

利用交叉克尔非线性效应实现纠缠转移*

杨 健¹⁾ 任 珉²⁾ 於亚飞¹⁾ 张智明^{1)†} 刘颂豪¹⁾

1) 华南师范大学信息光电子科技学院, 广东省光子信息技术重点实验室, 广州 510006)

2) 广州大学工程抗震中心, 广州 510405)

(2007 年 4 月 24 日收到, 2007 年 6 月 6 日收到修改稿)

提出了一种基于交叉克尔非线性效应的纠缠态转移方案. 利用该方案可以将离散变量光场态之间的纠缠关系转移到连续变量光场态(相干态)上. 通过适当设置初始相干态的振幅, 该方案可以使转移后的纠缠相干态处于最大纠缠态.

关键词: 交叉克尔效应, 纠缠转移, 纠缠相干态

PACC: 4250, 0365, 0367

1. 引 言

纠缠态是量子力学中的一个重要概念, 也是现代量子计算和量子信息领域中被广泛研究和利用的重要资源. 利用两个两态粒子构成的 Einstein-Podolsky-Rosen(EPR)对, 通过检验其违背 Bell 不等式, 可以否定局域隐变量理论^[1]. 因此制备和探测纠缠态成为检验量子力学正确性的重要依据. 随着研究工作的进展, 许多作者先后提出了制备两体以至多体纠缠态的实验方案^[2-5], 并且将纠缠态广泛运用到量子通信^[6]、量子隐形传态及量子计算^[7]等领域之中.

近年来连续变量量子信息处理受到日益广泛的关注, 与离散变量相比, 基于连续变量的量子信息方案在纠缠态制备、操控和测量等方面有更好的物理可实现性, 并且具有更高的工作效率^[8]. 人们提出了许多制备和利用连续变量纠缠态的量子信息方案^[9-11], 并且把一些原本在离散变量系统中实现的方案移植到连续变量量子信息中, 如连续变量量子密钥分发及量子隐形传态等. 本文在先前工作^[12, 13]的基础上, 提出一种基于交叉克尔非线性效应的纠缠转移方案. 该方案能够将两离散变量光场间的纠缠关系转移到相干态光场上, 并且只要适当选取相干态光场的初始振幅, 就能使纠缠转移后的相干态

光场处于最大纠缠态.

2. 克尔介质中的非线性过程

两束光同时入射到克尔介质时, 由于交叉克尔效应的存在, 两束光将发生相互作用. 相互作用哈密顿量可以写成

$$\hat{H}_{ck} = \hbar K \hat{n}_a \hat{n}_b, \quad (1)$$

其中 K 代表耦合系数, 反映交叉克尔效应的强度, \hat{n}_a 和 \hat{n}_b 分别是两相互作用光场模式 a 和 b 的光子数算符. 与上述哈密顿量对应的时间演化算符为

$$U(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \hat{H}_{ck} t\right) = \exp(-i \hat{n}_a \hat{n}_b K t). \quad (2)$$

考虑两入射光分别为光子数态和相干态的情形(如图 1 所示), 则两束光在介质中传播时间 t 后的光场态演变为

$$U(t) |n\rangle_a |\alpha\rangle_b = |n\rangle_a |\alpha e^{-inKt}\rangle_b, \quad (3)$$

其中处于 Fock 态的模 a 的状态不发生变化, 而处于相干态的模 b 的相位改变了 $n\tau$ ($\tau = Kt$). 特别是当

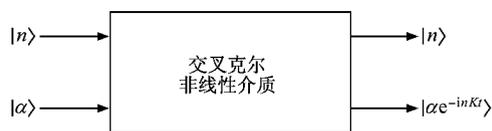


图 1 Fock 态光场与相干态光场在交叉克尔介质中相互作用

* 国家自然科学基金(批准号: 60578055, 10404007)资助的课题.

† 通讯联系人, E-mail: zmzhang@senu.edu.cn

入射光场 a 处于单光子态 $|1_a\rangle$ 时,光场 b 的末态为 $|\alpha e^{-i\tau}\rangle_b$, 相位改变量 $\tau = Kt$ 由克尔效应耦合系数和相互作用时间共同决定.

3. 纠缠转移方案

本节讨论纠缠转移的具体方案,即讨论如何将已经建立的离散变量光场纠缠态关系转移到连续变量光场上.我们首先利用单光子通过分束器产生离散变量光场纠缠态.分束器的量子光学模型如图 2 所示.

