

# 自治混沌系统的线性和非线性广义同步\*

王兴元† 孟 娟

(大连理工大学电子与信息工程学院, 大连 116024)

(2007 年 4 月 21 日收到, 2007 年 5 月 18 日收到修改稿)

研究了自治混沌系统的广义同步问题, 基于改进的状态观测器方法和极点配置技术, 提出了一种新的广义同步方案, 扩展了混沌广义同步的适用范围, 并用该方法实现了自治混沌系统的线性及非线性广义同步. 根据状态观测器理论, 给出了驱动-响应系统获得全局渐进广义同步的充分条件. 数值仿真实验进一步验证了所提方法的有效性.

关键词: 自治混沌系统, 广义同步, 状态观测器, 分段线性 Chen 系统

PACC: 0545, 0555

## 1. 引 言

自 20 世纪 90 年代初 Pecora 和 Carroll 发现混沌系统可以实现同步以来, 混沌同步受到越来越多的关注<sup>[1-4]</sup>. 混沌同步在生物、化学、医学和信息科学等领域显示出了良好的应用前景<sup>[5-7]</sup>. 人们从不同的角度对混沌同步进行了研究, 并提出了许多同步方法, 如驱动-响应同步方法<sup>[1, 2]</sup>、线性和非线性反馈法<sup>[8-10]</sup>、脉冲同步法<sup>[11, 12]</sup>等. 然而上述方法大都是针对完全同步而言, 即两个初值不同的混沌系统的轨道距离  $\|x - y\|$  在  $t \rightarrow \infty$  时趋于零. 但是实际中难以产生两个完全相同的混沌系统, 参数失配和各种失真总是存在且不可避免的. 为此, 人们提出了“广义同步”的概念, 即在主从混沌系统之间建立一个函数关系, 它比完全同步具有更为广泛的应用领域<sup>[13, 14]</sup>. 文献 [14] 利用线性变换方法实现了混沌系统的广义同步, 但能否同步依赖于混沌系统的线性部分是否稳定. 从控制论的角度来看, 混沌系统的同步是一个状态观测器问题<sup>[15]</sup>. 本文基于改进的非线性状态观测器理论, 提出了一种新的广义同步方法, 克服了文献 [14] 方法的缺陷. 理论分析和数值仿真进一步验证了本文方法的可行性和有效性.

## 2. 广义同步方案

考虑如下两个混沌系统, 分别作为驱动系统和响应系统:

$$\dot{x} = Ax + f(x), \quad (1)$$

$$\dot{y} = g(y) + u(x, y), \quad (2)$$

这里  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n$  为驱动系统的状态矢量,  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$  为响应系统的状态矢量,  $A$  为具有适当维数的系统矩阵,  $f(\cdot)$  和  $g(\cdot)$  为连续向量函数,  $u(x, y)$  为外部控制输入.

对于系统 (1) 和 (2), 给定一个矢量映射  $\phi: R^n \rightarrow R^n$ , 如果满足

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(y(t)) - x(t)\| = 0, \quad (3)$$

则称系统 (1) 和系统 (2) 获得了广义同步 (这里  $\|\cdot\|$  代表欧几里德范数).

设系统 (1) 的输出为

$$s(x) = f(x) + Kx, \quad (4)$$

其中  $K$  为反馈增益矩阵.

设系统 (2) 的输出为

$$h(y) = K \cdot \phi(y). \quad (5)$$

定理 1 设  $D\phi$  为映射  $\phi$  的雅可比矩阵, 且  $D\phi$  可逆. 如果  $(A, I)$  可控, 矩阵  $[I, AI, \dots, A^{n-1}I]$  是满秩的,  $(A - K)$  为指数稳定矩阵, 若响应系统 (2) 满足

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60573172) 和辽宁省教育厅高等学校科学技术研究计划 (批准号: 20040081) 资助的课题.

† E-mail: wangxy@dlut.edu.cn

$$\dot{y} = (D\phi)^{-1}A \cdot \phi(y) + (D\phi)^{-1}(s(x) - h(y)), \tag{6}$$

则系统(1)和系统(2)将获得广义同步,即  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(y(t)) - x(t)\| = 0$ ,且系统(6)是系统(1)的全局观测器.

证明 定义驱动系统(1)和响应系统(2)的广义同步误差为  $e(t) = \phi(y) - x$ ,则误差动力系统可表示为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= D\phi \cdot \dot{y} - \dot{x} \\ &= A\phi(y) + (s(x) - h(y)) - (Ax + f(x)) \\ &= (A - K)e. \end{aligned} \tag{7}$$

由于  $(A - K)$  为指数稳定矩阵,因此  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi(y(t)) - x(t)\| = 0$ ,即系统(1)和系统(2)可以达到广义同步.因为可控矩阵  $[I, AI, \dots, A^{n-1}I]$  满秩,所以,系统(6)是系统(1)的全局观测器.证毕.

