

一类由饱和引起的非线性现象*

邹建龙[†] 马西奎

(西安交通大学电气工程学院电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2007 年 4 月 10 日收到, 2007 年 5 月 13 日收到修改稿)

以一个功率因数校正 boost 变换器为例, 描述了当系统在饱和与非饱和状态间不断切换时出现的一类非线性现象, 分析了这些现象的特点和产生原因. 推导了考虑饱和的分段微分方程, 并据此进行了仿真. 结果表明, 系统一方面会出现倍周期分岔和混沌等传统的非线性现象, 另一方面由于整流输入电流碰到饱和边界, 系统的定性行为发生突变, 会出现边界碰撞分岔, 还能从混沌直接变为周期 1. 这类由饱和引起的非线性现象及相关分析得到了实验验证.

关键词: 饱和, 非线性, 分岔, 混沌

PACC: 0545

1. 引 言

人们对非线性系统的研究大多集中在常微分方程、离散映射或偏微分方程中含有非线性项的系统, 例如 Logistic 映射和 Lorenz 系统. 而在现实世界中, 绝大多数物理量是有界的, 例如运算放大器的输出电压不会超过偏置电压, 汽车的速度也有上限. 一旦某一物理量达到了边界, 就意味着系统进入了饱和状态. 在此情况下, 该物理量随时间就不再变化, 对时间导数始终为零. 这与系统未进入饱和状态前的情况有本质的不同. 如果系统不断地在饱和状态和非饱和状态间切换, 这样的系统就是分段系统, 因而非线性系统. 目前人们对由饱和导致非线性的系统的研究还不够重视, 这类系统中会出现哪些非线性现象? 这些非线性现象有什么特点? 它们产生的原因是什么? 都是有待回答的问题.

对饱和和非线性系统的研究目前主要集中于非线性光学系统^[1-4]、磁饱和系统^[5-7]、含饱和量的自动控制系统^[8,9]等. 研究的主要着眼点是系统建模和稳定性分析, 对饱和引起的非线性现象的研究还很少.

近年来, 电力电子系统成为非线性动力学一个重要的研究对象, 它应用十分广泛, 并且由于开关的切换, 是一个分段光滑的非线性系统, 已经发现其中

存在丰富的非线性现象^[10-15]. 本文以一个功率因数校正(PFC)boost 变换器为例, 推导考虑饱和的分段微分方程, 根据分段微分方程进行数值仿真, 揭示一类由饱和引起的非线性现象, 并分析其特点和产生机理. 最后将给出实验结果.

2. PFC boost 变换器饱和和非线性的建模

PFC boost 变换器的原理框图如图 1 所示. 整流桥使 $v_{inr} = |v_{in}|$, $v_{inr} = |v_{in}|$, 从而将交流正弦波转变为直流正弦半波. 采用 PFC boost 变换器有两个目的: 一是保持输入电流 i_{in} 始终为与输入电压 v_{in} 同相位的正弦波, 即功率因数为 1; 二是保持输出电压 v_o 为一基本恒定的直流电压, 这两个目的都是通过控制电路来实现. 在控制电路中, 电压误差放大器的作用是保持输出电压的基本恒定. 乘法器的作用是提供一个与整流输入电压 v_{inr} 同相位的正弦半波信号, 作为参考电流. 电流误差放大器的作用是使整流输入电流 v_{inr} 始终跟踪参考电流, 从而实现输入侧电流为与 v_{in} 同相位的正弦波, 达到功率因数校正的目的.

图 1 仅为原理框图, 具体实现时的电路如图 2 所示, 其详细的工作过程见文献 [16]. 由图 2 可见, 参考电流的表达式为

* 国家自然科学基金(批准号 50577047)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号 20050698004)资助的课题.

