

k 光子 Jaynes-Cummings 模型光场的熵压缩^{*}

康冬鹏¹⁾ 任 珉²⁾ 马爱群^{1)B)4)} 钱 妍⁴⁾ 刘正君¹⁾ 刘树田^{1)†}

1) 哈尔滨工业大学物理系, 哈尔滨 150001)

2) 广州大学工程抗震中心, 广州 510405)

3) 广州大学城建学院, 广州 510900)

4) 黑龙江大学物理科学与技术学院, 哈尔滨 150080)

(2007 年 4 月 6 日收到, 2007 年 6 月 10 日收到修改稿)

研究了 k 光子 Jaynes-Cummings 模型光场的熵压缩, 讨论了光子数 k 和原子的初始状态对光场熵压缩的影响. 结果表明, 随光子数 k 的增大, 光场的位置熵压缩愈趋明显, 动量熵压缩量减小; 当 $k \geq 3$ 时, 位置熵始终是被压缩的. 原子的初态对光场的熵压缩也有一定的影响.

关键词: Jaynes-Cummings 模型, 熵压缩

PACC: 4250

1. 引 言

Jaynes-Cummings (JC) 模型^[1]是描述二能级原子和量子光场相互作用的模型, 它在旋转波近似下是可以精确求解的. 已经研究了它的各种性质, 如亚泊松统计、反群聚、压缩、坍塌和回复效应等^[2]. 高激发态 Rydberg 原子和高 Q 值腔的应用, 使得在实验上已经能够观测到理论预测的现象^[3]. 随着实验技术的发展, 人们对多光子 JC 模型给予了越来越多的关注. 例如, 在双光子 JC 模型中, 回复现象比单光子情形下更彻底^[4]. 多光子 JC 模型还给出了多光子激光的理论依据^[5,6]. 除此之外, 人们还研究了多光子 JC 模型的消相干^[7], 压缩和高阶压缩^[8-12]等非经典效应.

另一方面, 传统的光场压缩效应的研究, 一般是从海森堡不确定关系出发, 用均方根偏差量度光场的量子涨落. 如果光场某一正交分量的均方根偏差小于真空极限, 则称光场存在压缩效应. 由于均方根偏差只涉及光场密度矩阵的二阶统计矩, 因而在许多情况下, 这种物理量不能精确量度光场的量子涨落. 方卯发等人提出了建立在量子熵之上的熵压缩的概念, 并研究了单光子 JC 模型光场的熵压缩. 结

果表明, 熵压缩可以更精确的度量光场的量子起伏^[13]. 之后, 双光子 JC 模型场熵的压缩特性^[14]和各种推广的 JC 模型中光场和原子的熵压缩^[15-19]都有了研究. 本文以 k 光子 JC 模型为对象, 研究其光场的熵压缩, 与方差压缩进行比较, 并且讨论原子初始状态对光场熵压缩的影响.

2. k 光子 JC 模型光场的约化密度算符

考虑一个二能级原子和量子光场通过 k 光子过程发生相互作用. 在旋转波近似下, 系统的哈密顿量为

$$H = \hbar\nu a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar\omega\sigma_z + \hbar g(\sigma_+ a^k + a^{+k}\sigma_-), \quad (1)$$

其中, ω 是原子的跃迁频率, ν 是光场的频率, a^\dagger 和 a 分别是光场的产生算符和湮灭算符, g 为光场和原子的耦合常数, σ_z 是原子的泡利算符, σ_+ 和 σ_- 是原子的跃迁算符. 进一步定义系统的自由哈密顿量

$$H_0 = \hbar\nu a^\dagger a + \frac{1}{2} \hbar\omega\sigma_z, \quad (2)$$

和相互作用哈密顿量

$$H_1 = \hbar g(\sigma_+ a^k + a^{+k}\sigma_-). \quad (3)$$

设原子初态为基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 的任意叠

^{*} 国家自然科学基金 (批准号: 10674038, 10604042) 和国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2006CB302901) 资助的课题.

