第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1307-04
物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA
Vol.57, No.3, March, 2008

一维减幅-增幅谐振子的守恒量与对称性

楼智美†

(绍兴文理学院物理系,绍兴 312000)

(2007 年 3 月 8 日收到;2007 年 6 月 16 日收到修改稿)

从一维减幅-增幅谐振子的运动微分方程出发得到系统的运动积分常数,从而得到系统的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数,再根据 Hamilton 函数的形式假定守恒量的形式,由 Poisson 括号的性质得到了系统的三个守恒量,并讨论与三个守恒量相应的无限小变换的 Noether 对称性与 Lie 对称性.还对守恒量与对称性的物理意义作了合理的解释.

关键词:一维减幅-增幅谐振子,守恒量,Noether 对称性,Lie 对称性

PACC:0320

1. 引 言

力学系统的对称性与守恒量紧密地联系在一起,关于力学系统对称性与守恒量的研究已渗透到数学、力学、物理学等各个领域.寻求力学系统的对称性和守恒量已成为近代分析力学的一大热点问题.众所周知,已知力学系统的 Lagrange 函数(或 Hamilton 函数)运用 Lagrange 方程(或 Hamilton 正则方程)可得到系统的运动微分方程;从拉格朗日函数(或 Hamilton 函数)出发,运用 Noether 方法、Lie 方法和 Mei 方法可得到系统的守恒量并讨论其对称性[1—10],因此,已知(或求得)力学系统的 Lagrange 函数(或 Hamilton 函数)对精确描述力学系统很重要.由运动微分方程求系统的拉格朗日函数是力学中的逆问题,也是现代数学、力学和物理科学中的常见问题[11—15].一维减幅-增幅谐振子是一有趣的力学模型[16],它是指一质点同时参与两个振子的振动,一个为减幅振子,另一个为增幅振子,其运动微分方程是两个非耦合的二阶齐次线性微分方程,比较简单,每个方程都可以求得解析解. 但是,对于同一个质点同时参与这样两个振子的振动,是否存在守恒量,有哪几个守恒量,各守恒量的意义是什么,与守恒量相应的是什么对称性等问题是值得研究的.因此,本文从一维减幅-增幅谐振子的运动微分方程出发得到系统的运动积分常数,从而得到系统的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数,再根据 Hamilton 函数的形式假定守恒量的形式,由 Poisson 括号的性质得到了系统的三个守恒量,并讨论与三个守恒量相应的无限小变换的 Noether 对称性与 Lie 对称性. 文中还对守恒量与对称性的物理意义作了合理的解释.

2. 一维减幅-增幅谐振子的 Lagrange 函数和 Hamilton 函数

一维减幅-增幅谐振子的运动微分方程为[16]

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0, \tag{1a}$$

$$m\ddot{y} - \gamma\dot{y} + ky = 0. \tag{1b}$$

系统(1)可以表示成

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma}{m}v_x - \frac{k}{m}x = a_1, \tag{2a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x, \tag{2b}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\gamma}{m}v_y - \frac{k}{m}y = a_2, \tag{2c}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y. \tag{2d}$$

其中 m, γ, k 为正常数.则系统的运动积分 C 满足

$$v_x\frac{\partial C}{\partial x} + v_y\frac{\partial C}{\partial y} + a_1\frac{\partial C}{\partial v_x} + a_2\frac{\partial C}{\partial v_y} = 0. \tag{3}$$

† E-mail:louzhimei@zscas.edu.cn

方程(3)的特性方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}y}{v_y}=\frac{\mathrm{d}v_X}{a_1}=\frac{\mathrm{d}v_y}{a_2}=\frac{\mathrm{d}C}{0}. \quad (4)$$

由(2a),(2c)和(3)式可得

$$\mathrm{d}(mv_xv_y+kxy)=0, \quad (5)$$

则运动积分常数为

$$C=mv_xv_y+kxy. \quad (6)$$

根据(4)式的前两项可令 $D_2^1=v_x/v_y$ 和 $D_1^2=v_y/v_x$，则(6)式可写成

$$C_1=mv_x^2D_1^2+kxy, \quad (7a)$$

$$C_2=mv_y^2D_2^1+kxy, \quad (7b)$$

这里 C_1 和 C_2 是分别用速度分量 v_x 和 v_y 表示的运动积分常数.

