第 57 卷 第 3 期 2008 年 3 月
1000-3290/2008/57(03)/1329-06

物 理 学 报
ACTA PHYSICA SINICA

Vol.57, No.3, March, 2008

一类非线性相对转动动力系统的平衡稳定性及组合谐波近似解*

孟 宗† 刘 彬

(燕山大学电气工程学院,秦皇岛 066004)

(2007 年 6 月 7 日收到;2007 年 6 月 28 日收到修改稿)

建立一类含广义非线性弹性力的两质量相对转动系统的非线性动力学方程. 应用变量梯度法构造李雅普诺夫函数,研究相对转动非线性自治系统的稳定性. 应用摄动法求得相对转动非线性非自治系统在两种不同频率谐波共同激励下的组合谐波响应的近似解.

关键词:相对转动,非线性动力系统,稳定性,组合谐波响应

PACC:0340D,0313,0320

1. 引 言

转动是自然界最基本的运动之一,在研究转动运动和转动力学过程中,1985 年,Carmeli[1,2] 提出了转动相对论力学的理论,1996 年罗绍凯[3—5] 提出了转动系统的相对论性分析力学理论,并构造出转动相对论的 Hamilton 系统的积分变量,转动相对论理论的研究受到学术界的广泛重视. 近年来相对论分析力学和转动相对论分析力学的研究发展了相对论力学[6—8]. 转动相对论在 Birkhoff 系统动力学基本理论、通用性积分复杂动力学方程问题、对称性理论、积分的场理论、代数结构、几何结构、非完整系统的对称性与守恒量等研究领域取得了成果[9—35]. 基于相对性原理,建立了弹性转轴任意两截面间的相对转动动力学方程并进行了定性和定量分析[36—43].

文献[42,43]研究了相对转动非线性系统在单一谐波激励作用下的系统响应. 从工程角度出发,研究激励为不同频率谐波共同作用下的系统响应具有更大的实际意义,然而对于非线性系统,不同频率谐波共同作用下的系统响应并不等于各单一谐波激励响应的线性叠加. 本文基于耗散系统的 Lagrange 方程,建立了非线性相对转动动力学方程,应用变量梯度法构造李雅普诺夫函数,研究了一类含非线性弹性力的相对转动自治系统的稳定性,给出了含非线性弹性力的相对转动非自治系统在两种不同频率谐波共同作用下的组合谐波响应的近似解.

2. 相对转动非线性动力学方程

相对转动系统是工程中广泛存在的动力传递系统,对于两质量相对转动系统,设 J_1,J_2 为相对转动系统集中质量的转动惯量,c 为系统阻尼系数,K 为系统扭转刚度,φ_i($i=1,2$)和 $\dot{\varphi}_i$($i=1,2$)分别为两个集中质量的转角和转速,F_1 和 F_2 分别为两个集中质量的外加力矩. 相对转动系统的动能为

$$E = \frac{1}{2}J_1\dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\varphi}_2^2. \tag{1}$$

阻尼力表示为

$$F_1^C = -c\cdot(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2), \tag{2}$$

$$F_2^C = c\cdot(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2). \tag{3}$$

考虑实际工程物理结构,在系统中取非线性弹性力为 $F_k = K\cdot f(\varphi_1 - \varphi_2)$形式,即弹性力为相对转角差的任意函数形式,系统的势能 U 为

$$U = \frac{1}{2}K\cdot f^2(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{4}$$

其中 $f(\varphi_1 - \varphi_2)$为相对转角差的任意函数.

将(2)和(3)式代入动力学普遍方程

* 国家十五重大科技攻关项目(批准号:ZZ02-13B-02-03-1)资助的课题.

