

一类相对转动非线性动力系统的混沌运动*

时培明[†] 刘 彬 侯东晓

(燕山大学信息科学与工程学院, 秦皇岛 066004)
(2007 年 5 月 9 日收到, 2007 年 6 月 4 日收到修改稿)

研究一类具有同宿轨道、异宿轨道的相对转动非线性动力系统的混沌运动. 建立具有非线性刚度、非线性阻尼和外扰激励作用的一类两质量相对转动非线性动力系统的动力学方程. 利用 Melnikov 方法讨论了系统的全局分岔和系统进入混沌状态的可能途径, 给出了系统发生混沌的必要条件, 并利用最大 Lyapunov 指数图, 分岔图, Poincare 截面图和相轨迹图进一步分析了系统的混沌行为.

关键词: 相对转动, 非线性动力系统, 混沌, Melnikov 方法

PACC: 0340D, 0313

1. 引 言

自从 Carmeli 于 1985 年创建了转动相对论力学理论^[1,2], 1996 年 Luo 建立了转动相对论分析力学理论^[3,4], 人们对转动相对论系统进行了深入的研究. 在转动相对论系统的代数结构、Noether 对称性和 Lie 对称性^[5,6], 具有质量分离或并入的变质量系统的转动相对论理论^[7-9], 转动相对论系统动力学的积分理论^[10]和转动系统的相对论性分析静力学理论^[11]等方面取得了进展. 近年来, 转动相对论 Birkhoff 系统动力学的基本理论、对称性理论、几何理论及稳定性等方面的研究取得了成果^[12-21]. 文献 22—26 基于相对性原理, 建立了弹性转轴任意两横截面间的相对转动线性和非线性动力学方程并进行了定量分析, 文献 27 研究了可归结为一类周期变系数线性系统的非线性相对转动系统的稳定性, 文献 28—32 研究了非线性刚度相对转动系统的动力学特性.

相对转动非线性动力系统具有复杂的非线性动力学行为, 本文针对一类具有非线性刚度、非线性阻尼和强迫激励项的两质量相对转动非线性动力系统, 应用分析力学中耗散系统的广义 Lagrange 方程建立其动力学方程. 研究了自治系统的同宿轨道和异宿轨道. 利用 Melnikov 方法^[33-35]讨论了系统分别

在周期激励和拟周期激励下的全局分岔和系统进入混沌状态的可能途径, 给出了系统发生混沌运动的必要条件. 通过数值仿真绘制了系统在一定参数下的最大 Lyapunov 指数图, 分岔图, Poincare 截面图和相轨迹图, 进一步分析了系统的混沌行为.

2. 系统的非线性动力学方程

相对转动系统是广泛存在的动力传递基本力学系统. 考虑一类具有非线性刚度、非线性阻尼和外扰激励作用下的两质量系统, 系统的动能为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} I_i \dot{\theta}_i^2 = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\theta}_2^2. \quad (1)$$

考虑一次、三次扭转刚度作用下的系统势能为

$$U = \frac{1}{2} K (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{4} K_1 (\theta_1 - \theta_2)^4. \quad (2)$$

广义力(广义力矩)为

$$Q_j = \sum_{i=1}^2 F_i^j \frac{\partial \theta_i}{\partial q_j}, \quad (j = 1, 2), \quad (3)$$

其中 I_i ($i = 1, 2$) 为系统集中质量的转动惯量, K 为系统线性扭转刚度, K_1 为系统非线性扭转刚度, θ_i ($i = 1, 2$), $\dot{\theta}_i$ ($i = 1, 2$) 分别为系统集中质量的转角, 转速. $F_i^j = T_i + F_i^c$, T_i 为广义外力(广义外力矩), F_i^c 为系统广义阻尼力. q_j ($j = 1, 2$) 为广义坐标.

令

* 国家十五重大科技攻关项目(批准号 ZZ02-13B-02-03-1)资助的课题.