由运动积分通过 Legendre 变换可得到系统的 Lagrange 函数[11]，

$$v_x\frac{\partial L}{\partial v_x}+v_y\frac{\partial L}{\partial v_y}-L=C. \quad (8)$$

(8)式的特性方程为

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y}=\frac{\mathrm{d}L}{C+L}=\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{0}. \quad (9)$$

由(9)式得

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{v_x}=\frac{\mathrm{d}L_1}{C_1+L_1}, \quad (10a)$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{v_y}=\frac{\mathrm{d}L_2}{C_2+L_2}. \quad (10b)$$

将(7a),(7b)式分别代入(10a),(10b)式得

$$L_1=A_1v_x+v_x\int^{v_x}\frac{C_1(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2}, \quad (11a)$$

$$L_2=A_2v_y+v_y\int^{v_y}\frac{K_2(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2}, \quad (11b)$$

这里 $A_1=A_1(x,y,D_1^2)$，$A_2=A_2(x,y,D_2^1)$为任意常数，L_1，L_2 为分别用速度分量 v_x 和 v_y 表示的 Lagrange 函数. 则系统的 Lagrange 函数为[11]

$$\begin{aligned}L&=A_1v_x+A_2v_y+\frac{1}{2}\Big[v_x\int^{v_x}\frac{C_1(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\\&\quad+v_y\int^{v_y}\frac{C_2(x,y,\xi)\mathrm{d}\xi}{\xi^2}\Big]\\&=A_1v_x+A_2v_y+mv_xv_y-kxy. \quad (12)\end{aligned}$$

将(12)式代入 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_x}\right)-\frac{\partial L}{\partial x}=0, \quad (13a)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial v_y}\right)-\frac{\partial L}{\partial y}=0, \quad (13b)$$

并利用(2a),(2c)式得

$$A_{2x}-A_{1y}=\gamma, \quad (14)$$

这里的下标 x，y 分别表示对 x，y 的偏导数.

由(14)式可取

$$A_1=-\frac{\gamma}{2}y,\ A_2=\frac{\gamma}{2}x. \quad (15)$$

则系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{\gamma}{2}xv_y-\frac{\gamma}{2}yv_x+mv_xv_y-kxy. \quad (16)$$

系统的广义动量为

$$p_x=\frac{\partial L}{\partial v_x}=mv_y-\frac{\gamma}{2}y, \quad (17a)$$

$$p_y=\frac{\partial L}{\partial v_y}=mv_x+\frac{\gamma}{2}x. \quad (17b)$$

则系统的 Hamilton 函数为

$$\begin{aligned}H&=-L+v_xp_x+v_yp_y\\&=\frac{p_xp_y}{m}+\frac{\gamma}{2m}(yp_y-xp_x)+\left(k-\frac{\gamma^2}{4m}\right)xy, \quad (18)\end{aligned}$$

与文献[16]中的相同.

3. 守恒量的构建及其物理意义

(18)式表示的 Hamilton 函数可以写成

$$H=\sum_{i=1}^{4}h_i\Gamma_i, \quad (19)$$

其中

$$\Gamma_1=p_xp_y,\ \Gamma_2=yp_y,\ \Gamma_3=xp_x,\ \Gamma_4=xy, \quad (20a)$$

$$h_1=\frac{1}{m},\ h_2=-h_3=\frac{\gamma}{2m},\ h_4=k-\frac{\gamma^2}{4m}. \quad (20b)$$

由 $\Gamma_i(i=1,2,3,4)$ 组成的 Poisson 括号

$$\begin{aligned}&[\Gamma_1,\Gamma_2]=-\Gamma_1,\ [\Gamma_1,\Gamma_3]=-\Gamma_1,\\&[\Gamma_1,\Gamma_4]=-\Gamma_2-\Gamma_3,[\Gamma_2,\Gamma_3]=0,\\&[\Gamma_2,\Gamma_4]=-\Gamma_4,\ [\Gamma_3,\Gamma_4]=-\Gamma_4, \quad (21)\end{aligned}$$