† E-mail:mzysu@ysu.edu.cn

$$\sum_{i=1}^{n}(F_i^{(j)}-J_i\ddot{\varphi}_i)\cdot\delta\varphi_i=0, \tag{5}$$

其中 $F_i^{(j)}=F_i+F_i^C$,则(5)式的第一项为

$$\sum_{i=1}^{n}F_i^{(j)}\cdot\delta\varphi_i=\sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{n}F_i^{(j)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_r}\right)\cdot\delta q_r, \tag{6}$$

其中 $q_r(r=1,2)$为广义坐标,n 为自由度数目,s 为作用力数目. 广义力(广义力矩)为

$$Q_r=\sum_{i=1}^{n}F_i^{(j)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial q_r},\quad (r=1,2,). \tag{7}$$

将(2),(3)式代入(7)式后得本系统的广义力(广义力矩)为

$$\begin{aligned}Q_1&=(F_1+F_1^c)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_1}+(F_2+F_2^c)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_1}\\&=F_1+F_1^c\\&=F_1-c\cdot(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2),\end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned}Q_2&=(F_1+F_1^c)\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi_2}+(F_2+F_2^c)\frac{\partial\varphi_2}{\partial\varphi_2}\\&=F_2+F_2^c\\&=F_2+c\cdot(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2).\end{aligned} \tag{9}$$

将(8),(9)式代入拉格朗日方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial E}{\partial\dot{q}_r}-\frac{\partial E}{\partial q_r}+\frac{\partial U}{\partial q_r}=Q_r,\ (r=1,2), \tag{10}$$

得

$$J_1\ddot{\varphi}_1+c\cdot(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)+K\cdot f(\varphi_1-\varphi_2)=F_1, \tag{11}$$

$$J_2\ddot{\varphi}_2-c\cdot(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)-K\cdot f(\varphi_1-\varphi_2)=F_2. \tag{12}$$

对于相对转动动力系统,在工程中最关心相对转角的变化,为求取相对转角,对(11)式和(12)式作如下变形:

$$\ddot{\varphi}_1+\frac{c}{J_1}\cdot(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)+\frac{K}{J_1}\cdot f(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{J_1}F_1, \tag{13}$$

$$\ddot{\varphi}_2-\frac{c}{J_2}\cdot(\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2)-\frac{K}{J_2}\cdot f(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{1}{J_2}F_2. \tag{14}$$

由(13)式减去(14)式得相对转角表达式

$$\begin{aligned}&(\ddot{\varphi}_1-\ddot{\varphi}_2)+\left(\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\right)c\cdot(\dot{\theta}_1-\dot{\theta}_2)\\&+\left(\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\right)K\cdot f(\theta_1-\theta_2)\\&=\frac{1}{J_1J_2}(J_2F_1-J_1F_2).\end{aligned} \tag{15}$$

在(15)式中,令

$$x=\varphi_1-\varphi_2,\ \dot{x}=\dot{\varphi}_1-\dot{\varphi}_2,\ \ddot{x}=\ddot{\varphi}_1-\ddot{\varphi}_2,$$

$$\left(\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\right)K=\omega_0^2,\ \left(\frac{J_1+J_2}{J_1J_2}\right)c=\alpha,$$

$$\frac{1}{J_1J_2}(J_2F_1-J_1F_2)=F(t),$$

得

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega_0^2\cdot f(x)=F(t), \tag{16}$$

式中 $f(x)$表示广义非线性弹性力,为相对转角差 x 的任意函数,$F(t)$为外扰激励. (16)式是在广义非线性弹性力和外扰激励作用下二质量相对转动的非线性动力学方程,是工程中描述相对转动动力传输性态的基本方程,为了进一步确定转动系统的动力学特性,下面对(16)式进行定性与定量分析.

3. 相对转动非线性自治系统稳定性

由于非线性系统特性的复杂性和多样性,非线性稳定性分析与线性稳定性分析相比要复杂. 对于非线性系统,运用李雅普诺夫直接法判定非线性系统的稳定性,不仅可以解决非临界情形的稳定性,而且还可以解决某些一次近似判别法不能判定的临界情形的稳定性问题,但是构造李雅普诺夫函数往往比较困难,许多情况下因为找不到满足定理的李雅普诺夫函数而不能对系统平衡状态的稳定性作出判断.

本文应用变量梯度法构造李雅普诺夫函数,分析系统的稳定条件.