[†] 通讯联系人, E-mail: stliu@hit.edu.cn

加的纯态为

$$|\theta, \varphi\rangle = \cos(\theta/2)|e\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)|g\rangle, \quad (4)$$

而场的初态为相干态为

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} b_n |n\rangle, \quad (5)$$

$$b_n = \exp(in\beta) \exp(-\bar{n}/2) \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}},$$

(4)和(5)式中 $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, 反映原子的极化状态, \bar{n} 和 β 分别为光场的初始平均光子数和相位角. 为方便起见, 设系统处在 k 光子共振条件下 ($\omega = kv$), 光场的初相位 $\beta = 0$. 在相互作用绘景中, 设系统在任意时刻 t 的态矢为

$$|\varphi(t)\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(t)|n, e\rangle + B_n(t)|n, g\rangle]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} [A_n(t)|n, e\rangle + B_{n+k}(t)|n+k, g\rangle]$$

$$+ \sum_{n=0}^{k-1} B_n |n, g\rangle, \quad (6)$$

由于 k 光子相互作用, 系统的态矢在 $|n, e\rangle$ 和 $|n+k, g\rangle$ 之间跃迁. 即原子处于基态时, 光场比原子处于激发态时多 k 个光子. 上式最后一项并不参与相互作用. 将(6)式带入相互作用绘景中态矢的运动方程, 可解得

$$A_n(t) = \cos(\theta/2)b_n \cos\Omega_n t$$

$$- i \sin(\theta/2) e^{i\varphi} b_{n+k} \sin\Omega_n t$$

$$B_n(t) = \sin(\theta/2) e^{i\varphi} b_n \cos\Omega_{n-k} t$$

$$- i \cos(\theta/2) b_{n-k} \sin\Omega_{n-k} t, \quad (7)$$

其中 $n = 0, 1, 2, \dots$, 定义 $b_{-k} = b_{-k+1} = \dots = b_{-1} = 0$, $\Omega_n = g \sqrt{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$. 可以看出, $n \leq k-1$ 时, B_n 不随时间变化. 这说明(6)式最后一项确实不参与相互作用. 光场的约化密度算符为

$$\rho_f(t) = \text{Tr}_A \{ |\varphi(t)\rangle \langle \varphi(t)| \}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} [A_n(t)A_m^*(t)$$

$$+ B_n(t)B_m^*(t)] |n-m\rangle, \quad (8)$$

其中, 下脚标 f 表示场, A 表示原子.

3. 光场的熵压缩

光场的压缩效应是光场的非经典效应之一. 在光通信, 高精度测量, 弱信号检测中有潜在的应用. 传统的光场压缩效应的研究, 一般是从海森堡不确

定关系出发, 用均方根偏差量度光场的量子涨落. 文献[13]提出了光场的熵压缩的概念. 熵对光场的量子起伏更为灵敏, 它可以作为光场压缩的更精确的度量. 光场的位置熵和动量熵分别定义为

$$S_x(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} x |\rho(x, t)| x \ln x |\rho(x, t)| x dx, \quad (9)$$

$$S_p(t) = - \int_{-\infty}^{\infty} p |\rho(p, t)| p \ln p |\rho(p, t)| p dp, \quad (10)$$

与此相应的熵不确定关系为

$$\delta x(t) \delta p(t) \geq \pi e, \quad (11)$$

其中

$$\delta x(t) \equiv \exp[S_x(t)], \quad (12)$$

$$\delta p(t) \equiv \exp[S_p(t)],$$

为熵指数, $x = (a + a^\dagger)/\sqrt{2}$, $p = (a - a^\dagger)/\sqrt{2}i$. 若

$$\delta A < \sqrt{\pi e} \quad (A = x \text{ 或 } p), \quad (13)$$

则称光场的 A 分量出现熵压缩. 本文将通过数值计算讨论 k 光子 JC 模型的熵压缩, 对比它和方差压缩的关系, 并讨论原子初态对熵压缩的影响.

3.1. k 光子 JC 模型光场的熵压缩

为方便讨论, 先假设原子初始时刻处于基态 $|g\rangle$ ($\theta = \pi, \varphi = 0$). 根据(9)和(12)式, 计算 k 光子 JC 模型中光场的位置熵随时间的演化, 如图 1 所示.

