

基于非线性观测器的一类分数阶混沌系统 完全状态投影同步

陈向荣 刘崇新 李永勋

(西安交通大学电气工程学院, 电力设备电气绝缘国家重点实验室, 西安 710049)

(2007 年 6 月 5 日收到, 2007 年 7 月 18 日收到修改稿)

基于分数阶系统稳定性理论, 提出了用状态观测器来实现分数阶混沌系统完全状态投影同步的思想. 设计的状态观测器能够实现一类非线性分数阶系统的完全状态投影同步而不要求分数阶混沌系统是部分线性的, 推广了投影同步的应用范围, 且无需计算系统的条件 Lyapunov 指数. 另外, 该方法理论严格, 设计简单, 能够达到任意比例因子的完全状态同步. 最后, 利用该方法实现了分数阶 Rössler 系统的完全状态投影同步, 数值仿真结果证实了它的有效性.

关键词: 分数阶, 混沌系统, 状态观测器, 投影同步

PACC: 0545

1. 引言

分数阶微积分几乎与整数阶微积分有同样长的历史, 但分数阶微积分在物理和工程中的应用最近才引起人们的研究兴趣. 事实上许多系统都能呈现出分数阶动力学行为, 例如黏滞系统、电介质极化和电磁波等. 近年来, 分数阶混沌系统引起人们广泛的兴趣和深入地研究, 在 Chua's 电路^[1]、Chen 系统^[2,3]、Lü 系统^[4]、混沌电子振荡器^[5]、Rössler 系统和超混沌 Rössler 系统^[6]中, 通过数值仿真, 发现当系统的阶数为分数时, 系统仍呈现混沌或超混沌状态, 且更能反映系统所呈现的物理现象, 这极大地促进了分数阶混沌系统的研究及分数阶微积分理论的发展.

自从 1990 年 Pecora 和 Carroll 提出了混沌同步的概念和方法^[7]以来, 随着混沌同步研究的不断深入, 人们发现它在保密通信和振荡发生器设计等领域有着巨大的应用前景, 于是混沌控制与同步已成为混沌和控制领域的研究热点. 到目前为止, 文献中已经提出了许多有效的混沌同步控制方法^[8,9]. 然而, 由于分数阶混沌系统实现同步的复杂性, 对于分数阶混沌系统的同步控制的研究却相对较少^[10-12]. 1999 年, Mainieri 和 Rehacek 在部分线性混沌系统中观察到一种新的同步现象——投影同步

(projective synchronization)^[13], 就是驱动-响应系统可以同步到一个比例因子上, 由于投影同步可以把二进制数扩展到 M 进制来实现通信信号的更快传输, 因此对此类同步现象的研究已成为混沌系统同步研究的一个新方向. 目前, 在有关投影同步的研究中, 要求所研究的混沌系统是部分线性的, 可以表示为

$$\dot{u} = M(z) \cdot u, \quad (1)$$

$$\dot{z} = f(u, z), \quad (2)$$

式中 z 既是状态变量又是控制信号, 这一要求限制了大多数的分数阶混沌系统, 包括 Rössler 系统.

本文基于分数阶系统稳定性理论, 提出了用状态观测器来实现分数阶混沌系统完全状态投影同步的思想. 该同步方法能够实现一类非线性分数阶系统的完全状态投影同步而不要求分数阶混沌系统是部分线性的, 推广了投影同步的应用范围, 且无需计算系统的条件 Lyapunov 指数. 另外, 该同步方法理论严格, 设计简单, 能够达到任意比例因子的完全状态同步. 最后, 本文利用该同步方法实现了分数阶 Rössler 系统的投影同步, 数值仿真结果证实了该方法的有效性.

2. 分数阶微分及数值算法

分数阶微分的定义有好几种^[14], 但常用的是 Riemann-Liouville (RL) 定义, 其数学表达式如下:

$$\frac{d^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} d\tau, \quad (3)$$

式中 $\Gamma(\cdot)$ 为 gamma 函数, $n-1 \leq \alpha < n$, n 为整数.