[†] E-mail: peiming.shi@163.com

$$F_1^c = -D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2),$$

$$F_2^c = -D(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (4)$$

则

$$F_1^1 = T_1 - D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (5)$$

$$F_2^2 = T_2 - D(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) + f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2), \quad (6)$$

其中 D 为线性阻尼系数, $f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)$ 为非线性阻尼力, 代入耗散系统的 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial E}{\partial q_j} + \frac{\partial U}{\partial q_j} = Q_j, \quad (j = 1, 2), \quad (7)$$

得

$$I_1 \ddot{\theta}_1 + K(\theta_1 - \theta_2) + K_1(\theta_1 - \theta_2)^3 + D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_1, \quad (8)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_2 + K(\theta_2 - \theta_1) + K_1(\theta_2 - \theta_1)^3 + D(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = T_2, \quad (9)$$

式中 $\ddot{\theta}_i (i = 1, 2)$ 为系统集中质量的角加速度. 对于相对转动动力系统, 考虑相对转角的变化, 由 (8) 式

乘以 $\frac{1}{I_1}$ 减 (9) 式乘以 $\frac{1}{I_2}$ 得到

$$\begin{aligned} & (\ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2) + \frac{(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} K(\theta_1 - \theta_2) \\ & + \frac{(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} K_1(\theta_1 - \theta_2)^3 \\ & + \frac{(I_1 + I_2)}{I_1 I_2} D(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \frac{I_1}{I_1 I_2} f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) \\ & = \frac{1}{I_1 I_2} (I_2 T_1 - I_1 T_2). \end{aligned} \quad (10)$$

令

$$\theta_\Delta = \theta_1 - \theta_2, \quad \dot{\theta}_\Delta = \dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2,$$

$$\ddot{\theta}_\Delta = \ddot{\theta}_1 - \ddot{\theta}_2, \quad a_0 = \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2},$$

$$f(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) = -\alpha(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + \beta(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^3,$$

$$a_1 = K a_0, \quad a_2 = K_1 a_0,$$

$$b_0 = \frac{I_2}{I_1 I_2}, \quad b_1 = \alpha b_0 - a_0 D, \quad b_2 = \beta b_0,$$

$$F(t) = b_0 T_1 + (b_0 - a_0) T_2, \quad (11)$$

则 (10) 式化为

$$\ddot{\theta}_\Delta + a_1 \theta_\Delta + a_2 \theta_\Delta^3 - b_1 \dot{\theta}_\Delta + b_2 \dot{\theta}_\Delta^3 = F(t), \quad (12)$$

方程 (12) 就是一类具有非线性刚度和非线性阻尼力

的两质量相对转动非线性动力系统在外扰激励作用下的动力学方程, 是进一步研究该类系统动态特性的基础.

3. 系统的同宿轨与异宿轨

令

$$a_1 = \omega_0^2, \quad \omega_0 t = \tau, \quad \frac{\theta_\Delta}{A} = \varphi,$$

$$a = \frac{b_1}{\omega_0}, \quad b = b_2 \omega_0 A^2, \quad c = \frac{A^2}{\omega_0^2} a_2,$$

$$\omega = \frac{\Omega}{\omega_0}, \quad F = \frac{1}{\omega_0^2}, \quad A = b_0 f,$$

$$T_2 = f \cos(\Omega t), \quad T_2 = 0, \quad (13)$$

则 (12) 式化为

$$\ddot{\varphi} + \varphi + c\varphi^3 - a\dot{\varphi} + b\varphi^3 = F \cos(\omega t). \quad (14)$$

令 $\varphi = \phi, \dot{\varphi} = \dot{\phi} = \psi$, 则 (14) 式等价于

$$\dot{\phi} = \psi,$$

$$\dot{\psi} = -\phi - c\phi^3 + a\psi - b\psi^3 + F \cos(\omega t). \quad (15)$$

非线性项冠以小参数, 则 (15) 式化为

$$\dot{\phi} = \psi,$$

$$\dot{\psi} = -\phi - c\phi^3 + \epsilon(a\psi - b\psi^3 + F \cos(\omega t)), \quad (16)$$

当 $\epsilon = 0$ 时, 未扰系统为

$$\dot{\phi} = \psi,$$

$$\dot{\psi} = -\phi - c\phi^3. \quad (17)$$

情形 1 当 $c > 0$ 时, 系统 (17) 只有一个不动点 $O(0, 0)$.

情形 2 当 $c < 0$ 时, 系统 (17) 只有三个不动点, 中心 $O(0, 0)$, 鞍点 $B\left(\sqrt{\frac{1}{-c}}, 0\right)$,

$C\left(-\sqrt{\frac{1}{-c}}, 0\right)$. 系统 (17) 为 Hamiltonian 系统, 有初积分

$$H(\phi, \psi) = \frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} c\phi^4, \quad (18)$$

势函数为

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} c\phi^4. \quad (19)$$

取 $c = -1$ 时, 系统 (17) 的中心 O 和鞍点 B, C 如图 1 所示, 相应的势函数 $V(\phi)$ 如图 (2) 所示.