图 1 中, 当 $\delta x_f(t) < \pi e \approx 2.92267$ 时 (图 1 中横线以下), 光场的位置分量出现熵压缩. 由图 1 可以看出, 光场的位置熵随时间上下起伏, k 越大, 起伏就越剧烈, 周期就越小. 图 1(a) 中, 光场在大多数时刻下没有呈现出熵压缩. 图 1(b) 中, 光场只在少部分时刻下没有呈现出熵压缩. 图 1(c) 中, 光场在任意时刻的位置熵都是压缩的. 因此, 随着 k 的增大, 光场的位置熵的压缩变强. 另一方面, 根据熵不确定关系(11)式可知, 在相同的条件下, k 越大, 动量熵就越大, 越不容易呈现出压缩.

为了同传统的压缩进行比较, 求出了均方根偏差 $\Delta x_f(t)$ 和 $\Delta p_f(t)$:

$$[\Delta x_f(t)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1) \chi A_n^*(t) A_n(t)$$

$$+ B_n^*(t) B_n(t)]$$

$$+ \sqrt{(n+2) \chi (n+1) \chi} A_n^*(t) A_{n+2}(t)$$

$$+ B_n^*(t) B_{n+2}(t)]$$

$$+ \sqrt{(n+1) \chi (n+2) \chi} A_{n+2}^*(t) A_n(t)$$

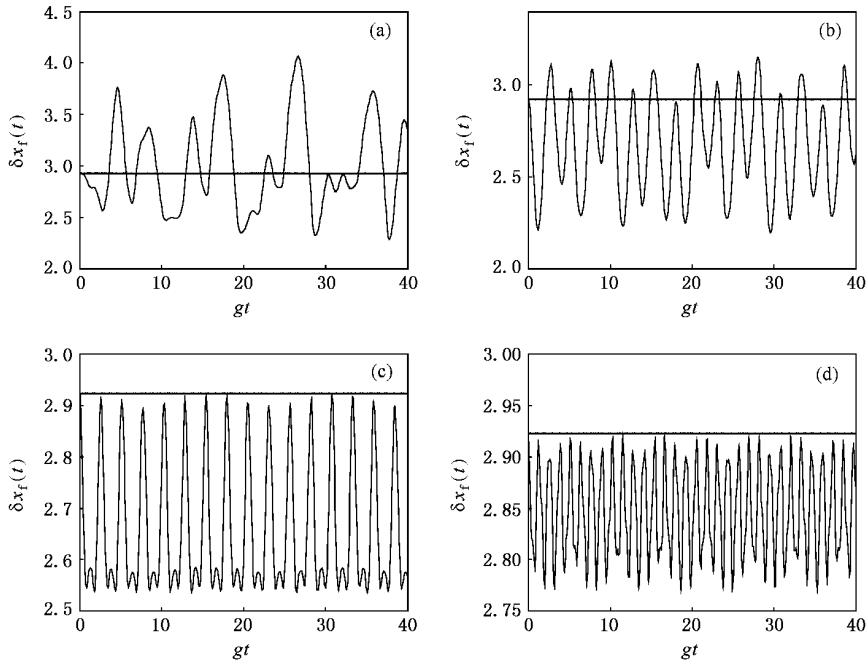


图1 原子初始时刻处于基态,平均光子数 $\bar{n} = 0.5$ 时 k 光子 JC 模型中光场的位置熵压缩
(a) $k = 1$ (b) $k = 2$ (c) $k = 3$ (d) $k = 4$

$$\begin{aligned}
 & + B_{n+2}^*(t)B_n(t)) \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{n+1}(A_n^*(t)A_{n+1}(t) \right. \\
 & + B_n^*(t)B_{n+1}(t)) \\
 & + \sqrt{n+1}(A_{n+1}^*(t)A_n(t) \\
 & + B_{n+1}^*(t)B_n(t))] \Big\}^2, \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [\Delta p_f(t)]^2 & = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} [(2n+1)(A_n^*(t)A_n(t) \\
 & + B_n^*(t)B_n(t)) \\
 & - \sqrt{(n+2)(n+1)}(A_n^*(t)A_{n+2}(t) \\
 & + B_n^*(t)B_{n+2}(t)) \\
 & - \sqrt{(n+2)(n+1)}(A_{n+2}^*(t)A_n(t) \\
 & + B_{n+2}^*(t)B_n(t))] \\
 & - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [\sqrt{n+1}(A_n^*(t)A_{n+1}(t) \right. \\
 & + B_n^*(t)B_{n+1}(t)) \\
 & - \sqrt{n+1}(A_{n+1}^*(t)A_n(t) \\
 & + B_{n+1}^*(t)B_n(t))] \Big\}^2, \quad (15)
 \end{aligned}$$

在相同的初始条件下,选取 $\Delta x_f(t)$ 作数值计算,如图2所示.当 $\Delta x_f(t) < 1/\sqrt{2} \approx 0.7071$ 时(图2

中横线以下)则 x 分量出现方差压缩.