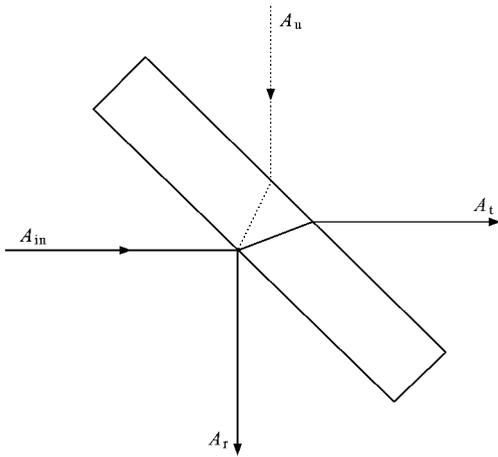


图 2 利用分束器产生离散变量光场纠缠态

根据分束器的量子光学模型,当入射光仅从 A_{in} 端口进入分束器时,即使端口 A_u 处于真空态,分束

器的输出仍由两个输入模式共同决定.变换关系可以用矩阵形式给出^[14]:

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_r \\ \hat{a}_l \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \hat{a}_{in} \\ \hat{a}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\epsilon} & \sqrt{1-\epsilon} \\ \sqrt{1-\epsilon} & -\sqrt{\epsilon} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{a}_{in} \\ \hat{a}_u \end{pmatrix}, \quad (4)$$

其中参量 ϵ 是分束器的反射率, $\hat{a}_{in}, \hat{a}_u, \hat{a}_r, \hat{a}_l$ 分别是分束器四个端口处光场的光子湮灭算符,矩阵 M 描述分束器的变换方式.在本方案中,我们采用的是 50/50 分束器,即 $\epsilon = 1/2$,则上述变换关系可以简化为

$$\begin{aligned} \hat{a}_l &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{in} - \hat{a}_u), \\ \hat{a}_r &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{in} + \hat{a}_u), \end{aligned} \quad (5)$$

对上式的左右两边取厄米共轭,则可以将变换关系改写为

$$\begin{aligned} \hat{a}_{in}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_r^+ + \hat{a}_l^+), \\ \hat{a}_u^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_r^+ - \hat{a}_l^+). \end{aligned} \quad (6)$$

若使单光子从 a_{in} 端口输入分束器,则可以计算两输出端的量子态为

$$\begin{aligned} |1_{in}\rangle|0_u\rangle &= \hat{a}_{in}^+|0_{in}\rangle|0_u\rangle \xrightarrow{BS} \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_r^+ + \hat{a}_l^+)|0_r\rangle|0_l\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_r\rangle|0_l\rangle + |0_r\rangle|1_l\rangle). \end{aligned} \quad (7)$$

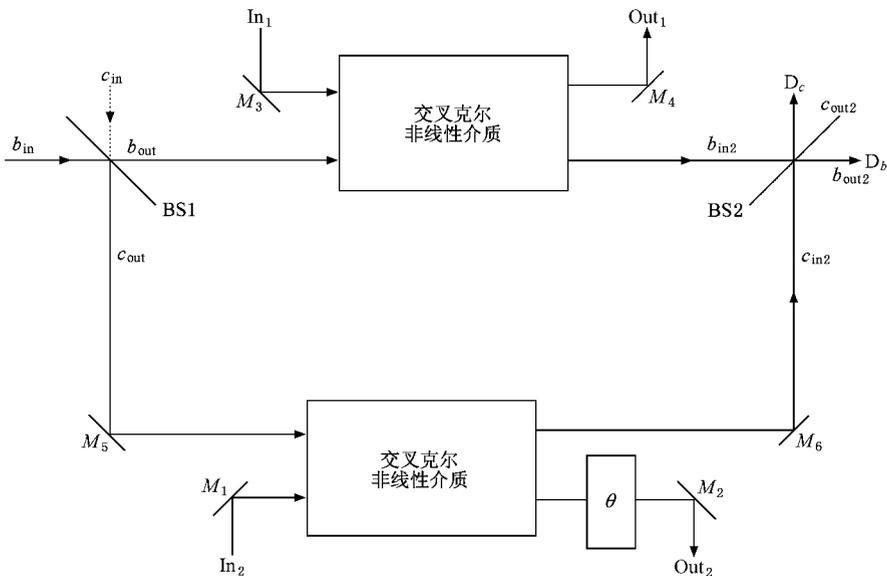


图 3 纠缠转移方案原理图

需要注意的是经过分束器变换,两个输出光场已构成最大纠缠态.所谓纠缠转移就是将上述纠缠光场转移到原本相互独立的相干态光场上得到如下形式的纠缠相干态:

$$|\Phi_{\pm 12}\rangle = N_{\pm}(|-\alpha_1\rangle - \beta_2 \pm |\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle), \quad (8)$$

其中 $N_{\pm} = \{2 \pm 2\exp[-\chi(|\alpha|^2 + |\beta|^2)]\}^{-1/2}$ 是归一化因子.