已具有封闭性，所以可假设守恒量的形式为[17,18]

$$I=I(x,y,p_x,p_y)=\sum_{i=1}^{4}\lambda_i\Gamma_i, \quad (22)$$

其中 λ_i 为常数. 由

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=[I,H]=0, \quad (23)$$

比较各 $\Gamma_i(i=1,2,3,4)$前的系数得

$$\lambda_3=-\lambda_2,\ \lambda_4=\lambda_1\left(mk-\frac{\gamma^2}{4}\right). \quad (24)$$

则守恒量的一般形式为

$$I = \lambda_1 p_x p_y + \lambda_2 (y p_y - x p_x) + \lambda_1 \left(km - \frac{\gamma^2}{4} \right) xy. \tag{25}$$

由 (25) 式可得系统的三个守恒量

$$\lambda_1 = \frac{1}{m},\ \lambda_2 = 0,\ I_1 = \frac{p_x p_y}{m} + \left(k - \frac{\gamma^2}{4m} \right) xy, \tag{26a}$$

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ I_2 = y p_y - x p_x, \tag{26b}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{m},\ \lambda_2 = \frac{\gamma}{2m},$$

$$I_3 = \frac{p_x p_y}{m} + \frac{\gamma}{2m}(y p_y - x p_x) + \left(k - \frac{\gamma^2}{4m} \right) xy. \tag{26c}$$

守恒量 I_1 具有能量的量纲，为系统的耦合能量．而守恒量 I_2 具有角动量的量纲，但又不是角动量，可称其为‘类角动量’．很明显，守恒量 I_3 就是系统的总能量．

由 (26) 式知，三个守恒量不是相互独立的，存在如下关系：

$$I_3 = H = I_1 + \frac{\gamma}{2m} I_2. \tag{27}$$

4. 三个守恒量的 Noether 对称性与 Lie 对称性

引进群的无限小变换

$$t^* = t + \varepsilon \tau_\alpha (t, x_s, \dot{x}_s),$$

$$x_s^* = x_s + \varepsilon \xi_s^\alpha (t, x_s, \dot{x}_s),$$

$$(s = 1, 2, x_1 = x, x_2 = y, \alpha = 1, 2, 3). \tag{28}$$

其无限小生成元向量为

$$X^{(0)} = \tau_\alpha \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{s=1}^{2} \xi_s^\alpha \frac{\partial}{\partial x_s}, \tag{29}$$

(29) 式的一次扩展为

$$X^{(1)} = X^{(0)} + \sum_{s=1}^{2} (\dot{\xi}_s^\alpha - \dot{x}_s \dot{\tau}_\alpha) \frac{\partial}{\partial \dot{x}_s}, \tag{30}$$

二次扩展为

$$X^{(2)} = X^{(1)} + \sum_{s=1}^{2} \left[(\ddot{\xi}_s^\alpha - \dot{x}_s \ddot{\tau}_\alpha - 2 \ddot{x}_s \dot{\tau}_\alpha) \frac{\partial}{\partial \ddot{x}_s}, \right. \tag{31}$$

其中 α 代表守恒量的个数，ε 为无限小参数，τ_α，ξ_s^α 为与第 α 个守恒量相应的无限小变换生成元．

由 Hamilton 系统的 Noether 逆定理[1]

$$\xi_s^\alpha = \frac{\partial H}{\partial p_s} \tau_\alpha + \frac{\partial I_\alpha}{\partial p_s},$$

$$p_s \xi_s^\alpha - H \tau_\alpha = I_\alpha, (s = 1, 2; \alpha = 1, 2, 3). \tag{32}$$

将(26a)，(26b)，(26c) 式依次代入 (32) 式得到与三个守恒量相应的无限小变换的生成元

$$\tau_1 = -1, \xi_1^1 = \frac{\gamma}{2m} x,\ \xi_2^1 = -\frac{\gamma}{2m} y, \tag{33a}$$

$$\tau_2 = 0, \xi_1^2 = -x, \xi_2^2 = y, \tag{33b}$$

$$\tau_3 = -1, \xi_1^3 = 0, \xi_2^3 = 0, \tag{33c}$$

即与三个守恒量相应的无限小变换是 Noether 对称变换．

经验证，(33a)，(33b)，(33c) 式表示的无限小变换的生成元也分别满足下面的 Lie 对称性的确定方程：

$$\ddot{\xi}_s^\alpha - \dot{x} \ddot{\tau}_\alpha - 2 \dot{\tau}_\alpha a_s = X^{(1)} (a_s),$$

$$(s = 1, 2.\ \alpha = 1, 2, 3), \tag{34}$$

其中 a_s 为(2a)，(2c) 式中的广义加速度，说明与三个守恒量相应的无限小变换也是 Lie 对称变换．

5. Noether 对称性与 Lie 对称性的物理意义

由(33a)式知，系统的 Hamilton 作用量及系统的运动微分方程对于无限小变换

$$t^* = t - \varepsilon,\ x^* = x + \frac{\gamma}{2m} \varepsilon x,\ y^* = y - \frac{\gamma}{2m} \varepsilon y \tag{35}$$