从图2中可以看出,随着 k 的增大,光场的 x 分量的方差压缩也变剧烈.当 $k = 4$ 时,光场在任意时刻 x 分量都呈现出方差压缩.对比图1和图2可以看出,当光场 x 分量都呈现出方差压缩时,其位置熵一定呈现出熵压缩.但是当存在熵压缩时,却不一定存在方差压缩. $\Delta x_f(t)$ 和 $\delta x_f(t)$ 在量度光场的压缩效应时存在的差别是由于均方根偏差 $\Delta x_f(t)$ 仅包含光场密度矩阵的二阶统计矩,而熵 $\delta x_f(t)$ 包含了光场密度矩阵的高阶统计矩,它比均方根偏差 $\Delta x_f(t)$ 更敏感于光场的压缩效应,是量度光场的压缩效应的高灵敏度物理量^[13,20].

3.2. 原子初态对光场熵的影响

为了获得更大程度的光场熵压缩,讨论原子初态对光场熵压缩的影响.由于无法给出光场熵压缩的解析解,只能选取一定的 k 值作数值计算,并对结果进行讨论.以下讨论单光子 JC 模型 $\varphi = 0$ 时,不同 θ 值对光场的熵的影响,如图3所示.

结合图3和图1(a)可以看出,当 $\theta = \pi$,即原子初始时刻处于基态 $|g\rangle$ 时,光场的位置熵有最大程度的熵压缩.根据熵不确定关系,此时光场的动量熵压缩程度最小.当原子初始时刻处于基态和激发态

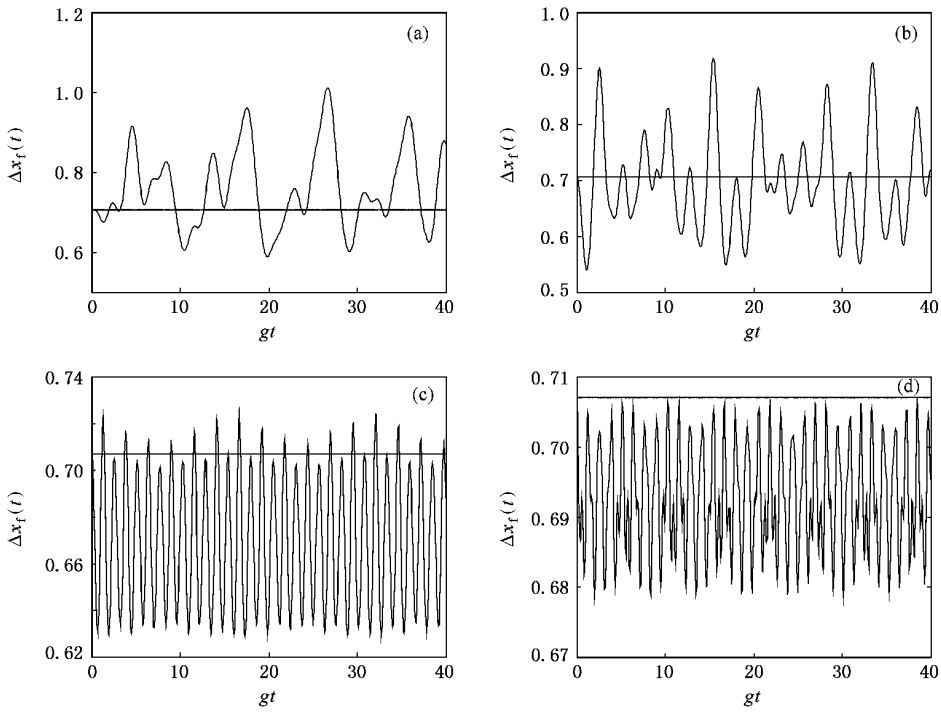


图2 原子初始时刻处于基态,平均光子数 $\bar{n} = 0.5$ 时 k 光子 JC 模型中光场 x 分量的方差压缩 (a) $k = 1$ (b) $k = 2$ (c) $k = 3$ (d) $k = 4$