[†] E-mail: superzou@mail.xjtu.edu.cn

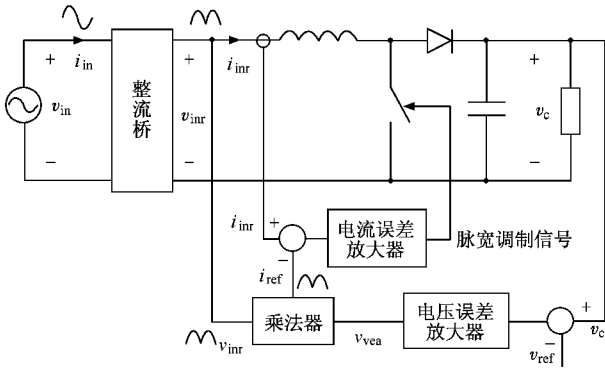


图 1 PFC boost 变换器原理框图

$$i_{ref} = \begin{cases} \frac{i_{ac}(v_{vea} - 1.5)}{v_{ff}^2} & v_{vea} > 1.5, \\ 0 & v_{vea} \leq 1.5, \end{cases} \quad (1)$$

式中, $i_{ac} = \frac{v_{inr}}{R_{ac}}$, v_{vea} 为电压误差放大器输出电压, v_{ff} 为输入前馈电压, 其作用是在输入电压发生变化时保证输入输出功率的自动平衡^[16]。根据(1)式, 当 $v_{vea} > 1.5$ 时, 参考电流 $i_{ref} \geq 0$, 并且随时间不断变化, 而当 $v_{vea} \leq 1.5$ 时, $i_{ref} = 0$ 。由于整流输入电流 i_{inr} 要跟踪 i_{ref} , 所以此时 $i_{inr} = 0$ 。由图 2 可见, 二极管整流桥使得 i_{inr} 不可能反向流动, 其最小值为 0, 这就意味着当 $v_{vea} \leq 1.5$ 时, i_{inr} 会始终处于饱和下限 0。

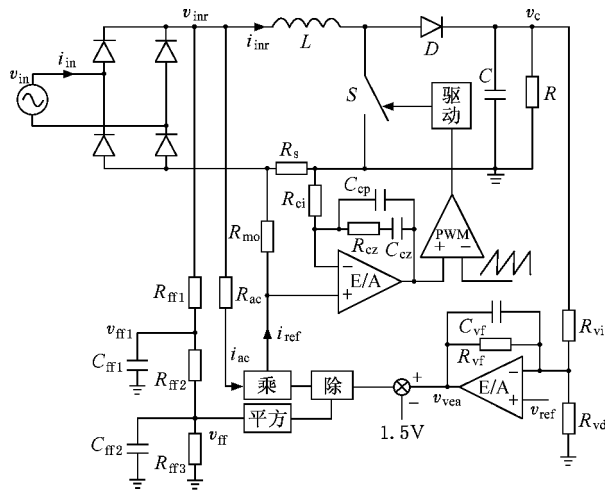


图 2 PFC boost 变换器电路图

下面推导考虑饱和的分段微分方程。首先, 根据图 2, 可以得到输入输出瞬时功率平衡的方程^[11]:

$$v_{in} i_{in} = v_c C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c^2}{R} + L \frac{di_{inr}}{dt} i_{inr}, \quad (2)$$

式中 $v_{in} = V_m \sin \omega t$ 。忽略每个开关周期内的细节, 则电感中的能量变化可以忽略不计^[17], 即 $L \frac{di_{inr}}{dt} i_{inr} = \frac{d(\frac{1}{2} Li_{inr}^2)}{dt} \approx 0$ 。所以(2)式可以简化为

$$v_{in} i_{in} = v_c C \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c^2}{R}. \quad (3)$$