在(16)式中,考虑典型的非线性弹性力形式,研究非线性相对转动系统的稳定性. 令

$$f(x)=x(1+\beta x^2)=x+\beta x^3, \tag{17}$$

将(17)式代入(16)式,得两质量相对转动系统的非线性动力学非自治方程

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega_0^2x+\beta\omega_0^2x^3=F(t). \tag{18}$$

取 $F(t)=0$,得两质量相对转动非线性动力学系统的自治方程

$$\ddot{x}+\alpha\dot{x}+\omega_0^2x+\beta\omega_0^2x^3=0, \tag{19}$$

(19)式的等价形式为

$$\begin{aligned}\dot{x}&=y,\\\dot{y}&=-\alpha y-\omega_0^2x-\beta\omega_0^2x^3.\end{aligned} \tag{20}$$

定理 当 $\alpha>0,\beta>0$ 时,系统(20)在平衡状态(0,0)处是渐近稳定且是大范围渐近稳定的.

证明 奇点(0,0)为方程(20)的唯一平衡点,设系统的李雅普诺夫函数为 $V(z)=V(x,y)$,设其梯

度∇V取如下形式：

$$\nabla V = \begin{bmatrix} a_{11}x + a_{12}y \\ a_{21}x + a_{22}y \end{bmatrix}, \tag{21}$$

且令 $a_{22}=2$，有

$$\begin{aligned} \dot V(z) &= \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\dot x + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\dot y \\ &= (a_{11}x + a_{12}y)\cdot y \\ &\quad + (a_{21}x + 2y)\cdot(-\alpha y - \omega_0^2 x - \beta\omega_0^2 x^3) \\ &= (a_{11} - \alpha a_{21} - 2\omega_0^2 - 2\beta\omega_0^2 x_1^2)xy \\ &\quad + (a_{12} - 2\alpha)y^2 - a_{21}\omega_0^2 x^2 - a_{21}\beta\omega_0^2 x^4. \end{aligned} \tag{22}$$

令 $\dot V$ 是负定或至少是半负定，即令 xy 项的系数等于零，x^2，y^2 和 x^4 项的系数为零或为负，只要 $a_{12}\leqslant 0$ 就能满足要求，于是任取 $a_{12}=0$，$a_{11}=\alpha a_{21}+2\omega_0^2+2\beta\omega_0^2x^2$，得

$$\dot V = -2\alpha y^2 - a_{21}\omega_0^2x^2 - a_{21}\beta\omega_0^2x^4. \tag{23}$$

代入∇V中得

$$\nabla V = \begin{bmatrix} \alpha a_{21}x + 2\omega_0^2 x + 2\beta\omega_0^2 x^3 \\ a_{21}x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla V_1 \\ \nabla V_2 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

由旋度方程$\dfrac{\partial(\nabla V_1)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\nabla V_2)}{\partial x}$确定待定系数 a_{21}，$\dfrac{\partial(\nabla V_1)}{\partial y}=0$，$\dfrac{\partial(\nabla V_2)}{\partial x}=a_{21}$，即 $a_{21}=0$. 代入∇V中得

$$\nabla V = \begin{bmatrix} 2\omega_0^2 x + 2\beta\omega_0^2 x^3 \\ 2y \end{bmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned} V(z) &= V(x,y) \\ &= \int_0^x \nabla V_1\,\mathrm{d}x + \int_0^y \nabla V_2\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^x (2\omega_0^2x + 2\beta\omega_0^2x^3)\,\mathrm{d}x + \int_0^y 2y\,\mathrm{d}y \\ &= \omega_0^2x^2 + \frac{1}{2}\beta\omega_0^2x^4 + y^2, \end{aligned} \tag{25}$$

(25)式即为所求李雅普诺夫函数，因为 $\beta>0$，所以 $V(z)$为正定函数，

$$\begin{aligned} \dot V(z) &= \frac{\partial V}{\partial x_1}\cdot\dot x + \frac{\partial V}{\partial x_2}\cdot\dot y \\ &= (2\omega_0^2x + 2\beta\omega_0^2x^3)\cdot\dot x + 2y\cdot\dot y \\ &= (2\omega_0^2x + 2\beta\omega_0^2x^3)\cdot y \\ &\quad + 2y\cdot(-\alpha y - \omega_0^2 x - \beta\omega_0^2x^3) \\ &= -2\alpha y^2. \end{aligned}$$

因为 $\alpha>0$，所以 $\dot V$ 是负定的，于是方程(20)的零解是渐近稳定，即系统在平衡状态(0,0)处是渐近稳定.