实验方案如图 3 所示. BS1 和 BS2 是两个相同的 50/50 分束器. b_{in} 和 c_{in} 是 BS1 的两个输入端,单光子从 b_{in} 进入分束器后被转化为两个光场模式 b_{out} 和 c_{out} . 根据上面的讨论,分束器输出的两个光场处于最大纠缠态:

$$|1_b\rangle|0_c\rangle \xrightarrow{\text{BS}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|1_b\rangle|0_c\rangle + |0_b\rangle|1_c\rangle). \quad (9)$$

为了实现纠缠转移,我们再令分束器 BS1 的两个输出模式分别与从 In_1 和 In_2 端口输入的相干态光场模式 $|\alpha_1\rangle$ 和 $|\beta_2\rangle$ 相互作用.此过程可以用 Fock 态与相干态在克尔介质中相互作用的演化算符表达出来:

$$|\Phi(\tau_1, \tau_2)_{bc12}\rangle = \hat{U}_{c2}(\tau_2)\hat{U}_{b1}(\tau_1) \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|1_b\rangle|0_c\rangle + |0_b\rangle|1_c\rangle)|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle \right], \quad (10)$$

其中 τ_1, τ_2 分别是交叉克尔效应引起的相干态相位改变量.通过调整相互作用时间及交叉克尔效应耦合系数,可以使得 $\tau_1 = \tau_2 = \pi$,并使光场模式 2 通过移相器改变相位 $\theta = \pi$,从而得到

$$|\Phi(\pi, \pi)_{bc12}\rangle = N_0(|1_b\rangle|0_c\rangle - |\alpha_1\rangle - \beta_2 + |0_b\rangle|1_c\rangle|\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle), \quad (11)$$

其中 $N_0 = 1/\sqrt{2}$ 是归一化因子.注意到此时光场的四个模式已经相互关联起来,我们再令光场模式 b 和 c 在分束器 BS2 处发生干涉.根据方程(6)给出的换算关系,我们得到分束器 BS2 对两输入光的变换公式:

$$\begin{aligned} \hat{b}_{in2}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_{out2}^+ + \hat{b}_{out2}^+), \\ \hat{c}_{in2}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{c}_{out2}^+ - \hat{b}_{out2}^+), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $\hat{b}_{in2}^+, \hat{c}_{in2}^+, \hat{b}_{out2}^+, \hat{c}_{out2}^+$ 分别是分束器 BS2 处输入输出光场的光子产生算符.因此可以计算出经过分束器 BS2 后的光场为

$$N_1[|0_b\rangle|1_c\rangle(|-\alpha_1\rangle - \beta_2 + |\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle)$$

$$+ |1_b\rangle|0_c\rangle(|-\alpha_1\rangle - \beta_2 - |\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle)], \quad (13)$$

其中 $N_1 = 1/2$ 也是归一化因子.经探测器 D_b 和 D_c 的测量(13)式描述的光场将以 50% 的概率分别塌缩到纠缠相干态 $(|-\alpha_1\rangle - \beta_2 \pm |\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle)$,即方程(8)给出的形式,其中正负号的选取根据探测结果(是探测器 D_b 还是探测器 D_c 探测到光子)来确定.若 D_b 探测到光子,则光场塌缩到纠缠相干态 $|\Phi_{n-12}\rangle = (|-\alpha_1\rangle - \beta_2 - |\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle)$,若 D_c 探测到光子,则光场塌缩到纠缠相干态 $|\Phi_{p-12}\rangle = (|-\alpha_1\rangle - \beta_2 + |\alpha_1\rangle|\beta_2\rangle)$,这样我们就将离散变量光场态之间的纠缠关系转移到连续变量光场态上.

