  $y_1$  的时间序列

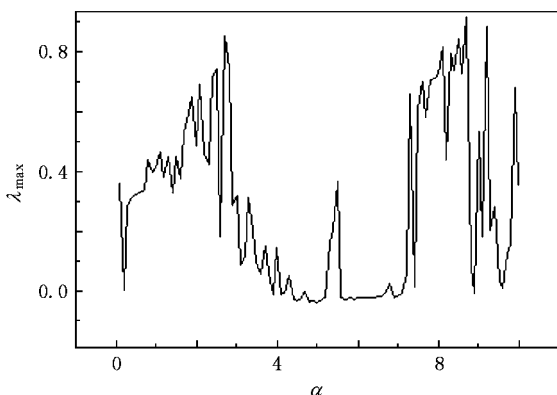


图4 系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$  随强度  $\alpha$  的变化  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \Omega = 3.0, \phi = 3.8$

是系统在相空间  $y_1$ - $y_2$  (粒子数密度) 中的奇怪吸引子和相应的功率谱, 初始条件  $(y_1, y_2) = (0.01, 0.0)$ ,  $\eta = 0.0$ , 参数分别取  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \alpha = 2.5, \Omega = 3.0, \phi = 3.8$ . 从图

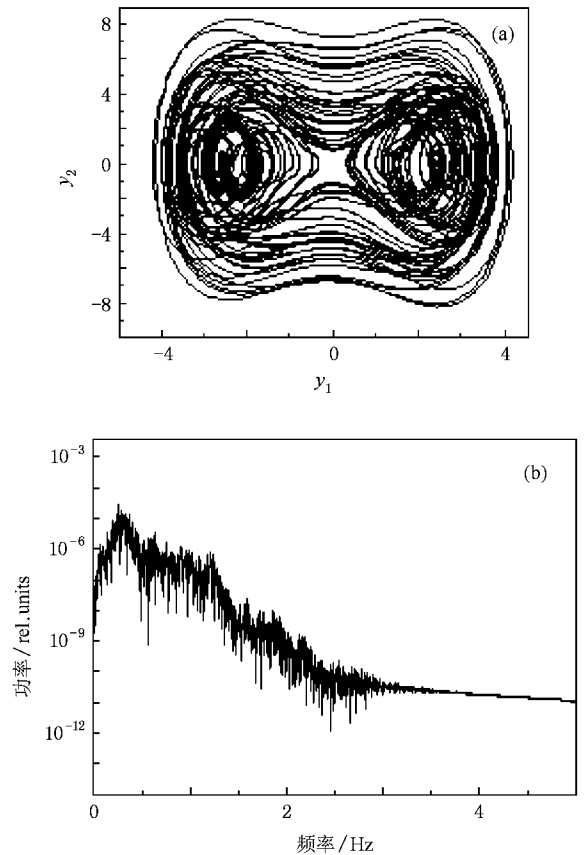


图5 混沌吸引子和功率谱  $\gamma = 0.05, V = 2.03, g = -0.75, I_0 = 1.8, \alpha = 2.5, \Omega = 3.0, \phi = 3.8$ . (a) BEC 的混沌吸引子, (b) 功率谱

5 可以看到, 此时 BEC 系统处于混沌状态, 这样我们就实现了 BEC 系统的混沌轨道重构, 得到所需要的混沌信号. 比较图 3(a) 和图 5(a) 可以看出, 虽然 BEC 系统的原状态相同, 但当调制系数不同时, 反控制后 BEC 系统的混沌吸引子是不同的. 这一点更有利于混沌反控制在实际中的具体应用.

### 4. 结 论

本文研究了一种实现 BEC 混沌反控制的方法——周期信号驱动法. 通过计算系统的最大 Lyapunov 指数  $\lambda_{\max}$ , 判断并选择相应的调制强度和相位, 可以将系统从周期态转化为混沌态, 实现混沌轨道重构. 近来, 有关 BEC 应用的进展和 BEC 中的量子纠缠和量子计算都是令人感兴趣的领域, 而混沌正好可以增加 BEC 中的量子纠缠. 因此, 研究和控制 BEC 中的混沌以及 BEC 中的混沌反控制是很重要的.