根据(3)式和图 2 可以推导出考虑饱和情况的分段微分方程。

情形 1 $v_{vea} > 1.5$, i_{inr} 处于非饱和状态:

$$\begin{aligned} \frac{dv_c}{dt} &= -\frac{v_c}{RC} + \frac{KV_m^2}{Cv_c} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2}, \\ \frac{dv_{vea}}{dt} &= -\frac{v_c}{R_{vi} C_{vf}} - \frac{v_{vea}}{R_{vd} C_{vf}} \\ &\quad + \left(\frac{1}{R_{vi} C_{vf}} + \frac{1}{R_{vd} C_{vf}} + \frac{1}{R_{vf} C_{vf}} \right) V_{ref}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{ff}}{dt} &= \frac{v_{ff} - v_{ff}}{R_{ff2} C_{ff}} + \frac{V_m |\sin \omega t| - v_{ff}}{R_{ff1} C_{ff}}, \\ \frac{dv_{ff}}{dt} &= \frac{v_{ff} - v_{ff}}{R_{ff2} C_{ff2}} - \frac{v_{ff}}{R_{ff3} C_{ff2}}, \end{aligned}$$

式中, $K = \frac{R_{mo}}{R_s R_{ac} v_{ff}^2}$ 。

情形 2 $v_{vea} \leq 1.5$, i_{inr} 处于饱和下限 0:

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{v_c}{RC}, \quad (5)$$

关于 v_{vea} , v_{ff} , v_{ff} 的微分方程与(4)式相同。

(4)式和(5)式构成了考虑饱和情况的分段微分方程。

3. 饱和引起的非线性现象

为揭示由饱和引起的各种非线性现象, 我们根据(4)式和(5)式对 PFC boost 变换器的动力学行为进行了仿真。仿真所用参数值为 $L = 560 \mu H$, $R_s = 0.51 \Omega$, $R_{mo} = R_{ci} = 3.9 k\Omega$, $R_{vi} = 510 k\Omega$, $R_{vd} = 8 k\Omega$, $R_{ff1} = 910 k\Omega$, $R_{ff2} = 91 k\Omega$, $R_{ff3} = 22 k\Omega$, $R_{ac} = 400 k\Omega$, $V_{ref} = 3 V$, $R_{vf} = 180 k\Omega$, $C_{vf} = 47 nF$ 。输入交流电压 v_{in} 是有效值为 80 V 的正弦电压, 频率为 50 Hz。负载 R 和输出电压 C 为可变参数。

当 $R = 400 \Omega$, $C = 470 \mu F$ 时, v_c , v_{vea} 和 i_{inr} 的波形如图 3(a) 所示, 可见它们都是周期为 10 ms 的信号, 并且 i_{inr} 为比较理想的正弦半波。由于整流桥的存在, $i_{inr} = |i_{in}|$, 所以 i_{in} 为 50 Hz 的正弦波, 系统可

以获得接近 1 的功率因数,此时为正常工作状态.以 10 ms 为采样周期,则此时的工作状态为周期 1.当 $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ 时, v_c , v_{vea} 和 i_{inr} 的波形如图 3(b) 所示.它们的周期为 20 ms,此时系统工作于周期 2, i_{inr} 不是正弦半波,因而输入电流 i_{in} 也就不再是正负对称的正弦波,出现严重的谐波畸变,实现不了功率因数校正的目的.

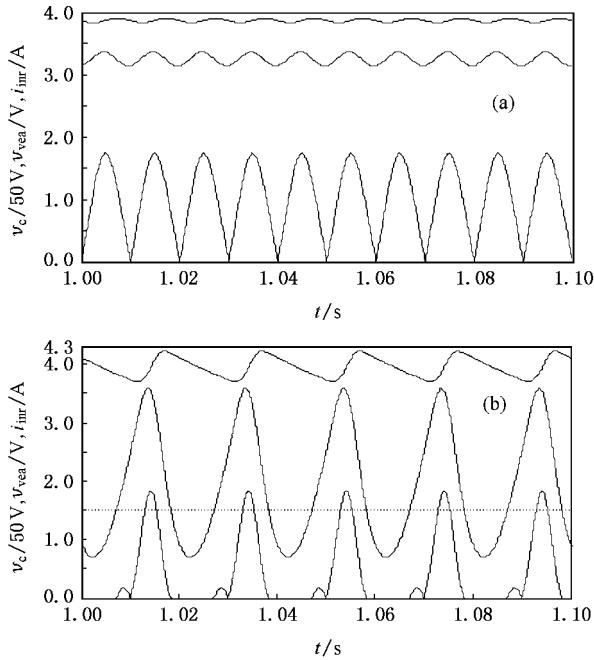


图 3 v_c (上), v_{vea} (中)和 i_{inr} (下)的波形 (a) $R = 400 \text{ }\Omega$, $C = 470 \text{ }\mu\text{F}$ 周期 1; (b) $R = 1 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ 周期 2