又因为 $\|z\|\to\infty$，$V(z)\to\infty$，$V(z)$是正定的，$\dot V(z)$是负定的，所以系统在平衡状态(0,0)处是大范围内渐近稳定.

4. 非自治系统组合谐波响应近似解

相对转动系统的非线性动力学方程的非自治方程(18)中，设 $F(t)$为外加组合强迫激励，从工程实际出发，研究组合强迫激励有较大的意义. 对于线性系统在组合强迫激励下的响应满足叠加原理，但是对于非线性系统，叠加原理不再适用.

设

$$F(t) = A_1\cos(v_1t+\theta_1) + A_2\cos(v_2t+\theta_2),$$

对非线性项冠以小参数 ε，(17)式化为

$$\begin{aligned} &\ddot x + \omega_0^2 x + \varepsilon\alpha\dot x + \varepsilon\beta x^3 \\ &= A_1\cos(v_1t+\theta_1) + A_2\cos(v_2t+\theta_2). \end{aligned} \tag{26}$$

令

$$\tau = \omega t,$$

$$\tau_1 = v_1 t = \alpha_1\tau,$$

$$\tau_2 = v_2 t = \alpha_2\tau,$$

将上面三式带入(26)式中，得

$$\begin{aligned} &\omega^2x'' + \omega_0^2x + \varepsilon\alpha\omega x' + \varepsilon\beta x^3 \\ &= A_1\cos(\tau_1+\theta_1) + A_2\cos(\tau_2+\theta_2), \end{aligned} \tag{27}$$

其中“$'$”表示对 τ 求导. 将 x 和ω 展开成幂级数

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \cdots, \tag{28}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon^2\omega_2 + \cdots, \tag{29}$$

将(28)和(29)式代入(27)式，令方程左右两端 ε 同次幂的系数相等，得

$$\begin{aligned} &\omega_0^2x_0'' + \omega_0^2x_0 \\ &= A_1\cos(\tau_1+\theta_1) + A_2\cos(\tau_2+\theta_2), \\ &\omega_0^2x_1'' + \omega_0^2x_1 \\ &= -2\omega_0\omega_1x_0'' - \alpha\omega_0x_0' - \beta x_0^3, \\ &\omega_0^2x_2'' + \omega_0^2x_2 \\ &= -(2\omega_0\omega_2 + \omega_1^2)x_0'' - 2\omega_0\omega_1x_1'' \\ &\quad + \alpha(\omega_0x_1' + \omega_1x_0') + 3\beta x_0^2x_1, \\ &\cdots \end{aligned} \tag{30}$$

(30)式中第一方程的通解为

$$\begin{aligned} x_0 &= a\cos(\tau+\theta) + B_2\cos(\tau_1+\theta_1) \\ &\quad + B_2\cos(\tau_2+\theta_2), \end{aligned} \tag{31}$$

其中 $B_i = \frac{A_i}{(\omega_0^2 - v_i^2)}$， $(i = 1,2)$.