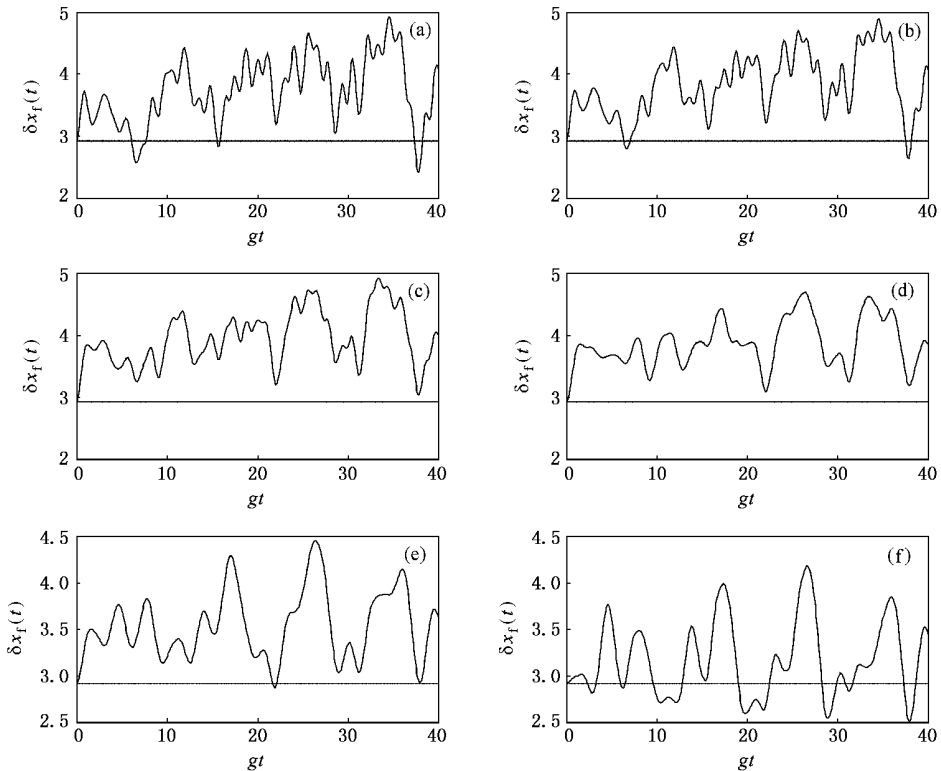


图3 $\varphi = 0$ 时,不同 θ 值对单光子 JC 模型位置熵的影响 (a) $\theta = 0$ (b) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (c) $\theta = \frac{\pi}{3}$ (d) $\theta = \frac{\pi}{2}$; (e) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (f) $\theta = \frac{5\pi}{6}$

的某种叠加态时(图 3(c)和图 3(d)的情况),光场的位置熵在任何时刻都无压缩.此时,若改变 φ 的值,则有可能获得熵压缩,如图 4 所示.

对双光子 JC 模型,文献 [14]中已做了讨论.当 $\varphi = 0, \pi$ 时,位置熵和动量熵均不能被压缩.当 $\varphi =$

$\frac{\pi}{2}$ 时,原子初始时处于基态的概率越大,位置熵的压缩就越深^[14].可以看出,对单光子 JC 模型和双光子 JC 模型,原子的初始状态对光场熵压缩的影响并没有相同的规律.