目前, 实施分数阶微积分运算的求解方法有多种, 但常用的方法主要有波特图近似方法^[15]和预估-校正方法^[16], 下面简单介绍本文利用的预估-校正方法, 即广义的 Adams-Bashforth-Moulton 方法, 考虑如下微分方程:

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha y(t)}{dt^\alpha} &= f(t, y(t)), \quad 0 \leq t \leq T, \\ y^{(k)}(0) &= y_0^{(k)}, \quad k = 0, 1, \dots, [\alpha] - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j = 0, \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n, \\ 1, & j = n+1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} y_h^{(k)}(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \\ b_{j,n+1} &= \frac{h^\alpha}{\alpha} ((n+1-j)^\alpha - (n-j)^\alpha). \end{aligned}$$

(5) 式与 (6) 式的误差为 $\max_{j=0,1,\dots,n} |y(t_j) - y_h(t_j)| = O(h^p)$, 其中 $p = \min(2, 1 + \alpha)$.

3. 基于非线性观测器的完全状态投影同步理论

设分数阶驱动系统为

$$\frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} = Ax + B \cdot F(x) + C, \quad (7)$$

式中 $0 < \alpha \leq 1$, $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $C \in R^n$, $F: R^n \rightarrow R^m$ ($m \leq n$) 为非线性映射, Ax 为线性部分, $B \cdot F(x)$ 为非线性部分, C 为常数. 许多分数阶混沌系统都可以写成 (7) 式的形式, 例如分数阶 Chua's 电路, 分数阶 Chen 系统, 分数阶 Lü 系统, 分数阶 Rössler 系统和超混沌 Rössler 系统等.

令 (7) 式的输出为

$$s(x) = Kx + \gamma F(x), \quad (8)$$

式中 $K \in R^{m \times n}$ 为反馈增益, $\gamma \in R^+$ 为任意常数.

则分数阶状态观测器 (响应系统) 为

$$\frac{d^\alpha y}{dt^\alpha} = Ay + B \cdot F(y) + \beta C$$

方程 (4) 与 Volterra 积分方程

$$y(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, y(\tau)) d\tau \quad (5)$$

等价. 取 $h = \frac{T}{N}$, $t_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N \in Z^+$ (5) 式

可离散化为

$$\begin{aligned} y_h(t_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t_{n+1}^k}{k!} y_0^{(k)} + \frac{h^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} f(t_{n+1}, y_h(t_{n+1})) \\ &+ \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f(t_j, y_h(t_j)), \end{aligned} \quad (6)$$

式中

$$+ \left(\frac{B}{\gamma}\right) \cdot (\beta s(x) - s(y)), \quad (9)$$

式中 β 为达到投影同步的比例因子, 设分数阶驱动系统 (7) 和分数阶响应系统 (9) 的同步误差 $e = \beta x - y$. 根据分数阶微分的性质, 有

$$\frac{d^\alpha e}{dt^\alpha} = \beta \frac{d^\alpha x}{dt^\alpha} - \frac{d^\alpha y}{dt^\alpha}. \quad (10)$$

代入 (7) (8) 和 (9) 式 (10) 式可化为

$$\begin{aligned} \frac{d^\alpha e}{dt^\alpha} &= Ae + \beta BF(x) - BF(y) - \left(\frac{B}{\gamma}\right) \cdot (\beta s(x) - s(y)) \\ &= Ae - \frac{BK}{\gamma} \cdot e = Ae - BPe = (A - BP)e \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $P = \frac{K}{\gamma}$, A, B 可控, $(A - BP)$ 为时不变矩阵, 由分数阶线性系统的稳定性理论^[17]可知, 当 $|\arg(\lambda_i(A - BP))| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 时, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e\| = 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\beta x - y\| = 0$, 这样分数阶驱动系统 (7) 和响应系统 (9) 达到了完全状态投影同步. 根据控制理论中的零极点配置方法, 适当选取增益向量 P , 可以使得 $|\arg(\lambda_i(A - BP))| > \frac{\alpha\pi}{2}$, $i = 1, 2, \dots, n$, 则有 $e \rightarrow 0$, 从而实现两个分数阶系统的投影同步. 另外, $(A - BP)$ 与比例因子 β 无关, 因此基于 (9) 式的分数阶观测器同步控制方法能够应用到任意比例因子.

4. 数值仿真

将分数阶 Rössler 系统写成 (7) 式的形式,有

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha_1} x_1}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2} x_2}{dt^{\alpha_2}} \\ \frac{d^{\alpha_3} x_3}{dt^{\alpha_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_1 x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix}. \quad (12)$$

当系统参数 $a = b = 0.2, c = 5$ 时, $\alpha = (1, 1, 0.9)$, 分数阶 Rössler 系统是混沌的, 混沌吸引子如图 1 所示.