- [ 1 ] Garfinkel A , Spano M L , Ditto W L , Weiss J N 1992 *Science* **257** 1230
- [ 2 ] Roy R 2005 *Nature* **438** 298
- [ 3 ] Fang J Q 2000 *Controlling Chaos* ( Beijing : Atomic Energy Press ) ( in Chinese ) [ 方锦清 2000 驾驭混沌 ( 北京 原子能出版社 ) ]
- [ 4 ] Giovannoni S J , Stiglitz U 2005 *Nature* **437** 343
- [ 5 ] Xie Q T 2006 *Ph. D. Dissertation* ( Changsha : Hunan Normal University ) ( in Chinese ) [ 谢琼涛 2006 博士学位论文 ( 长沙 : 湖南师范大学 ) ]
- [ 6 ] Chen G R , Lai D 1998 *Int. J. Bifur. Chaos* **8** 1585
- [ 7 ] Devaney R L 1987 *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems* ( New York : Addison-Wesley ) p985
- [ 8 ] Wang X F , Chen G R 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1453
- [ 9 ] Wang X F , Chen G R 2000 *Chaos* **10** 771
- [ 10 ] Li Y , Yorke J A 1975 *Am. Math. Month.* **82** 481
- [ 11 ] Yang L , Liu Z R , Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 1121
- [ 12 ] Yu S M 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 4111 ( in Chinese ) [ 禹思敏 2004 物理学报 **53** 4111 ]
- [ 13 ] Xu Z J , Cheng C X , Yang H S , Wu Q , Xiong H W 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2835 ( in Chinese ) [ 徐志君、程成熊、杨欢耸、武强、熊宏伟 2004 物理学报 **53** 2835 ]
- [ 14 ] Gao H Y , Chen J W , Xie H L , Cheng M , Xiao T Q , Zhu P P , Xu Z Z 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1696 ( in Chinese ) [ 高鸿姿、陈建文、谢红兰、陈敏、肖体乔、朱佩平、徐至展 2002 物理学报 **51** 1696 ]
- [ 15 ] Feng X Q , Shen K 2004 *SPIE* **5646** 126
- [ 16 ] Feng X Q , Shen K 2004 *SPIE* **5646** 613
- [ 17 ] Feng X Q , Shen K 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 4455 ( in Chinese ) [ 冯秀芹、沈柯 2006 物理学报 **55** 4455 ]
- [ 18 ] Chong G S , Hai W H , Xie Q T 2004 *Chaos* **14** 217
- [ 19 ] Chong G S , Hai W H , Xie Q T 2004 *Phys. Rev. E* **70** 036213
- [ 20 ] Chong G S , Hai W H , Xie Q T 2005 *Phys. Rev. E* **71** 016202

## Anti-control of chaos in Bose-Einstein condensate

Wang Zhi-Xia<sup>1,2)</sup> Zhang Xi-He<sup>1)</sup> Shen Ke<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Department of Physics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China )

<sup>2)</sup> Foundational Department, Aviation University of Air Force, Changchun 130022, China )

( Received 11 September 2007 ; revised manuscript received 27 August 2008 )

### Abstract

We present a method of anti-control of chaos in Bose-Einstein condensate by applying periodic signals to convert the periodic state into chaotic state. Numerical simulation shows that there are different chaotic orbits corresponding to different modulation intensity and modulating frequency only if the maximum Lyapunov exponent of the system is positive. The phase difference between the two sinusoidal forces added to the Gross-Pitaevski equation plays an important role in anti-control of chaos.

**Keywords :** Bose-Einstein condensate , anti-control of chaos , little periodic signals , Lyapunov exponent

**PACC :** 3280P , 0545