将(31)式代入(30)式第二方程得

$$
\begin{aligned}
&\omega_0^2 x_1'' + \omega_0^2 x_1 \\
= &- \alpha\omega_0 [a\sin(\tau + \theta) + \alpha_1 B_1 \sin(\tau_1 + \theta_1) \\
&+ \alpha_2 B_2 \sin(\tau_2 + \theta_2)] + 2\omega_0\omega_1 [a\cos(\tau + \theta)] \\
&+ \alpha_1^2 B_1 \cos(\tau_1 + \theta_1) + \alpha_2^2 B_2 \cos(\tau_2 + \theta_2)] \\
&- \frac{1}{4}\beta a^3 [3\cos(\tau + \theta) + \cos3(\tau + \theta)] \\
&- \frac{3}{4}\beta a^2 B_1 [\cos(\tau_1 + 2\tau + \theta_1 + 2\theta) \\
&+ \cos(\tau_1 - 2\tau + \theta_1 - 2\theta)] + 2\cos(\tau_1 + \theta_1)] \\
&- \frac{3}{4}\beta a^2 B_2 [\cos(\tau_2 + 2\tau + \theta_2 + 2\theta) \\
&+ \cos(\tau_2 - 2\tau + \theta_2 - 2\theta)] + 2\cos(\tau_2 + \theta_2)] \\
&- \frac{3}{4} baB_1^2 [\cos(2\tau_1 + \tau + 2\theta_1 + \theta) \\
&+ \cos(2\tau_1 - \tau + 2\theta_1 - \theta) + 2\cos(\tau + \theta)] \\
&- \frac{3}{4}\beta aB_2^2 [\cos(2\tau_2 + \tau + 2\theta_2 + \theta) \\
&+ \cos(2\tau_2 - \tau + 2\theta_2 - \theta)] + 2\cos(\tau + \theta)] \\
&- \frac{3}{2}\beta aB_1 B_2 [\cos(\tau_1 + \tau_2 + \tau + \theta_1 + \theta_2 + \theta) \\
&+ \cos(\tau_1 + \tau_2 - \tau + \theta_1 + \theta_2 - \theta) \\
&+ \cos(\tau_1 - \tau_2 + \tau + \theta_1 - \theta_2 + \theta) \\
&+ \cos(\tau_1 - \tau_2 - \tau + \theta_1 - \theta_2 - \theta)] \\
&- \frac{1}{4}\beta B_1^3 [3\cos(\tau_1 + \theta_1) + \cos3(\tau_1 + \theta_1)] \\
&- \frac{3}{4}\beta B_1^2 B_2 [\cos(2\tau_1 + \tau_2 + 2\theta_1 + \theta_2) \\
&+ \cos(2\tau_1 - \tau_2 + 2\theta_1 - \theta_2) + 2\cos(\tau_2 + \theta_2)] \\
&- \frac{3}{4}\beta B_1 B_2^2 [\cos(\tau_1 + 2\tau_2 + \theta_1 + 2\theta_2) \\
&+ \cos(2\tau_2 - \tau_1 + 2\theta_2 - \theta_1) + 2\cos(\tau_1 + \theta_1)] \\
&- \frac{1}{4}\beta B_2^3 [3\cos(\tau_2 + \theta_2) + \cos3(\tau_2 + \theta_2)], \quad (32)
\end{aligned}
$$

(32)式可能发生多种谐波响应：

1) $\tau = 3\tau_i (i = 1,2)$，即 $\omega_0 = 3\nu_1 (i = 1,2)$，超谐波响应；

2) $\tau = \frac{1}{3}\tau_i (i = 1,2)$，即 $\omega_0 \approx \frac{1}{3}\nu_i (i = 1,2)$，次谐波响应；

3) $2\tau_1 \pm \tau_2 = \tau$，即 $2\nu_1 \pm \nu_2 \approx \omega_0$，组合谐波响应；

4) $\tau_1 \pm 2\tau_2 = \tau$，即 $\nu_1 \pm 2\nu_2 \approx \omega_0$，组合谐波响应；

5) $\tau_1 \pm \tau_2 = 2\tau$，即 $\nu_1 \pm \nu_2 \approx 2\omega_0$，组合谐波响应.

对于组合强迫激励，(32)式中除以上响应之外，还可以同时存在多于一个的响应，即可以同时存在超谐波响应和次谐波响应，或同时存在超谐波响应和组合谐波响应等.

以 $2\nu_1 - \nu_2 \approx \omega_0$ 为例讨论组合谐波响应情况，由于 $2\tau_1 - \tau_2 = \tau$，有

$$
\begin{aligned}
&\cos(2\tau_1 - \tau_2 + 2\theta_1 - \theta_2) \\
&= \cos(\tau + \theta + 2\theta_1 - \theta_2 - \theta) \\
&= \cos(\tau + \theta) \cdot \cos(2\theta_1 - \theta_2 - \theta) \\
&\quad - \sin(\tau + \theta) \cdot \cos(2\theta_1 - \theta_2 - \theta). \quad (33)
\end{aligned}
$$