通过鞍点 B, C 的轨道为异宿轨道, 它满足

$$H(\phi, \psi) = \frac{1}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} \phi^2 + \frac{1}{4} c\phi^4 = h,$$

(h 为常数). (20)

1) 当 $h = -\frac{1}{4c}$ 时, 系统存在一对异宿轨, 异宿轨方程为

$$\begin{aligned} \phi^0(\tau) &= \pm \sqrt{\frac{1}{-c}} \tanh\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \tau\right), \\ \psi^0(\tau) &= \pm \sqrt{\frac{1}{-2c}} \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{1}{2}} \tau\right), \end{aligned} \quad (21)$$

它把相平面分成两各区域.

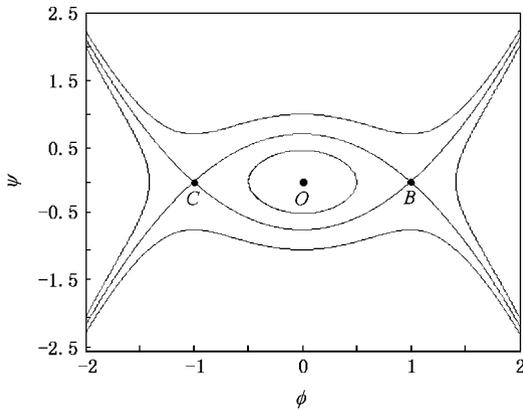


图 1 相轨迹

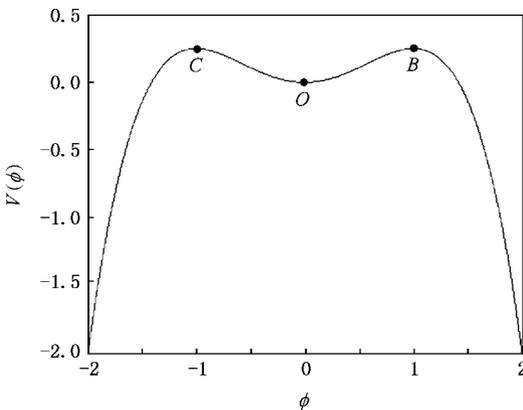


图 2 势函数 $V(\phi)$

2) 当 $0 < h < -\frac{1}{4c}$ 时, 在异宿圈内存在着一族以 h 为参数的周期轨道. 这些周期轨道可通过积分求出, 并且可用椭圆函数表示. 令 $h = \frac{\gamma}{(1 + \gamma^2)}$, 其中 γ 为椭圆模, 闭轨道方程为

$$\begin{aligned} \phi^\gamma(\tau) &= \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \operatorname{sn}\left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \gamma\right), \\ \psi^\gamma(\tau) &= \frac{\sqrt{2}\gamma}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \operatorname{cn}\left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \gamma\right) \operatorname{dn}\left(\frac{\tau}{\sqrt{1 + \gamma^2}}, \gamma\right), \end{aligned} \quad (22)$$

其中 sn , cn 和 dn 是 Jacobi 椭圆函数. 这些周期轨道的周期为

$$T^\gamma = 4K(\gamma)\sqrt{1 + \gamma^2}, \quad (23)$$

其中 $K(\gamma)$ 是第一类椭圆积分.

3) 当 $h > -\frac{1}{4c}$ 时, 系统存在一簇开轨道.

4. 系统混沌运动分析

4.1. 周期激励下系统的混沌运动分析

考虑系统在单频周期激励下的混沌运动. 针对单频周期激励下系统 (14), 利用 Melnikov 方法, 构造异宿轨的 Melnikov 函数为

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(\tau)) \Lambda(g(q^0(\tau), \tau + \tau_0)) d\tau, \quad (24)$$

其中

$$\begin{aligned} g(q^0(\tau), \tau + \tau_0) &= (0, a\psi^0(\tau) - b[\psi^0(\tau)]^2 \\ &\quad + F \cos(\omega(\tau + \tau_0)))^T, \\ q^0(\tau) &= (\phi^0(\tau), \psi^0(\tau))^T, \\ f(q^0(\tau)) &= (\psi^0(\tau), -\phi^0(\tau) \\ &\quad - d[\phi^0(\tau)]^2)^T, \end{aligned} \quad (25)$$