从图 3(a)和(b)可以看到,当 R 增大, C 减小时,系统由周期 1 变为周期 2,这说明系统的定性行为发生了根本的改变,出现了分岔.在图 3(a)中, v_{vea} 始终大于 1.5 V,根据(4)式,系统始终处于非饱和状态.而在图 3(b)中, v_{vea} 会间歇性小于 1.5 V,导致 i_{inr} 也间歇性处于饱和状态,即 $i_{\text{inr}} = 0 \text{ A}$,系统不断在饱和与非饱和状态间切换,正是这种由饱和导致的非线性最终使系统发生分岔.

继续增大 R ,减小 C .当 $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ 时, v_c , v_{vea} 和 i_{inr} 的波形如图 4(a) 所示,此时系统处于周期 4.当 $R = 4 \text{ k}\Omega$, $C = 68 \text{ }\mu\text{F}$ 时, v_c , v_{vea} 和 i_{inr} 的波形如图 4(b) 所示,可见此时系统已处于混沌.当 $R = 4 \text{ k}\Omega$, $C = 47 \text{ }\mu\text{F}$ 时, v_c , v_{vea} 和 i_{inr} 的波形如图 4(c) 所示,此时 i_{inr} 仍间歇性处于饱和状态,但系统却处于周期 1 状态.

以上仅是从时域仿真研究了取不同参数的动力

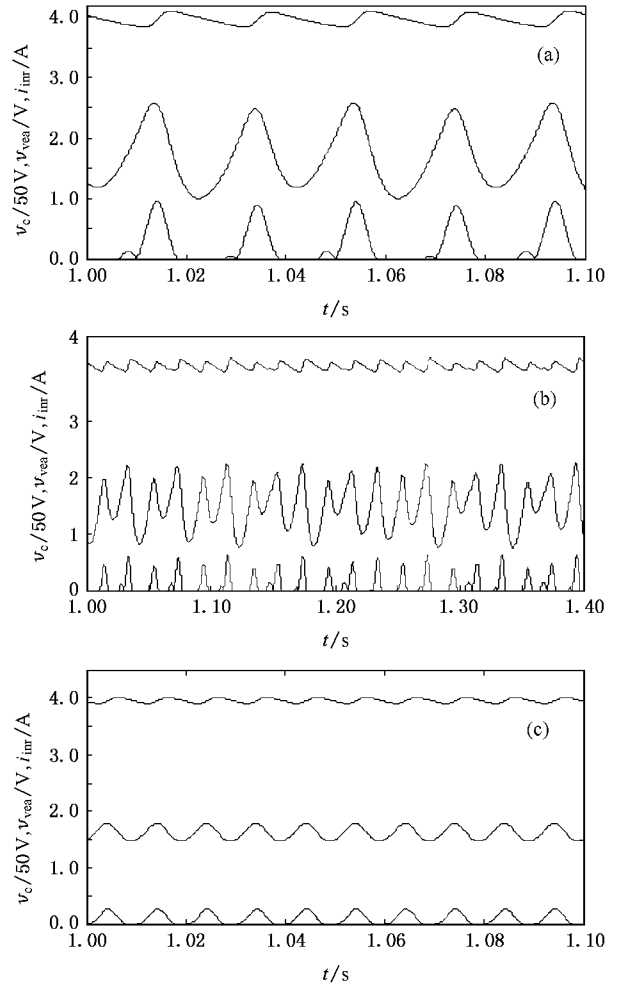


图 4 v_c (上), v_{vea} (中)和 i_{inr} (下)的波形 (a) $R = 2 \text{ k}\Omega$, $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$ 周期 4 (b) $R = 4 \text{ k}\Omega$, $C = 68 \text{ }\mu\text{F}$ 混沌 (c) $R = 4 \text{ k}\Omega$, $C = 47 \text{ }\mu\text{F}$ 饱和,周期 1