把(33)式代入(32)式，当满足以下条件时，$\cos(\tau + \theta)$和 $\sin(\tau + \theta)$的系数为零，可以消除久期项，

$$
\begin{aligned}
&\alpha\omega_0 a + \frac{3}{4}\beta B_1^3 B_2 \sin(2\theta_1 - \theta_2 - \theta) = 0, \\
&2\omega_0\omega_1 a - \frac{3}{2}\beta a(B_1^2 + B_2^2) - \frac{1}{4}\beta, \\
&- \frac{3}{4}\beta B_1^2 B_2 \cos(2\theta_1 - \theta_2 - \theta) = 0. \quad (34)
\end{aligned}
$$

解(34)式得

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{\alpha^2}{4} + \left(\omega_1 - \beta\Gamma_2 - \frac{3\beta a^2}{8\omega_0}\right)^2\right] a^2 = \beta^2 \Gamma_1^2, \\
&\tan(2\theta_1 - \theta_2 - \theta) = \frac{\alpha}{2\omega_1 - 2\beta\Gamma_2 - \dfrac{3\beta a^2}{4\omega_0}}, \quad (35)
\end{aligned}
$$

式中，$\Gamma_1 = \frac{3}{8\omega_0} B_1^2 B_2$，$\Gamma_2 = \frac{3}{4\omega_0}(B_1^2 + B_2^2)$，(35)式为 $2\nu_1 - \nu_2 \approx \omega_0$ 时的频率振幅响应方程，由此式得振幅的峰值和对应的 ω_1 值为

$$
\begin{aligned}
a_m &= \frac{2\beta\Gamma_1}{\alpha}, \\
\omega_1 &= \beta\Gamma_2 + \frac{3}{8}\frac{\beta}{\omega_0}a^2 \\
&= \beta\Gamma_2 + \frac{3}{2}\frac{\beta^3\Gamma_1^2}{\omega_0\alpha^2},
\end{aligned}
$$

所以方程的一次近似解为

$$
\begin{aligned}
x &= a\cos[(2\nu_1 - \nu_2)t + \omega_1 t + \theta] \\
&\quad + B_1\cos(v_1 t + \theta_1) + B_2\cos(v_2 t - \theta_2). \quad (36)
\end{aligned}
$$

5. 结　论

本文建立了两质量相对转动系统的非线性动力

学方程. 应用变量梯度法构造了李雅普诺夫函数,研究了一类含广义非线性弹性力的相对转动非线性自治系统的稳定性,证明了在一定条件下系统在平衡状态(0,0)处是渐近稳定且是大范围渐近稳定的. 应用摄动法求得相对转动非线性非自治系统在两种不同频率谐波共同激励下的组合谐波响应的近似解.