由定理 1 可知,根据极点配置技术<sup>[16]</sup>合理地选择反馈增益矩阵  $K$  使得矩阵  $(A - K)$  指数稳定,即可实现系统(1)和系统(2)的广义同步.

### 3. 分段线性 Chen 系统的广义同步

1999 年,Chen 等<sup>[17]</sup>提出了一种混沌吸引子.后来,Aziz-Alaoui 等<sup>[18]</sup>对 Chen 系统进行了改进,提出了分段线性 Chen 系统,其动态方程描述如下:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 &= \text{sgr}(x_1)(c - a - x_3) + cqx_2, \\ \dot{x}_3 &= \text{sgr}(x_2)x_1 - bx_3, \end{aligned} \tag{8}$$

这里参数  $a, b, c$  和  $q$  为常数,  $\text{sgr}(\cdot)$  为标准符号函数.当  $a = 1.18, b = 0.168, c = 7.0, q = 0.1$  时,系统(8)的混沌吸引子在各平面的投影如图 1 所示.

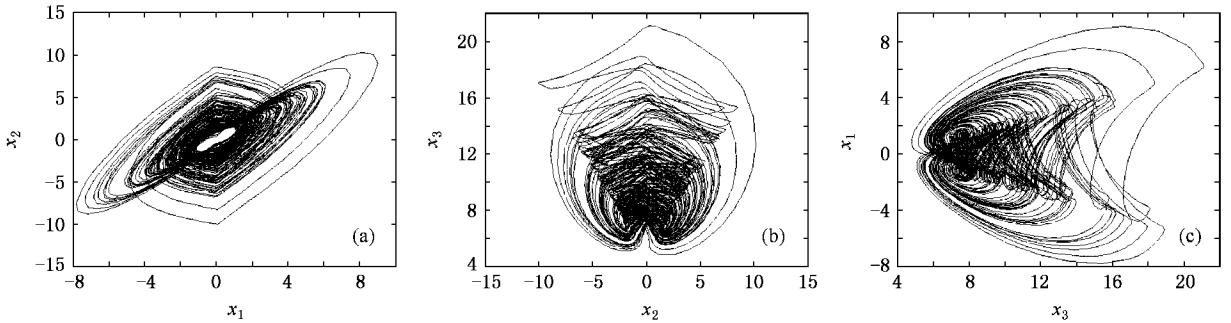


图 1 系统(8)的混沌吸引子在各平面上的投影 (a)平面  $x_1-x_2$  上的投影 (b)平面  $x_2-x_3$  上的投影 (c)平面  $x_3-x_1$  上的投影

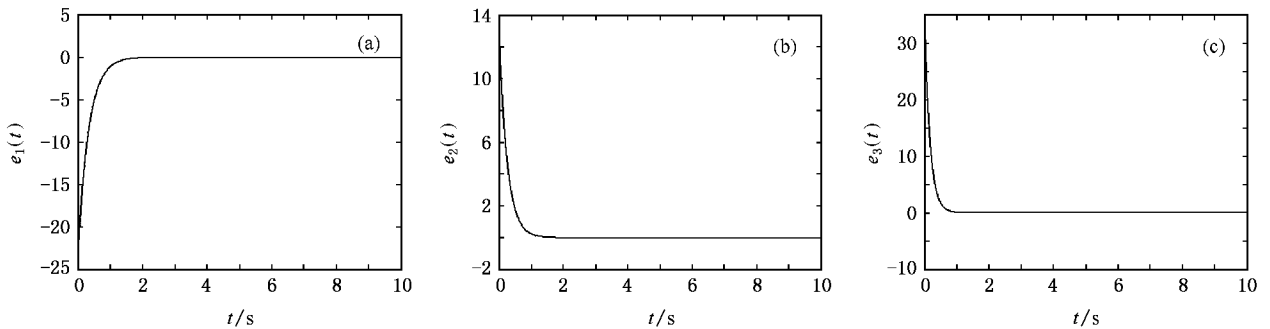


图 2 系统(8)和系统(9)的误差效果图

系统(8)可以表示成(1)式的形式,则

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 0 & cq & -\text{sgr}(x_1) \\ \text{sgr}(x_2) & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

可见  $(A, I)$  是可控的,且  $[I, AI, \dots, A^{n-1}I]$  为满秩矩阵.选取矩阵  $(A - K)$  的特征值为  $[-3, -4, -6]$ ,可以通过极点配置技术得到反馈增益矩阵  $K$ .