Λ 为投影算子, 有

$$(x_1, x_2)^T \Lambda (y_1, y_2)^T = x_1 y_2 - x_2 y_1, \quad (26)$$

则

$$\begin{aligned} &f(q^0(\tau)) \Lambda(g(q^0(\tau), \tau + \tau_0)) \\ &= \begin{pmatrix} \psi^0(\tau) \\ -\phi^0(\tau) - d[\phi^0(\tau)]^2 \end{pmatrix} \\ &\quad \times \Lambda \begin{pmatrix} 0 \\ a\psi^0(\tau) - b[\psi^0(\tau)]^2 + F \cos(\omega(\tau + \tau_0)) \end{pmatrix} \\ &= \psi^0(\tau) [a\psi^0(\tau) - b[\psi^0(\tau)]^2 + F \cos(\omega(\tau + \tau_0))] \\ &\quad - d[\phi^0(\tau)]^2 \psi^0(\tau). \end{aligned} \quad (27)$$

因此, 有

$$\begin{aligned} M(\tau_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} [a\psi^0(\tau) - b[\psi^0(\tau)]^2 \\ &\quad + F \cos(\omega(\tau + \tau_0))] \psi^0(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} a[\psi^0(\tau)]^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} -b[\psi^0(\tau)]^3 d\tau \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^0(\tau) F \cos(\omega(\tau + \tau_0)) d\tau \\ &= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned} \quad (28)$$

将 (22) 式代入 (28) 式, 并利用积分 $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^4 x} dx = -\frac{1}{3} \operatorname{th}^3 x + \operatorname{th} x$ 可求得

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} a [\psi^0(\tau)] d\tau = -\frac{2\sqrt{2}}{3c} a, \quad (29)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} -b [\psi^0(\tau)] d\tau = -\frac{8\sqrt{2}}{35c^2} b. \quad (30)$$

再利用三角函数和双曲函数的奇偶性以及积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x}{\cosh^3 \beta x} dx = \left(\frac{\alpha \pi}{2\beta^2} \right) \sinh \frac{\alpha \pi}{2\beta}, \text{ 可求得}$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^0(\tau) F \cos(\omega(\tau + \tau_0)) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\pm \frac{1}{\sqrt{2c}} \right] \operatorname{sech}^2\left(\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right) F \cos(\omega(\tau + \tau_0)) d\tau = \pm \sqrt{\frac{2}{-c}} \pi \omega F \cos \omega \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right). \quad (31)$$

将(29)(30)和(31)式代入(28)式可得

$$M_{\pm}(\tau_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3c} a - \frac{8\sqrt{2}}{35c^2} b \pm \sqrt{\frac{2}{-c}} \pi \omega F \cos \omega \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right). \quad (32)$$

令 $M_{\pm}(\tau_0) = 0$ 可求得

$$\cos \omega \tau_0 = \pm \frac{\frac{2\sqrt{2}}{3c} a + \frac{8\sqrt{2}}{35c^2} b}{\sqrt{\frac{2}{-c}} \pi \omega F \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right)}. \quad (33)$$

又 $|\cos \omega \tau_0| \leq 1$ 要使(33)式有解, 必须

$$\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3c} a + \frac{8\sqrt{2}}{35c^2} b}{\sqrt{\frac{2}{-c}} \pi \omega F \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right)} \leq 1, \quad (34)$$

即

$$\frac{(70ac + 24b)\sqrt{-c}}{105Fc^2} \leq \pi \omega \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega\right), \quad (35)$$

对于充分小的 ε , 当系统满足(35)式时可发生 small 马蹄意义下的混沌行为.

4.2. 拟周期激励下系统的混沌运动分析

考虑系统在双频拟周期激励下的混沌运动.