学行为,为了从全局考察系统的动力学行为,需要借助分岔图.当 $R = 4 \text{ k}\Omega$ 时,采样周期取 10 ms,可以画出以 C 为分岔参数, v_{vea} 为变量的分岔图,如图 5 所示.随着 C 的减小,在 $C = 134 \text{ }\mu\text{F}$ 附近,系统由周期 1 变为周期 2,发生了分岔.虽然都是周期加倍,但是这种分岔不同于传统的倍周期分岔.传统的倍周期分岔从周期 1 到周期 2 的过渡非常光滑,而图 5 中的分岔从周期 1 到周期 2 的过渡是突变,是一种不光滑分岔.这种分岔属于边界碰撞分岔,其产生的原因是随着 C 的减小, i_{inr} 碰到了饱和边界,导致定性行为发生突变.其分岔的不光滑性正是边界碰撞分岔的典型特征^[18-21].在 $C = 110 \text{ }\mu\text{F}$ 附近,系统由周期 2 变为周期 4,随着 C 的减小,系统通过倍周期分岔进入混沌.当 C 继续减小到 $66 \text{ }\mu\text{F}$ 附近时,系统突然由混沌状态变为周期 1,这在传统的分岔图中

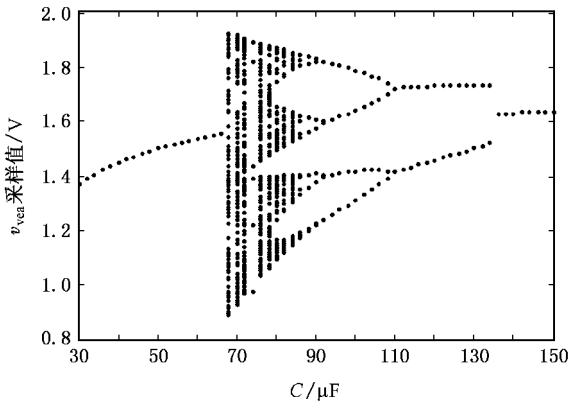


图5 以 C 为分岔参数的 v_{ven} 的分岔图

是很少见的,这种突变也是由碰撞边界所致.同为周期 1, $C < 66 \mu\text{F}$ 时的周期 1 与 $C > 134 \mu\text{F}$ 时的周期 1

的特点以及对系统的影响有显著的不同. $C > 134 \mu\text{F}$ 时,系统未进入饱和状态,此时系统工作比较正常,功率因数几乎为 1. $C < 66 \mu\text{F}$ 时,系统会在饱和状态与非饱和状态间不断切换,此时由于输入电流在一部分时间内为零,不再是正弦波,因而谐波畸变严重,功率因数很差.

4. 实验验证

PFC boost 变换器实验电路如图 6 所示.控制采用集成的控制芯片 UC3854A,其作用是实现图 2 中的运算放大器、乘、除、平方、PWM(脉宽调制)和驱动功能,实验电路参数值与仿真所用参数相同,并在图中标出.开关频率为 100 kHz.负载 R 和输出电容 C 为可变参数.