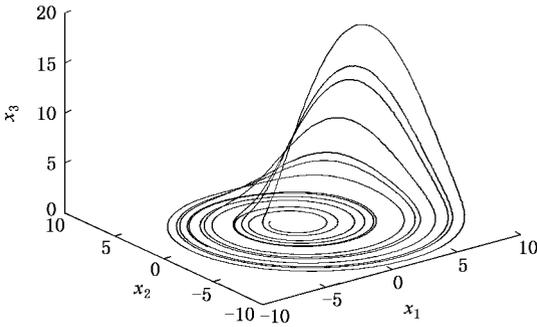
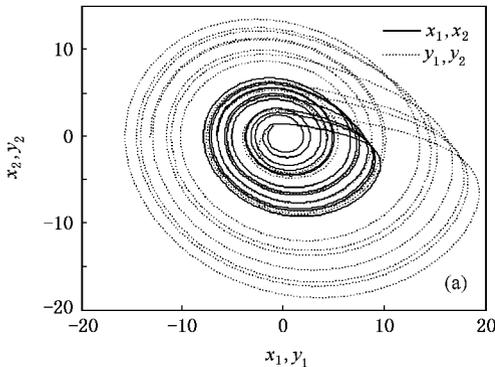


图 1 分数阶 Rössler 系统的混沌吸引子

选取 $s(x) = \gamma x_1 x_3 + \sum_{i=1}^3 k_i x_i$, 响应系统为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha_1} y_1}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2} y_2}{dt^{\alpha_2}} \\ \frac{d^{\alpha_3} y_3}{dt^{\alpha_3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} y_1 y_3$$



$$+ \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{\gamma} \end{bmatrix} (\beta s(x) - s(y)), \quad (13)$$

则误差方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{d^{\alpha_1} e_1}{dt^{\alpha_1}} \\ \frac{d^{\alpha_2} e_2}{dt^{\alpha_2}} \\ \frac{d^{\alpha_3} e_3}{dt^{\alpha_3}} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & -c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{k_1}{\gamma} & \frac{k_2}{\gamma} & \frac{k_3}{\gamma} \end{bmatrix} \right) \times \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}. \quad (14)$$

显然 A, B 是可控的, 任取 $\lambda_i(A - BP) = [-0.5, -1, -2], i = 1, 2, 3$, 令 $\gamma = 1$, 利用极点配置方法, 可得 $K = [-3.24 \quad 2.052 \quad -1.3]$ 将反馈增益 K 代入系统 (13) 驱动系统 (12) 与响应系统 (13) 达到完全状态变量的投影同步, 当 $\beta = 2$ 时, $\alpha = (1, 1, 0.9)$ 利用预估-校正算法, 可得驱动系统 (12) 和响应系统 (13) 的完全状态投影同步相图如图 2(a) 所示, 设同步误差 $r = \sqrt{(\beta x_1 - y_1)^2 + (\beta x_2 - y_2)^2 + (\beta x_3 - y_3)^2}$, 得同步误差如图 2(b) 所示, 当 $\beta = -2$ 时, $\alpha = (1, 1, 0.9)$, 可得驱动系统 (12) 和响应系统 (13) 的反相位完全状态投影同步相图如图 2(a) 所示, 同步误差如图 2(b) 所示.

5. 结 论

本文基于分数阶系统稳定性理论, 提出了用状态观测器来实现分数阶混沌系统完全状态投影同步的思想. 设计的分数阶状态观测器能够实现一类非线性分数阶系统的投影同步而不要求分数阶混沌系