[1] Carmeli M 1985 *Found*. *Phys*. **15** 175
[2] Carmeli M 1986 *Inter*. *J*. *Theor*. *Phys*. **25** 89
[3] Luo S K 1996 *J*. *Beijing Inst*. *Technol*. **16** (S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16** (S1) 154]
[4] Luo S K 1996 *Appl*. *Math*. *Mech*. **17** 683
[5] Luo S K 1998 *Appl*. *Math*. *Mech*. **19** 45
[6] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
[7] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
[8] Jia L Q 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 1043 (in Chinese) [贾利群 2003 物理学报 **52** 1043]
[9] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯、傅景礼、陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
[10] Luo S K, Guo Y X, Chen X W, Fu J L 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜、傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]
[11] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
[12] Fu J L, Chen X W, Luo S K 1999 *Appl*. *Math*. *Mech*. **20** 1266
[13] Fu J L, Chen X W, Luo S K 2000 *Appl*. *Math*. *Mech*. **21** 549
[14] Fang J H 2000 *Acta Phys*. *Sin*. **49** 1028 (in Chinese) [方建会 2000 物理学报 **49** 1028]
[15] Fang J H, Zhao S Q 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 390 (in Chinese) [方建会、赵嵩卿 2001 物理学报 **50** 390]
[16] Fang J H 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 1001 (in Chinese) [方建会 2001 物理学报 **50** 1001]
[17] Luo S K, Chen X W, Fu J L 2001 *Chin*. *Phys*. **10** 271
[18] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 429
[19] Luo S K, Chen X W, Guo Y X 2002 *Chin*. *Phys*. **11** 523
[20] Luo S K 2002 *Chin*. *Phys*. *Lett*. **19** 449
[21] Luo S K, Lu Y B, Zhou Q, Wang Y D, Ouyang S 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1913 (in Chinese) [罗绍凯、卢一兵、周 强、王应德、欧阳实 2002 物理学报 **51** 1913]
[22] Fu J L, Chen L Q, Luo S K, Chen X W, Wang X M 2001 *Acta Phys*. *Sin*. **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、罗绍凯、陈向炜、王新民 2001 物理学报 **50** 2289]
[23] Fu J L, Chen L Q, Xue Y, Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2683 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭、罗绍凯 2002 物理学报 **51** 2683]
[24] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 256 (in Chinese) [傅景礼、陈立群、薛 纭 2003 物理学报 **52** 256]
[25] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 712 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 712]
[26] Luo S K 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 1416 (in Chinese) [罗绍凯 2002 物理学报 **51** 1416]
[27] Luo S K 2003 *Acta Phys*. *Sin*. **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
[28] Luo S K, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 666 (in Chinese) [罗绍凯、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 666]
[29] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 1271 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 1271]
[30] Luo S K, Guo Y X, Mei F X 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 2413 (in Chinese) [罗绍凯、郭永新、梅凤翔 2004 物理学报 **53** 2413]
[31] Luo S K 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
[32] Luo S K 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 140
[33] Luo S K, Jia L Q, Cai J L 2003 *Chin*. *Phys*. **12** 841
[34] Luo S K, Huang F J, Lu Y B 2004 *Chin*. *Phys*. **13** 2182
[35] Luo S K, Cai J L, Jia L Q 2005 *Chin*. *Phys*. **14** 656
[36] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys*. *Sin*. **51** 2191 (in Chinese) [董全林、刘 彬 2002 物理学报 **51** 2191]
[37] Dong Q L, Wang K, Zhang C X, Liu B 2004 *Acta Phys*. *Sin*. **53** 337 (in Chinese) [董全林、王 坤、张春熹、刘 彬 2004 物理学报 **53** 337]
[38] Zhao W, Liu B 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 4543 (in Chinese) [赵 武、刘 彬 2005 物理学报 **54** 4543]
[39] Wang K 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 3987 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 3987]
[40] Wang K 2005 *Acta Phys*. *Sin*. **54** 5530 (in Chinese) [王 坤 2005 物理学报 **54** 5530]
[41] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2006 *Acta Phys*. *Sin*. **55** 3852 (in Chinese) [赵 武、刘 彬、时培明、蒋金水 2006 物理学报 **55** 3852]
[42] Shi P M, Liu B 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 3678 (in Chinese) [时培明、刘 彬 2007 物理学报 **56** 3678]
[43] Meng Z, Liu B 2007 *Acta Phys*. *Sin*. **56** 6194 (in Chinese) [孟 宗、刘 彬 2007 物理学报 **56** 6194]

Stability of equilibrium state of a kind of nonlinear relative rotation dynamic system and associated harmonic approximate solution*

Meng Zong† Liu Bin

(*Institute of Electrical Engineering*, *Yanshan University*, *Qinhuangdao* 066004, *China*)

(Received 7 June 2007; revised manuscript received 28 June 2007)

Abstract

The nonlinear dynamic equation with two masses in relative rotation is established, which contains a kind of generalized nonlinear elastic force. Using variable gradient method, the Lyapunov function is gotten, and the stability of the relative rotation nonlinear autonomous system is studied. The approximate solution of the associated harmonic response of the relative rotation nonlinear non-autonomous system under two forcing excitations of different frequencies is obtained by the method of perturbation.

Keywords: relative rotation, nonlinear dynamics system, stability, associated harmonic response

PACC: 0340D, 0313, 0320

* Project supported by the National Significant Tackle Key Problems for 10th 5- year Plan of China (Grant No. ZZ02-13B-02-03-1).

† E-mail: mzysu@ysu.edu.cn