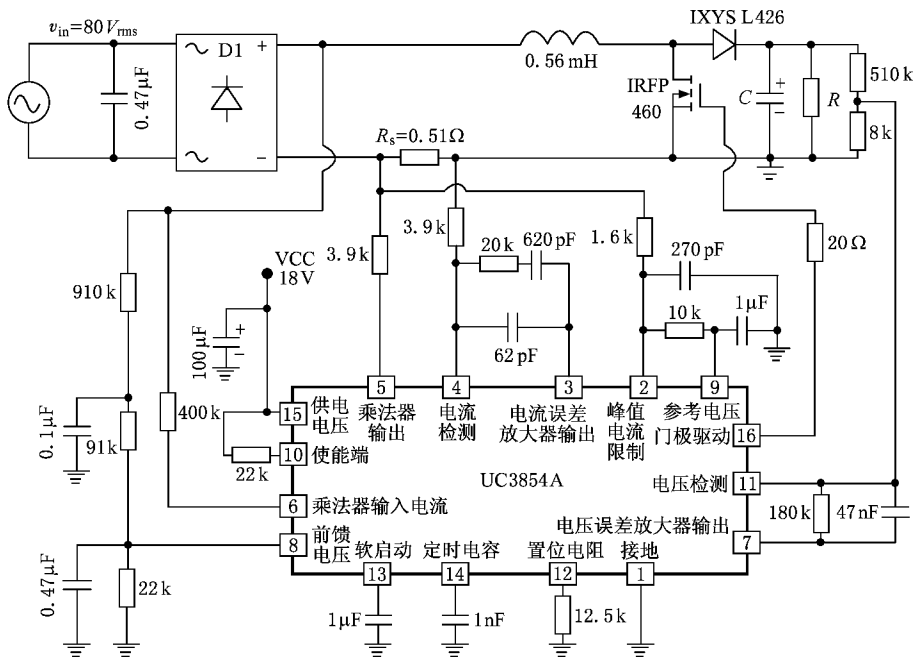


图6 PFC boost 变换器实验电路图

当 $R = 400 \Omega, C = 470 \mu\text{F}$ 时, v_c, v_{ven} 和 $R_s i_{inr}$ 的实验波形如图 7(a) 所示,可见它们的周期为 10 ms,系统工作于周期 1.当 $R = 1 \text{ k}\Omega, C = 100 \mu\text{F}$ 时, v_c, v_{ven} 和 $R_s i_{inr}$ 的实验波形如图 7(b) 所示,它们的周期为 20 ms,系统工作在周期 2.对比图 7(a) 和图 7(b),在图 7(a) 中, v_{ven} 始终大于 1.5 V,系统始终处于非饱和状态,而在图 7(b) 中, v_{ven} 间歇性小于 1.5 V,导致 i_{inr} 也间歇性处于饱和状态, $i_{inr} = 0 \text{ A}$.系统不断在

饱和与非饱和状态间切换.当 $R = 2 \text{ k}\Omega, C = 100 \mu\text{F}$ 时, v_c, v_{ven} 和 $R_s i_{inr}$ 的实验波形如图 8(a) 所示,此时系统处于周期 4.当 $R = 4 \text{ k}\Omega, C = 68 \mu\text{F}$ 时, v_c, v_{ven} 和 $R_s i_{inr}$ 的实验波形如图 8(b) 所示,可见此时系统已处于混沌.当 $R = 4 \text{ k}\Omega, C = 47 \mu\text{F}$ 时, v_c, v_{ven} 和 $R_s i_{inr}$ 的实验波形如图 8(c) 所示,此时 i_{inr} 仍间歇性处于饱和状态,但系统却处于周期 1 状态.

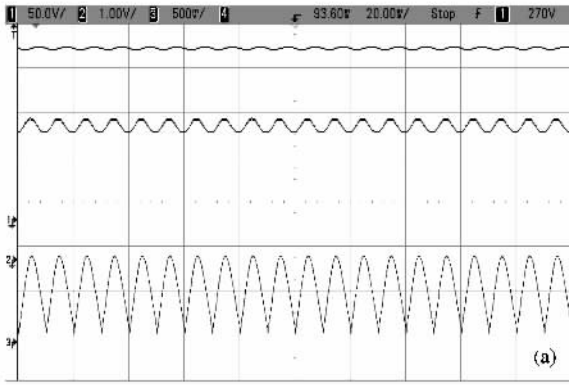


图 7 v_c (上), v_{ven} (中) 和 $R_s i_{in}$ (下) 的实验波形, 横轴时间为 20 ms/格 (a) $R = 400 \Omega, C = 470 \mu F$, 周期 1 (b) $R = 1 \text{ k}\Omega, C = 100 \mu F$, 周期 2