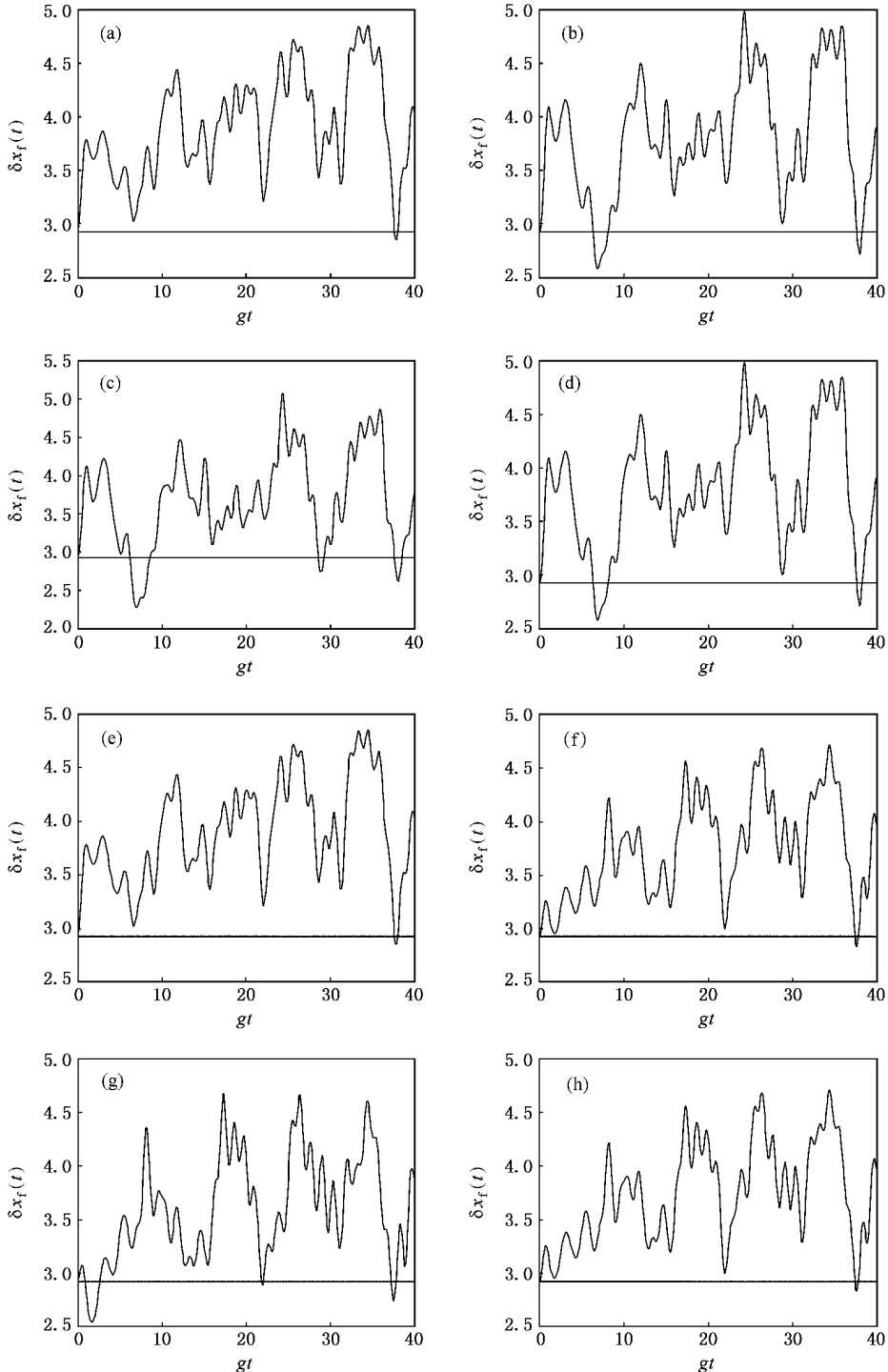


图 4 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时不同 φ 值对单光子 JC 模型位置熵的影响 (a) $\varphi = 0$ (b) $\varphi = \frac{\pi}{4}$ (c) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (d) $\varphi = \frac{3\pi}{4}$; (e) $\varphi = \pi$ (f) $\varphi = \frac{5\pi}{4}$ (g) $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ (h) $\varphi = \frac{7\pi}{4}$

4. 结 论

本文解出了 k 光子 JC 模型光场的约化密度算符, 然后讨论了不同 k 值对光场熵压缩的影响. 结果表明, k 越大, 光场的位置熵上下起伏越剧烈, 压缩也越明显. 当 $k \geq 3$ 时, 位置熵在任何时刻都是压缩的. 另一方面, k 越小, 光场的动量熵压缩越明显.