定义映射

$$\phi(y) = (-3y_1 + 6, y_1 + y_2, y_3^2/2)^T,$$

则

$$D\phi = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y_3 \end{bmatrix}.$$

由混沌系统的有界性可知,  $D\phi$  可逆.

根据以上参数,按(6)式构造响应系统

$$\dot{y} = (D\phi)^{-1}A \cdot \phi(y) + (D\phi)^{-1}(s(x) - h(y)). \quad (9)$$

驱动系统(8)和响应系统(9)的初始值分别选取为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (5, 5, 15)$ 和 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (8, 10, 10)$ ,则误差系统的初始值为 $(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (-23, 13, 35)$ .图2给出了系统(8)和系统(9)的广义同步误差效果图.从图2可以看出,当 $t$ 接近2.2,1.8和1.1 s时,误差 $e_1(t)$ , $e_2(t)$ 和 $e_3(t)$ 已分别稳定到零点,这表明系统(8)和系统(9)获得了广义同步.

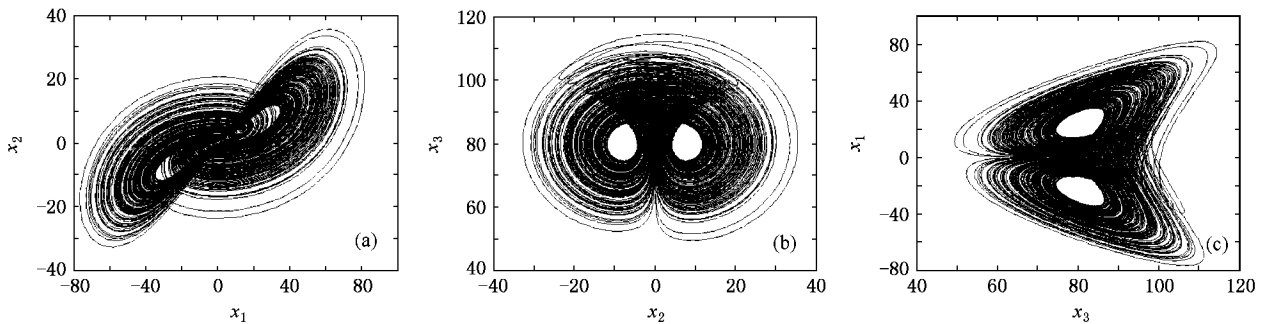


图3 系统(10)的混沌吸引子在各平面上的投影 (a)平面 $x_1-x_2$ 上的投影 (b)平面 $x_2-x_3$ 上的投影 (c)平面 $x_3-x_1$ 上的投影

将系统(10)表示(1)式的形式,则

$$A = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}.$$

$$D\phi = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2y_3 \end{bmatrix}.$$

由混沌系统的有界性可知, $D\phi$ 可逆.

采用以上参数,根据(6)式构造响应系统:

$$\dot{y} = (D\phi)^{-1}A \cdot \phi(y) + (D\phi)^{-1}(s(x) - h(y)). \quad (11)$$

分别选取驱动系统(10)和响应系统(11)的初始值为 $(x_1(0), x_2(0), x_3(0)) = (10, 10, 60)$ 和 $(y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = (15, 20, 10)$ ,则误差系统的初始值为

可见 $(A, I)$ 是可控的,且 $[I, AI, \dots, A^{n-1}I]$ 为满秩矩阵.选取矩阵 $(A - K)$ 的特征值为 $[-5, -2, -3]$ ,可以通过极点配置技术得到反馈增益矩阵 $K$ .