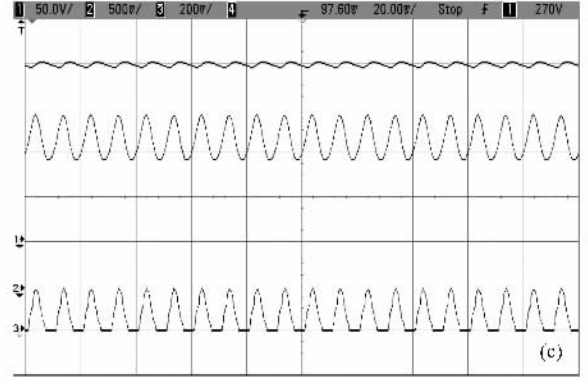
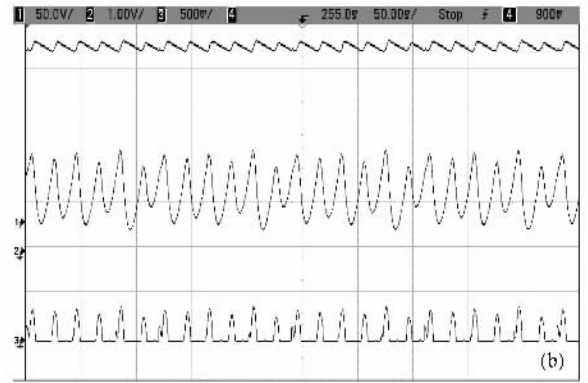
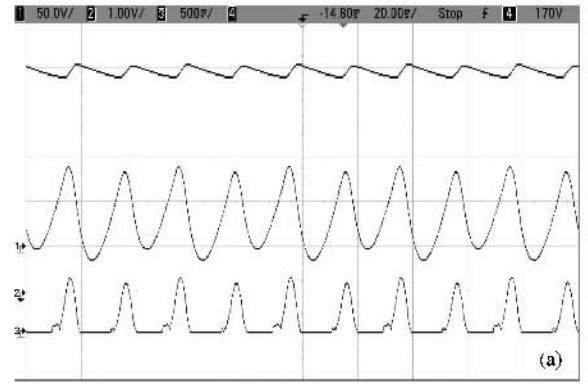


图 8 v_c (上), v_{ven} (中) 和 $R_s i_{in}$ (下) 的实验波形, 横轴时间 (a) 和 (c) 为 20 ms/格 (b) 为 50 ms/格 (a) $R = 2 \text{ k}\Omega, C = 100 \mu F$, 周期 4 (b) $R = 4 \text{ k}\Omega, C = 68 \mu F$, 混沌; (c) $R = 4 \text{ k}\Omega, C = 47 \mu F$, 饱和, 周期 1

5. 结 论

饱和是导致系统非线性的一个重要原因, 本文以一个 PFC Boost 变换器为例, 揭示了一类由饱和引起的非线性现象. 结果表明, 当负载电阻 R 增大, 输出电容 C 减小时, 电压误差放大器的输出电压 v_{ven} 有可能在部分时间内小于 1.5 V, 从而导致整流输入电流 i_{in} 处于饱和边界 0 A, 最终系统会在饱和与非饱和状态间不断切换, 成为一个分段的非线性系统. 通过仿真及分析可以看到, 饱和一方面会引起倍周期分岔、混沌等传统非线性现象, 另一方面, 饱和还会引起一些不太常见的非线性现象, 包括不光滑分岔以及从混沌直接变为周期 1, 这些都是因为物理量碰撞饱和边界, 导致系统的定性行为发生了突变. 最后, 仿真结果及分析得到了实验验证.

存在饱和和非线性的系统很多, 研究结果有助于人们更好地理解和分析这类系统中出现的各种现

象. 不过对饱和和非线性系统的研究还有很多工作要做, 本文研究的仅是单个物理量达到饱和的情况, 在实际应用中还有可能多个物理量达到饱和, 这种情况下可能会出现哪些非线性现象有待进一步研究. 此外, 饱和非线性还有可能与其它类型的非线性共同作用, 使得系统的动力学行为更加复杂, 这也有待深入研究.