当 $k \geq 3$ 时, 动量熵在任何时刻都无压缩. 此外, 通过对比 k 光子 JC 模型光场的熵压缩和方差压缩可知, 当光场 x 分量都呈现出方差压缩时, 其位置熵一定呈现出熵压缩. 但是当存在熵压缩时, 却不一定存在方差压缩. 此外, 原子的初态也对光场的熵压缩有一定的影响. 对单光子 JC 模型, 原子初始时刻处于基态时, 光场具有最大的位置熵压缩和最小的动量熵压缩.

- [1] Jaynes E T, Cummings F W 1963 *Proc. IEEE* **51** 89
- [2] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (UK: Cambridge University Press) p193—219
- [3] Rempe G, Walther H, Klein N 1985 *Phys. Rev. Lett.* **58** 353
- [4] Vogel W, Welsch D G, Laine L 1987 *J. Opt. Soc. Am. B* **4** 1633
- [5] Singh S 1982 *Phys. Rev. A* **25** 3206
- [6] Font J L, Fernández-Solev J J, Vilaseca R, Gauthiev D J 2005 *Phys. Rev. A* **72** 63810
- [7] Kuang L M, Chen X, Ge M L 1995 *Phys. Rev. A* **52** 1857
- [8] Gerry C C, Moyer P J 1988 *Phys. Rev. A* **38** 5665
- [9] Kien F L, Kozirowski M, Quang T 1988 *Phys. Rev. A* **38** 263
- [10] Mir M A, Razmi M S K 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6071
- [11] Abdel-Hafez A M, Obada A S F 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6017
- [12] Mahran M H, Obada A S F 1990 *Phys. Rev. A* **42** 1718
- [13] Fang M F, Chen J M 2001 *Acta Opt. Sin.* **21** 8 (in Chinese) [方卯发、陈菊梅 2001 光学学报 **21** 8]
- [14] Li Y P, Liu Y L, He J Y 2003 *Acta Sinica Quantum Optica* **9** 112 (in Chinese) [李永平、柳永亮、贺金玉 2003 量子光学学报 **9** 112]
- [15] Liao X P, Fang M F 2004 *Acta Opt. Sin.* **24** 983 (in Chinese) [廖湘萍、方卯发 2004 光学学报 **24** 983]
- [16] Liu X J, Zhou B J, Fang M F, Zhou Q P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 704 (in Chinese) [刘小娟、周并举、方卯发、周清平 2006 物理学报 **55** 704]
- [17] Huang C J, Zhou M, Li J F, He H Y 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 805 (in Chinese) [黄春佳、周明、厉江帆、贺慧勇 2002 物理学报 **51** 805]
- [18] Mahmoud A A, Abdalla M S, Obada A S F 2002 *J. Opt. B: Quantum Semiclass. Opt.* **4** 134
- [19] Abdalla M S, Hassan S S, Mahmoud A A 2005 *Opt. Commu.* **244** 431
- [20] Orłowski A 1997 *Phys. Rev. A* **56** 2545

Entropy squeezing of the optical field in k -photon Jaynes-Cummings model^{*}

Kang Dong-Peng¹⁾ Ren Min²⁾ Ma Ai-Qun^{1)B)†)} Qian Yan⁴⁾ Liu Zheng-Jun¹⁾ Liu Shu-Tian^{1)†)}

1) *Department of Physics ,Harbin Institute of Technology ,Harbin 150001 ,China)*

2) *Earthquake Engineering Research & Test Center ,Guangzhou University ,Guangzhou 510405 ,China)*

3) *City Construction College ,Guangzhou University ,Guangzhou 510900 ,China)*

4) *Physics Science and Technology School ,Heilongjiang University ,Harbin 150080 ,China)*

(Received 6 April 2007 ; revised manuscript received 10 June 2007)

Abstract

We investigated the field entropy squeezing of k -photon Jaynes-Cummings model ,discuss the influence of the photon number k and the initial state of the atom on the entropy squeezing. The results show that with the photon number k increasing ,the position entropy squeezing will be enhanced and the momentum entropy squeezing reduced. When $k \geq 3$,the position entropy is always squeezed. The initial state of the atom also shows some influence on the entropy squeezing.

Keywords : Jaynes-Cummings model , entropy squeezing

PACC : 4250

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10674038 ,10604042) and the National Basic Research Program of China (Grant No. 2006CB302901).

[†] Corresponding author. E-mail :stliu@hit.edu.cn