令

$$T_1 = f_1 \cos(\Omega_1 t), T_2 = f_2 \cos(\Omega_2 t), A_1 = b_0 f_1, A_2 = (b_0 - a_0) f_2, a_1 = \omega_0^2, \omega_0 t = \tau, \frac{\theta_{\Delta}}{A_1 + A_2} = \varphi, a = \frac{b}{\omega_0},$$

$$b = (A_1 + A_2) \omega_0 b_2, c = \frac{(A_1 + A_2)^2}{\omega_0^2} a_2,$$

$$F_1 = \frac{A_1}{(A_1 + A_2) \omega_0^2}, F_2 = \frac{A_2}{(A_1 + A_2) \omega_0^2},$$

$$\omega_1 = \frac{\Omega_1}{\omega_0}, \omega_2 = \frac{\Omega_2}{\omega_0}, \quad (36)$$

则系统(12)式化为

$$\ddot{\varphi} + \varphi + c\varphi^3 - a\dot{\varphi} + b\varphi^3 = F_1 \cos(\omega_1 t) + F_2 \cos(\omega_2 t). \quad (37)$$

令 $\varphi = \phi, \dot{\varphi} = \dot{\phi} = \psi$, 则(37)式等价于

$$\dot{\phi} = \psi, \dot{\psi} = -\phi - c\psi^3 + a\psi - b\psi^3 + F_1 \cos(\omega_1 t) + F_2 \cos(\omega_2 t). \quad (38)$$

非线性项冠以小参数, 则(38)式化为

$$\dot{\phi} = \psi, \dot{\psi} = -\phi - c\psi^3 + \varepsilon(a\psi - b\psi^3 + F_1 \cos(\omega_1 t) + F_2 \cos(\omega_2 t)). \quad (39)$$

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(39)与系统(16)具有相同的未扰系统.

考虑 $c < 0$ 的情形, 系统异宿轨道的 Melnikov 函数为

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(q^0(\tau)) \Delta g(q^0(\tau), \tau + \tau_0) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} [a\psi^0(\tau) - b[\psi^0(\tau)]^3 + F_1 \cos(\omega_1(\tau + \tau_0)) + F_2 \cos(\omega_2(\tau + \tau_0))] \psi^0(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} a [\psi^0(\tau)]^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} -b [\psi_0(\tau)]^2 d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \psi^0(\tau) (F_1 \cos(\omega_1(\tau + \tau_0)) + F_2 \cos(\omega_2(\tau + \tau_0))) d\tau = I_1 + I_2 + I_3. \quad (40)$$

可知

$$I_1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3c} a, I_2 = -\frac{8\sqrt{2}}{35c^2} b, I_3 = \pm \sqrt{\frac{2}{-c}} \pi \left(\omega_1 F_1 \cos \omega_1 \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega_1\right) + \omega_2 F_2 \cos \omega_2 \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pi \omega_2\right) \right), \quad (41)$$

代入(40)式可得

$$M_{\pm}(\tau_0) = -\frac{2\sqrt{2}}{3c}a - \frac{8\sqrt{2}}{35c^2}b \pm \sqrt{\frac{2}{-c}}\pi \left(\omega_1 F_1 \cos\omega_1 \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_1\right) + \omega_2 F_2 \cos\omega_2 \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_2\right) \right). \quad (42)$$

仅考虑 $F_1 = F_2 = F$ 的情形,令 $M_{\pm}(\tau_0) = 0$ 可求得

$$\frac{2\sqrt{2}}{3c}a + \frac{8\sqrt{2}}{35c^2}b = \pm \sqrt{\frac{2}{-c}}\pi \left(\omega_1 F_1 \cos\omega_1 \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_1\right) + \omega_2 F_2 \cos\omega_2 \tau_0 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_2\right) \right). \quad (43)$$

由 $\left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|$ 又 $|\cos\omega\tau_0| \leq 1$ 可得

$$\frac{\frac{2\sqrt{2}}{3c}a + \frac{8\sqrt{2}}{35c^2}b}{\sqrt{\frac{2}{-c}}\pi F \left(\omega_1 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_1\right) + \omega_2 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_2\right) \right)} \leq 1, \quad (44)$$

即

$$\frac{(70ac + 24b)\sqrt{-c}}{105Fc^2} \leq \omega_1 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_1\right) + \omega_2 \operatorname{csch}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\omega_2\right). \quad (45)$$

对于充分小的 ϵ ,当系统满足(45)式时可发生 smale 马蹄意义下的混沌行为.