是不变的，此变换是时间与空间变换并存的变换，其空间变换具体表现为 x 方向的扩张与 y 方向的收缩．

同样地，由(33b)式知，系统的 Hamilton 作用量及系统的运动微分方程对于无限小变换

$$t^* = t,\ x^* = x - \varepsilon x,\ y^* = y + \varepsilon y \tag{36}$$

也是不变的，此变换表示时间不变，只有空间变换，表现为 x 方向收缩和 y 方向的扩张．

而(33c)式表示的无限小变换

$$t^* = t - \varepsilon,\ x^* = x,\ y^* = y \tag{37}$$

是众所周知的时间平移变换，表明系统的 Hamilton 作用量及系统的运动微分方程对于时间平移变换是不变的．

[1] Mei F X 1999 *Applications of Lie Groups and Lie Algebras to Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Science Press) (in Chinese) [梅凤翔 1999 李群和李代数对约束力学系统的应用(北京 科学出版社)]

[2] Mei F X 2004 *Symmetries and Conservrd Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与不变量(北京 北京理工大学出版社)]

[3] Mei F X 2001 *Chin. Phys*. **10** 177

[4] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin*. **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]

[5] Qiao Y F, Zhao S H, Li R J 2004 *Chin. Phys*. **13** 292

[6] Fang J H, Yan X H, Chen P S 2003 *Acta Phys. Sin*. **52** 1561 (in Chinese) [方建会、闫向宏、陈培胜 2003 物理学报 **52** 1561]

[7] Fu J L, Chen L Q, Bai J H 2005 *Chin. Phys*. **14** 6

[8] Zhang Y 2004 *Acta Phys. Sin*. **53** 331 (in Chinese) [张 毅 2004 物理学报 **53** 331]

[9] Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 1460 (in Chinese) [楼智美 2005 物理学报 **53** 1460]

[10] Lou Z M 2005 *Chin. Phys*. **14** 660

[11] G. López 1996 *Ann. Phys*. **251** 363, 372

[12] Lutzky M 1979 *J. Phys. A: Math. Gen*. **12** 973

[13] Sarlet W 1981 *J. Phys. A: Math. Gen*. **14** 2227

[14] Lou Z M 2005 *Acta Phys. Sin*. **54** 1457 (in Chinese) [楼智美 2005 物理学报 **53** 1457]

[15] Lou Z M 2006 *Chin. Phys* **15** 891

[16] Blasone M, Jizba P, Vitiello G hep-th/0007138

[17] Kaushal R S, Gupta S 2001 *J. Phys. A: Math. Gen* **34** 9879

[18] Kaushal R S, Parashar D, Gupta S 1997 *Ann. Phys*. **259** 233

The study of symmetries and conserved quantities for one-dimensional damped-amplified harmonic oscillators

Lou Zhi-Mei†

(*Department of Physics, Shaoxing College of Arts and Sciences, Shaoxing* 312000, *China*)

(Received 8 March 2007; revised manuscript received 16 June 2007)

Abstract

In this paper, a constant of motion of one-dimensional damped-amplified harmonic oscillators is derived from Newton's equations, and the Lagrangian and the Hamiltonian of system are expressed in term of the constant of motion. According to the expression of the Hamiltonian, we make an ansatz for the conserved quantity and then three conserved quantities are obtained by using the definition of Poisson bracket. The Noether symmetry and Lie symmetry of the infinitesimal transformations of the three conserved quantities are studied and the essence of symmetries and conserved quantities are also explained in this paper.

Keywords: one-dimensional damped-amplified harmonic oscillators, conserved quantities, Noether symmetry, Lie symmetry

PACC: 0320

† E-mail: louzhimei@zscas.edu.cn