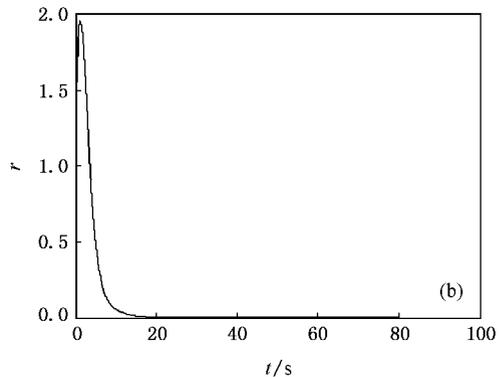


图 2 (a) 完全状态投影同步相图($\beta = 2$) (b) 同步误差

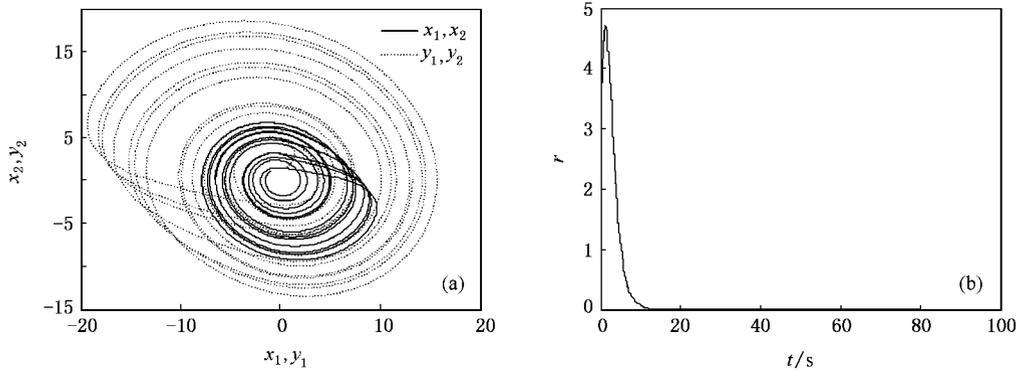


图 3 (a)反相位完全状态投影同步相图($\beta = -2$)(b)同步误差

统是部分线性的,推广了投影同步的适用范围,且无需计算系统的条件 Lyapunov 指数. 另外,该同步方法理论严格,设计简单,能够达到任意比例因子的完全状态同步. 最后,利用该同步方法实现了分数阶

Rössler 系统的完全状态投影同步,数值仿真结果证实了该方法的有效性,为分数阶混沌系统在实际中的应用提供了理论依据.

- [1] Hartly T T , Lorenzo C F , Qammer H K 1995 *IEEE Trans. CAS-I* **42** 485
- [2] Li C G , Chen G R 2004 *Chaos , Solitons and Fractals* **22** 549
- [3] Lu J G , Chen G R 2006 *Chaos , Solitons and Fractals* **27** 685
- [4] Lu J G 2006 *Phys. Lett. A* **354** 305
- [5] Gao X , Yu J B 2005 *Chi. Phys.* **14** 908
- [6] Li C G , Chen G R 2004 *Physica A* **341** 55
- [7] Pecora L M , Carroll T L 1990 *Phys. Rev. Lett.* **64** 821
- [8] Wang X Y , Shi Q J 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5591 (in Chinese)
[王兴元、石其江 2005 物理学报 **54** 5591]
- [9] Tao C H , Lu J A , Lü J H 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1497 (in Chinese) [陶朝海、陆君安、吕金虎 2002 物理学报 **51** 1497]
- [10] Li C G , Liao X F , Yu J B 2003 *Phys. Rev. E* **68** 67203
- [11] Yan J P , Li C P 2007 *Chaos , Solitons and Fractals* **32** 725
- [12] Shao S Q , Gao X , Liu X W 2007 *Chin. Phys.* **16** 2612
- [13] Mainieri R , Rehacek J 1999 *Phys. Rev. Lett.* **85** 3042
- [14] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York : Academic Press)
- [15] Charef A , Sun H H , Tsao Y Y , Onaral B 1992 *IEEE Trans. Auto. Contr.* **37** 9
- [16] Li C P , Peng G J 2004 *Chaos , Solitons and Fractals* **22** 443
- [17] Matignon D 1996 In : *IMACS , IEEE-SMC , Lille , France* 963

Nonlinear observer based full-state projective synchronization for a class of fractional-order chaotic system

Chen Xiang-Rong Liu Chong-Xin Li Yong-Xun

(*School of Electrical Engineering , Key Laboratory of Electrical Insulation and Power Equipment ,
Xi 'an Jiaotong University , Xi 'an 710049 , China*)

(Received 5 June 2007 ; revised manuscript received 18 July 2007)

Abstract

In this paper , based on the stability theory of the fractional-order system , an idea of using state observer to realize the full-state projective synchronization of fractional-order chaotic system is proposed. The designed observer can achieve full-state projective synchronization in a class of nonlinear fractional-order systems without the limitation of partial-linearity , extend the scope of application of projective synchronization , and does not require the calculation of the conditional Lyapunov exponents. In addition , this synchronization method is simple and theoretically rigorous , capable to achieve a full-state synchronization of arbitrary scaling factor. Finally , the method has been applied to realize the full-state projective synchronization of fractional-order Rössle system , and the simulation results verified the effectiveness of the method.

Keywords : fractional order , chaotic system , state observer , projective synchronization

PACC : 0545