5. 数值仿真

对系统(16)取 $c = -1, \epsilon a = -0.5, \epsilon b = 0.5, \omega$

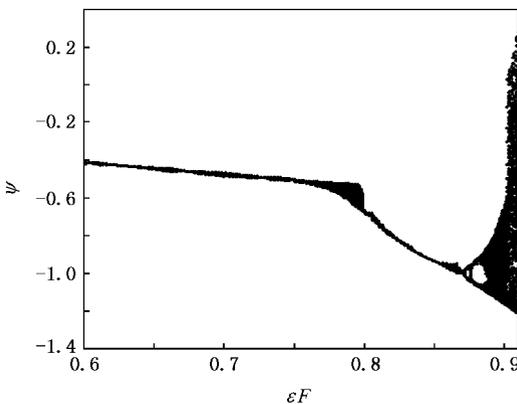


图3 分岔图

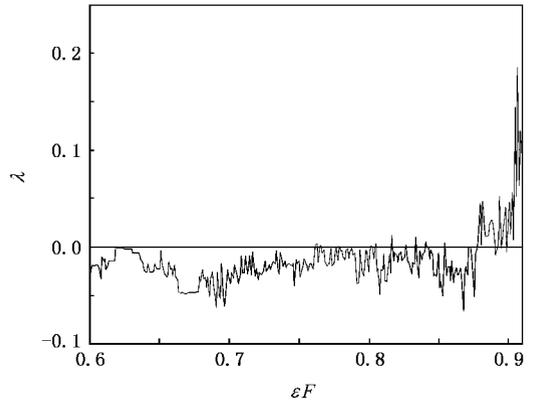


图4 ϵF 变化的最大 Lyapunov 指数

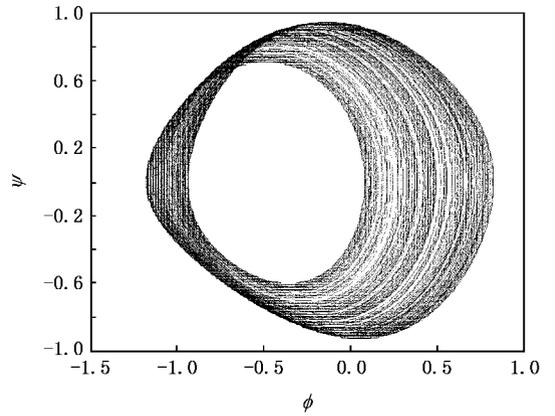


图5 相轨迹

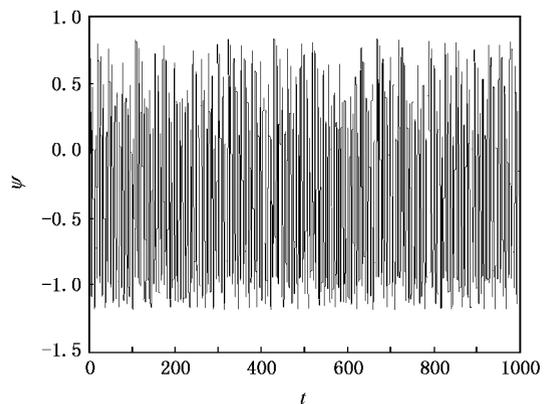


图6 时间历程

$= 1$,初值取 $(-0.1, 0.3)$,系统对 ϵF 的分岔图如图3所示,系统对应于 ϵF 变化的最大 Lyapunov 指数曲线如图4所示.通过分岔图和最大 Lyapunov 指数曲线图能够进一步确定系统发生混沌行为的阈值和区域,在混沌发生区域分岔图中出现散点扩散,相应的最大 Lyapunov 指数为正数.取 $\epsilon F = 0.9$ 时系统在初