4. 纠缠度的分析

以下对方程(8)所描述的纠缠相干态的纠缠度进行分析.可以引入在非正交相干态 $\{|\alpha_f\rangle, |\beta_f\rangle\}$ 所生成希尔伯特空间(其中 $f=1, 2$ 代表光场的模式)上的正交基^[15]:

$$\begin{aligned} |\psi_+\rangle_f &= \frac{1}{N_f}(e^{-i\phi_f/2}\cos\theta_f|\alpha_f\rangle - e^{-i\phi_f/2}\sin\theta_f|\beta_f\rangle), \\ |\psi_-\rangle_f &= \frac{1}{N_f}(-e^{-i\phi_f/2}\sin\theta_f|\alpha_f\rangle + e^{-i\phi_f/2}\cos\theta_f|\beta_f\rangle), \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$N_f = \cos(2\theta_f),$$

$$\sin(2\theta_f) = |\langle_f|\alpha\rangle\langle_f|\beta\rangle|,$$

$$\exp(-i\phi_f) = \langle_f|\alpha\rangle\langle_f|\beta\rangle / \langle_f|\alpha\rangle\langle_f|\alpha\rangle.$$

容易验证方程(14)引入的态矢量满足正交归一化条件:

$$\begin{aligned} \langle_f|\psi_+\rangle\langle_f|\psi_+\rangle &= \langle_f|\psi_-\rangle\langle_f|\psi_-\rangle = 1, \\ \langle_f|\psi_+\rangle\langle_f|\psi_-\rangle &= 0. \end{aligned}$$

对方程(14)进行反变换可以得到

$$\begin{aligned} |\alpha_f\rangle &= e^{i\phi_f/2}\cos\theta_f|\psi_+\rangle_f + e^{i\phi_f/2}\sin\theta_f|\psi_-\rangle_f, \\ |\beta_f\rangle &= e^{-i\phi_f/2}\sin\theta_f|\psi_+\rangle_f + e^{-i\phi_f/2}\cos\theta_f|\psi_-\rangle_f. \end{aligned} \quad (15)$$

我们利用上面引入的正交归一化矢量,对具有如下形式的纠缠相干态进行分析:

$$|\Phi_{12}\rangle = |\alpha_1\rangle|\alpha_2\rangle_{12} + e^{i\psi}|\beta_1\rangle|\beta_2\rangle_{12}. \quad (16)$$

如果上述量子态对应的约化密度算符满足 $\rho_1 = \text{Tr}_2(|\Phi_{12}\rangle\langle\Phi_{12}|) \propto I_1$ 这里 I_1 表示单位算符,则光场模式 1 和 2 处于最大纠缠态^[15].利用方程(14)引入的归一化正交基,可以计算出

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \text{Tr}_2(|\Phi_{12}\rangle\langle\Phi_{12}|) \\ &= |\alpha_{1-1}\alpha_1| + e^{i(\phi_2-\psi)} \text{sin}(2\theta_2) |\alpha_{1-1}\beta_1| \\ &\quad + e^{i(\psi-\phi_2)} \text{sin}(2\theta_2) |\beta_{1-1}\alpha_1| + |\beta_{1-1}\beta_1| \quad (17) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 + \text{sin}(2\theta_1)\text{sin}(2\theta_2)\cos\psi_0 \\ \text{sin}(2\theta_1) + \text{sin}(2\theta_2) [e^{-i\psi_0}\cos^2\theta_1 + e^{i\psi_0}\sin^2\theta_1] \\ \text{sin}(2\theta_1) + \text{sin}(2\theta_2) [e^{i\psi_0}\cos^2\theta_1 + e^{-i\psi_0}\sin^2\theta_1] \\ 1 + \text{sin}(2\theta_1)\text{sin}(2\theta_2)\cos\psi_0 \end{array} \right), \quad (18)$$

其中 $\psi_0 = \psi - \phi_1 - \phi_2$. 为了使非对角元等于零, 可以取

$$\text{sin}2\theta_1 = \text{sin}2\theta_2, \quad (19)$$

$$\psi_0 = \pi. \quad (20)$$

令方程(16)中的 $\alpha_1 = -\alpha, \beta_1 = \alpha, \alpha_2 = -\beta, \beta_2 = \beta$ 可以得到量子态:

$$|\Phi_{012}\rangle = N_{\psi}(|-\alpha_{-1}| - \beta_{-2} + e^{i\psi}|\alpha_{-1}|\beta_{-2}),$$