定义映射

$$\phi(y) = (y_1 + y_2, 2y_2, y_3^2)^T,$$

则

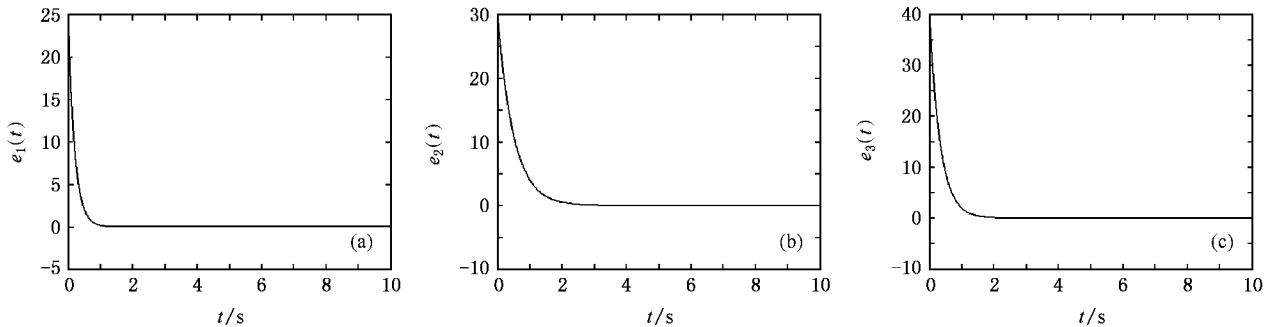


图4 系统(10)和系统(11)的误差效果图

$(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (25, 30, 40)$ . 从误差效果图 4 可以看出, 当  $t$  接近 1.3, 3.2 和 2.1 s 时, 误差  $e_1(t)$ ,  $e_2(t)$  和  $e_3(t)$  已分别稳定到零点, 这表明系统 (10) 和系统 (11) 获得了广义同步.

## 5. 结 论

本文研究了自治混沌系统的广义同步问题. 基

于改进的非线性状态观测器方法, 设计了一种广义同步方案, 并从理论上证明了该方案可以分别实现自治混沌系统的线性和非线性广义同步. 通过对分段线性 Chen 系统和新型 Lorenz 系统的数值仿真实验, 进一步验证了所提方案的有效性. 本方案使得广义同步不依赖于混沌系统线性部分的特性, 且可以通过改变误差系统的特征值来调整误差收敛速率.

- [ 1 ] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [ 2 ] Carroll T L , Pecora L M 1991 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **38** 453
- [ 3 ] Wang X Y 2003 *Chaos in the Complex Nonlinearity System* ( Beijing : Electronics Industry Press ) chapt. 2 ( in Chinese ) [ 王兴元 2003 复杂非线性系统中的混沌(北京:电子工业出版社)第二章 ]
- [ 4 ] Zhou P 2007 *Chin. Phys.* **16** 1263
- [ 5 ] Guan X P , Fan Z P , Chen C L , Hua C C 2002 *Chaotic Control and its Application on Secure Communication* ( Beijing : National Defence Industry Press ) chapt. 9 ( in Chinese ) [ 关新平、范正平、陈彩莲、华长春 2002 混沌控制及其在保密通信中的应用(北京:国防工业出版社)第九章 ]
- [ 6 ] Sundar S , Minai A A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 5456
- [ 7 ] Feki M 2003 *Chaos, Solitons Fract.* **18** 141
- [ 8 ] Parmananda P 1998 *Phys. Lett. A* **240** 55
- [ 9 ] Wang F Q , Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 ( in Chinese )
- [ 王发强、刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055 ]
- [ 10 ] Zhu Z Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6248 ( in Chinese ) [ 朱志宇 2006 物理学报 **55** 6248 ]
- [ 11 ] Suykens J A K , Yang T , Chua L O 1998 *Int. J. Bifur. Chaos* **8** 1371
- [ 12 ] Kilic R 2001 *Int. J. Bifur. Chaos* **16** 1527
- [ 13 ] Yang S S , Duan C K 1998 *Chaos, Solitons Fract.* **10** 1703
- [ 14 ] Yang T , Chua L O 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 215
- [ 15 ] Nijmeijer H , Mareels I M Y 1997 *IEEE Trans. Circ. Sys.* **44** 882
- [ 16 ] Paraskevopoulos P N 2002 *Modern Control Engineering* ( New York : Marcel Dekker ) Chapt. 3
- [ 17 ] Chen G R , Ueta T 1999 *Int. J. Bifur. Chaos* **9** 1465
- [ 18 ] Aziz-Alaoui M A , Chen G R 2002 *Int. J. Bifur. Chaos* **12** 147
- [ 19 ] Qi G Y , Chen G R , Du S Z , Chen Z Q , Yuan Z Z 2005 *Phys. A* **352** 295

# Linear and nonlinear generalized synchronization of autonomous chaotic systems<sup>\*</sup>

Wang Xing-Yuan<sup>†</sup> Meng Juan

(*School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

(Received 21 April 2007; revised manuscript received 18 May 2007)

## Abstract

The generalized synchronization of autonomous chaotic systems is investigated. A new approach is proposed based on the modified state observer method and the pole placement technique, which have a wide scope of applications. The linear and nonlinear generalized synchronizations of autonomous chaotic systems are achieved by using the proposed method. According to the state observer theory, some sufficient conditions of global asymptotic generalized synchronization between the drive and response systems are obtained. Numerical simulations further illustrate the effectiveness of the proposed scheme.

**Keywords** : autonomous chaotic system, generalized synchronization, state observer, piecewise-linear Chen system

**PACC** : 0545, 0555

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573172) and the Superior University Science Technology Research Project of Liaoning Province, China (Grant No. 20040081).

<sup>†</sup> E-mail : wangxy@dlut.edu.cn