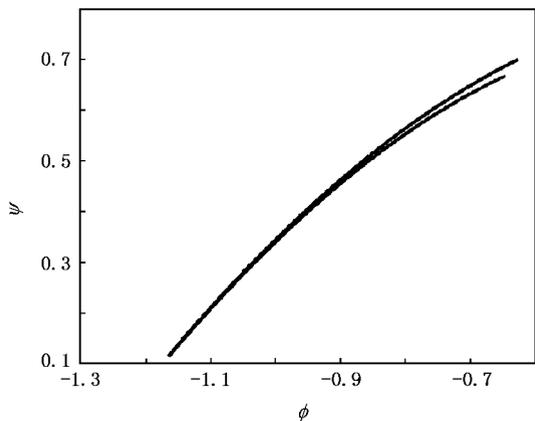


图 7 Poincaré 截面

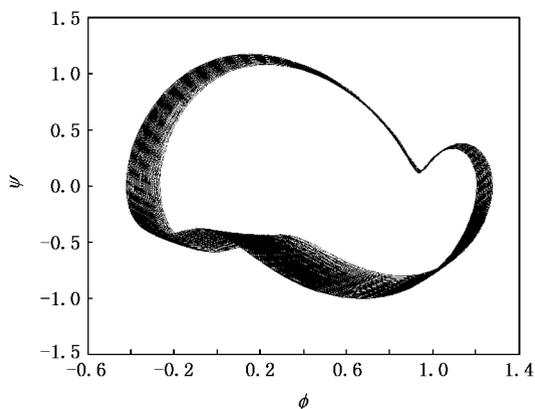


图 10 相轨迹

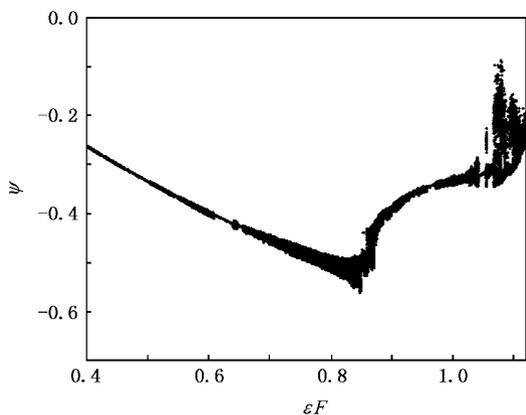


图 8 分岔图

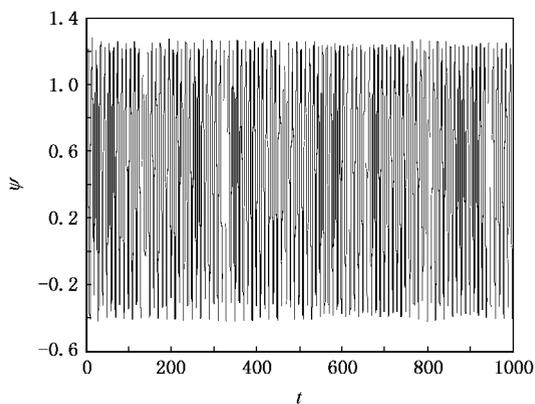


图 11 时间历程

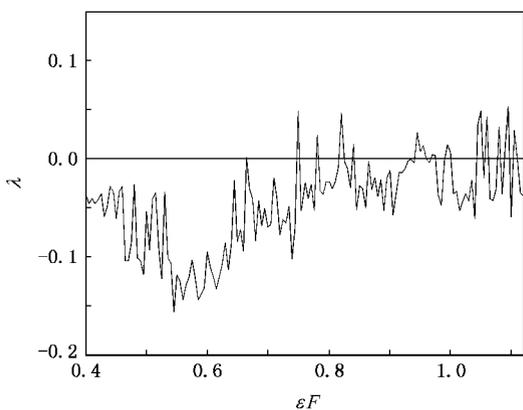


图 9 ϵF 变化的最大 Lyapunov 指数

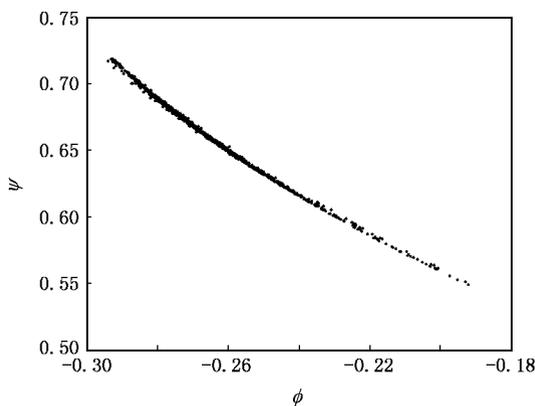


图 12 Poincaré 截面

值为 $(-0.1, 0.3)$ 时的相轨迹如图 5 所示, 时间历程如图 6 所示, Poincaré 截面如图 7 所示. 时间历程图杂乱无章, 系统的 Poincaré 截面出现混沌吸引子, 表明系统此时已经处于混沌运动. 从相轨迹图可以看出系统发生混沌行为的路径为拟周期环面破裂变为

混沌运动. 同时数值结果表明, Melnikov 方法得到的发生混沌运动的临界条件是一阶近似的理论解, 数值计算的混沌阈值大于理论计算值.