- [1] Inoue K , Mukai T 2002 *J. Lightwave Technol.* **20** 969
- [2] Zhao M S , Morthier G , Baets R 2002 *IEEE Photon. Technol.* **50** 390
- [3] Zhong X Q , Xiang A P 2006 *Chin. J. Lasers* **23** 335 (in Chinese)
[钟先琼、向安平 2006 中国激光 **23** 335]
- [4] Huang C F , Guo R , Liu S M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1218 (in Chinese)
[黄春福、郭儒、刘思敏 2006 物理学报 **55** 1218]
- [5] Lu X L , Wu H G 2002 *Trans. Chin. Electrotechnical Soci.* **17** 1
(in Chinese) [卢贤良、吴汉光 2002 电工技术学报 **17** 1]
- [6] Knobloch E , Julien K 2005 *Phys. Fluids* **17** 094106-1
- [7] Lee S H , Han S J , Choi H S , Lee J H , Park I H 2004 *IEEE Trans. Appl. Superconductivity* **14** 682
- [8] Goebel R 2005 *IEEE Trans. Autom. Control* **50** 650
- [9] Angeli D , Chitour Y , Marconni L 2005 *IEEE Trans. Autom. Control* **50** 1997
- [10] Tse C K 2003 *Complex Behavior of Switching Power Converters* (Boca Raton : CRC Press)
- [11] Orabi M , Ninomiya T 2003 *IEEE Trans. Ind. Electron.* **50** 1116
- [12] Zhang H , Ma X K , Liu W Z 2005 *Chaos , Solitons and Fractals* **23** 431
- [13] Zhou Y F , Tse C K , Qiu S S , Chen J N 2005 *Chin. Phys.* **14** 61
- [14] Yang R , Zhang B 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5667 (in Chinese)
[杨汝、张波 2006 物理学报 **55** 5667]
- [15] Zou J L , Ma X K , Tse C K , Dai D 2006 *Int. J. Circuit Theory Appl.* **34** 251
- [16] Todd P C 1999 *Tech. Rep. Unitrode Inc.* (Texas Instruments) **3** 269
- [17] Wong S , Tse C K , Orabi M , Ninomiya T 2006 *IEEE Trans. Circ. Syst. I* **53** 454
- [18] Nusse H E , Ott E , Yorke J A 1992 *Physica D* **59** 39
- [19] Di Bernardo M , Budd C J , Champneys A R 2001 *Physica D* **154** 171
- [20] Dai D , Ma X K , Li X F 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2729 (in Chinese)
[戴栋、马西奎、李小峰 2003 物理学报 **52** 2729]
- [21] Li M , Ma X K , Dai D , Zhang H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1084
(in Chinese) [李明、马西奎、戴栋、张浩 2005 物理学报 **54** 1084]

A class of nonlinear phenomena resulting from saturation^{*}

Zou Jian-Long[†] Ma Xi-Kui

(State Key Laboratory of Electrical Insulation for Power Equipment , School of Electrical Engineering ,
Xi ' an Jiaotong University , Xi ' an 710049 , China)

(Received 10 April 2007 ; revised manuscript received 13 May 2007)

Abstract

Based on a power-factor-correction (PFC) boost converter , a class of nonlinear phenomena are described when the system switches between saturated and non-saturated states alternately . Their characteristics and origination are analyzed . According the piecewise differential equations derived , we simulate the system ' s dynamical behavior . The simulating results demonstrate that period-doubling bifurcation and chaos may occur in this system . Moreover , border-collision bifurcation and transition from chaos to period-1 may also appear . These nonlinear phenomena result from the abrupt change of the system ' s qualitative behavior when the rectified input current runs into its saturation border . The nonlinear phenomena caused by saturation and the related analysis are verified by the experimental results .

Keywords : saturation , nonlinear , bifurcation , chaos

PACC : 0545

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50577047) and Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20050698004).

[†] E-mail : superzou@mail. xjtu. edu. cn