并且满足位相关系 $\phi_1 = \phi_2 = 0$. 根据方程(19)(20)可以知道, 当两相干态光场的振幅相等, 且满足 $\psi_0 = \psi = \pi$ 时, 量子态 $|\Phi_0(\psi = \pi)\rangle = N_{\psi}(|-\alpha_{-1}| - \beta_{-2} - |\alpha_{-1}|\beta_{-2})$ 处于最大纠缠态. 具体到我们提出的纠缠转移方案, 如果输入相干态光场的振幅相同, 那么纠缠转移后系统输出的量子态 $|\Phi_{n12}\rangle$ 是最大纠缠态, 而 $|\Phi_p12\rangle$ 一般不是最大纠缠态. 另外, 如果输入相干态光场 $|\alpha_{-1}$ 和 $|\beta_{-2}$ 的振幅满足条件 $|\alpha| \gg 1, |\beta| \gg 1$ 可以计算得到 $\text{sin}2\theta_1 \approx 0, \text{sin}2\theta_2 \approx 0$. 容易看出此时方程(18)中, 无论 $\psi_0 = \psi$ 取何值, 矩阵的非对角元都近似等于 0, 因此输出的光场态 $|\Phi_{n12}\rangle, |\Phi_p12\rangle$ 都是最大纠缠态.

再利用(15)式, 可以计算出上述约化密度算符在正交基 $|\psi_{+1}\rangle, |\psi_{-1}\rangle$ 下的密度矩阵为

通过上面的分析不难发现: 利用本方案进行纠缠交换后, 光场的纠缠度与初始相干态的振幅有关. 对一般情况而言, 如果两相干态光场的初始振幅相同, 则转移后的纠缠相干态有一半概率处于最大纠缠态, 而当两相干态光场的初始振幅足够大时, 即使它们的初始振幅不相等, 纠缠转移后的光场都处于最大纠缠态.

5. 结 论

提出了一种基于交叉克尔效应的纠缠转移方案. 该方案可以将离散变量光场态之间的纠缠关系转移到连续变量光场态上. 与文献[15]中基于腔量子电动力学提出的方案相比本方案也是利用类交叉克尔效应实现纠缠转移, 但不同之处在于本方案主要针对光场态之间的纠缠交换. 本方案所使用的线性光学器件、非线性介质和单光子探测器在量子光学中都有比较广泛的应用, 因此本方案具有较好的物理可实现性.

- [1] Song K H, Guo G C 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 661 (in Chinese)
[宋克慧、郭光灿 1999 物理学报 **48** 661]
- [2] Raimond J M, Brune M, Haroche S 2001 *Rev. Mod. Phys.* **73** 565
- [3] Cirac J I, Zoller P 1994 *Phys. Rev. A* **50** R2799
- [4] Aspect A, Dalibard J, Roger G 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1804
- [5] Clauser J, Freedman S 1972 *Phys. Rev. Lett.* **28** 938
- [6] Cai Q Y, Li B W 2004 *Phys. Rev. A* **69** 54301
- [7] Cai Q Y 2004 *Chin. Phys. Lett.* **21** 1189
- [8] Braunstein S L, van Loock P 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 513
- [9] Pan J W, Daniell M, Gasparoni S, Weihs G, Zeilinger A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 4435

- [10] Liu C L, Zheng Y Z 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 6222 (in Chinese)
[刘传龙、郑亦庄 2006 物理学报 **55** 6222]
- [11] Sanders B C 1992 *Phys. Rev. A* **45** 6811
- [12] Zhang Z M 2006 Preprint: quan-ph/0604128
- [13] Zhang Z M, Khosa A H, Ikram M, Zubairy M S 2007 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **40** 1917
- [14] Bacher H A, Ralph T 2004 *A Guide to Experiments in Quantum Optics* (Weinheim: Wiley-VCH)
- [15] Lee J, Paternostro M, Ogden C, Cheong Y W, Bose S, Kim M S 2006 *New J. Phys.* **8** 23

Entanglement transfer via cross-Kerr nonlinearity^{*}

Yang Jian¹⁾ Ren Min²⁾ Yu Ya-Fei¹⁾ Zhang Zhi-Ming^{1)†} Liu Song-Hao¹⁾

¹⁾ *Laboratory of Photonic Information Technology, School of Information and Photoelectronic Science and Engineering, South China Normal University, Guangzhou 510006, China*

²⁾ *Earthquake Engineering Research & Test Center, Guangzhou University, Guangzhou 510405, China*

(Received 24 April 2007 ; revised manuscript received 6 June 2007)

Abstract

We propose a scheme for realizing entanglement transfer based on the cross-Kerr nonlinear interaction between field-modes. By using this scheme the entanglement can be transferred from the field-states with discrete variables to the field-states with continuous variables. By suitably choosing the amplitude of the initial coherent states, we can obtain the maximum entangled coherent states.

Keywords : cross-Kerr nonlinearity, entanglement transfer, entangled coherent states

PACC : 4250, 0365, 0367

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60578055, 10404007).

[†] Corresponding author. E-mail: zmzhang@scnu.edu.cn