对系统 (39) 取 $c = -1$, $\epsilon a = -0.5$, $\epsilon b = 0.5$, $\omega_1 = 3$, $\omega_2 = 1$, 初值 $(-0.01, 0.5)$, 系统对 ϵF 的分岔图

如图 8 所示,系统对应于 εF 变化的最大 Lyapunov 指数曲线如图 9 所示. 从分岔图和最大 Lyapunov 指数曲线图可以看出与周期激励系统不同,拟周期激励下系统的混沌运动与周期运动出现了交替变化. 取 $\varepsilon F = 1.107$ 时系统在初值为 $(-0.01, 0.5)$ 的相轨迹图如图 10 所示,时间历程图如图 11 所示, Poincare 截面图如图 12 所示,从相轨迹图可以看出拟周期激励系统的混沌发生路径与周期激励系统相同.

6. 结 论

本文建立了具有非线性刚度和非线性阻尼力和外扰激励的一类两质量相对转动非线性动力系统的动力学方程. 利用 Melnikov 方法分析系统分别在周期激励和拟周期激励下出现混沌运动的必要条件,并通过数值计算方法进一步验证了系统的混沌行为.

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Int. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16**(S1)154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16**(S1)154]
- [4] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [5] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl. Math. Mech.* **20** 1266
- [6] Fu J L, Chen X W, Luo S K 2000 *Appl. Math. Mech.* **21** 549
- [7] Fang J H 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]
- [8] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 390 (in Chinese) [方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]
- [9] Fang J H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]
- [10] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
- [11] Jia L Q 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1039 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1039]
- [12] Luo S K 2002 *Chin. Phys. Lett.* **19** 449
- [13] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 429
- [14] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin. Phys.* **11** 523
- [15] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
- [16] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]
- [17] Zhang K, Feng J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2985 (in Chinese) [张 凯、冯 俊 2005 物理学报 **54** 2985]
- [18] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
- [19] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
- [20] Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
- [21] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin. Phys.* **10** 271
- [22] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董 全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]
- [23] Dong Q L, Liu B, Wang K, Zhang C X 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 337 (in Chinese) [董全林、刘 彬、王 坤、张春熹 2004 物理学报 **53** 337]
- [24] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4543 (in Chinese) [赵 武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]
- [25] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3987 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 3987]
- [26] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 5530]
- [27] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3852 (in Chinese) [赵 武、刘 彬、时培明、蒋金水 2005 物理学报 **54** 3852]
- [28] Rook T E, Singh R 1995 *J. Sound Vib.* **182** 303
- [29] Asokanathan S F, Meehan P A 2000 *J. Sound Vib.* **233** 297
- [30] Kim T C, Rook T E, Singh R 2005 *J. Sound Vib.* **281** 965
- [31] Duan C W, Singh R 2005 *J. Sound Vib.* **285** 803
- [32] El-Bassiouny A F 2006 *Physica A* **366** 167
- [33] Awrejcewicz J, Pyryev Y 2006 *Nonlinear Analysis* **7** 12
- [34] Ge Z H M, Zhang A R 2007 *Chaos Solitons and Fractals* **32** 1791
- [35] Sheu L J, Chen H K, Chen J H, Tam L M 2007 *Chaos Solitons and Fractals* **32** 1459

Chaotic motion of some relative rotation nonlinear dynamic system^{*}

Shi Pei-Ming[†] Liu Bin Hou Dong-Xiao

(*College of Information Science and Engineering, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 9 May 2007 ; revised manuscript received 4 June 2007)

Abstract

The chaotic motion of a relative rotation nonlinear dynamic system possessing both homoclinic and heteroclinic orbits is investigated. Firstly, the dynamics equation of relative rotation nonlinear dynamics system with nonlinear stiffness and nonlinear damping and forcing excitation is deduced. Secondly, a global bifurcation of the system and a probable route leading to chaos have been discussed by using Melnikov method, and the necessary condition of chaotic motion of system is presented. The chaotic motion of system is complemented by top Lyapunov exponents maps, bifurcation maps, Poincare maps and phase plane plots.

Keywords : relatively rotation, nonlinear dynamics system, chaos, Melnikov method

PACC : 0340D, 0313

^{*} Project supported by the National Significant Tackle Key Problem for 10th 5-year Plan of China (Grant No. ZZ02-13B-02-03-1).

[†] E-mail : peiming.shi@163.com