

# 复杂自适应系统动力学演化及其相变的一般理论<sup>\*</sup>

徐炳振<sup>†</sup>

(宁波大学理论物理研究所, 宁波 315211)

(2007 年 3 月 3 日收到 2007 年 9 月 11 日收到修改稿)

将此前已建立的描述复杂自适应系统动力学及其相变的理论做了进一步的推广,建立了更具实际意义的复杂自适应系统模型,并给出了其动力学演化和相变的一般理论.作为应用,对抛硬币游戏活动进行了数值模拟,并与相应的理论结果进行了对比.结果表明,两者符合很好.

关键词:复杂自适应系统,自组织分离,聚集,动力学相变

PACC: 0175, 0520

## 1. 引 言

在社会、经济和生物系统中一类很重要的问题就是系统中“人员”成分的演化.这些系统的共同特点是系统中每个个体都要根据各自过去的经验采取行动<sup>[1-5]</sup>,其中最有意义的是资源竞争问题.在这类问题中,每个参与者或经纪人为了获得尽可能多的资源,都试图进入少数者行列.譬如在交通的高峰期,如有两条路程相近且均可达目的地的道路,为了尽快到达目的地,司机将尽量选择车流量和交通流量较小的那条道路.又如在金融市场上,金融产品的价格受供求关系影响,如果对某种金融产品的需求量大于供应量,或者是买入多于卖出,一般情况下这种金融产品的价格就会上涨,否则就会下降.这时参与该种金融产品买卖以期从中获利的人,就会试图加入少数者行列.在这样的激烈竞争过程中,人人都面临着被淘汰的可能性,为了生存下去就必须正确决策.为了研究这类系统的行为,人们建立了貌似简单却抓住了问题本质的争当少数者博弈模型和演化的争当少数者博弈模型<sup>[6-19]</sup>.其中所取得的最具有物理意义的发现主要有三个方面.一是独立的经纪人之间存在一定形式的合作与自组织现象<sup>[7,11]</sup>.二是如果在竞争过程中盈利和亏损相当,这些相互竞争中的经纪人将自发地分成策略互相对立的两部分,即系统中成员结构分布呈现出所谓的自组织分离态<sup>[11,12,20]</sup>,在这样的系统中那些总是跟随历史趋势或者从不跟随历史趋势的经纪人(极端经纪人)的成功概率总是大于那些小心谨慎的经纪人(温和经

纪人)的成功概率.三是如果在竞争过程中盈利总体小于亏损,这些相互竞争中的经纪人将由初始阶段策略互相对立的自组织分离的分布状态逐渐过渡到策略彼此相近的聚集态<sup>[13-15,20]</sup>,即系统会由初始阶段极端经纪人占多数的状态过渡到温和经纪人占多数的状态.

在以前研究的模型<sup>[11-15,20]</sup>中,总是假定每个胜出者每次所获得的“奖励”与每个失利者每次受到的“处罚”都是常数,因而奖罚比  $R$  也总是一个常数.但是,在现实生活中情况却并非如此.例如在金融市场上,每次交易的数量和价格都是变化的,从而交易者的获利与损失也是变化的,可以说奖罚比  $R$  是个随机变量.又如在赌场和赛马场等博彩业,由于赌徒们每次所下的赌注也是因情势而变,所以回报和损失也都是随机变量,因而他们每次的输赢也是变化的,而且因为赌场老板要抽头(这是赌场老板的主要收入来源之一),所以赌徒们的总收益肯定小于总损失.本文将文献<sup>[20]</sup>中建立的自适应复杂系统的动力学相变理论推广到奖罚比  $R$  及胜出概率均为随机变量的情况,使之能够描述一般的资源竞争过程,建立了更具实际意义的复杂自适应系统模型,用数值模拟方法研究这种系统的动力学相变,并与理论结果进行了比较.

## 2. 与时间有关的随机行走问题

### 2.1. 无吸附边界的情况

将经纪人财富的变化描述为一维实轴上与离散

<sup>\*</sup> 国家自然科学基金(批准号:10647135,10774080)资助的课题.

<sup>†</sup> E-mail: xubingzhen@nbu.edu.cn

时间有关的随机行走问题.行人在  $t$  时刻所处的位置对应于经纪人此时所具有的财富值,行人向  $x$  轴正向移动的概率对应于经纪人赢的概率,行人向  $x$  轴反向移动的概率对应于经纪人输的概率,行人移动的步幅对应于经纪人财富的增减量.如果行人每行走一步需要一个单位时间,则行人行走的步数  $n$  在数值上等于其行走过程所经历的时间  $t$ .将  $t-1$  时刻处于  $x'$  点的行人、在  $t$  时刻到达  $x$  点的概率  $u(x, t | x', t-1)$  表示为

$$\begin{aligned} & u(x, t | x', t-1) \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \varepsilon - A(t) \right] \delta[x - x' + R(t)] \\ &+ \left[ \frac{1}{2} + \varepsilon + A(t) \right] \delta[x - x' - L(t)], \quad (1) \end{aligned}$$

其中  $L(t)$  表示第  $n$  步向左移动的距离,  $R(t)$  表示第  $n$  步向右移动的距离,它们都是随机变量;  $\varepsilon \pm A(t)$  是另外与  $R(t)$  和  $L(t)$  都无关的随机变量,它表示向前移动概率和向后移动概率对完全随机过程的偏离(在完全随机情况下,向前移动概率和向后移动概率均为  $1/2$ ),  $\varepsilon$  ( $-\frac{1}{2} < \varepsilon < \frac{1}{2}$ ) 代表净偏离,  $A(t)$  的长时间平均值为零,即  $\overline{A(t)} = 0$ ,  $A(t)$  平方的长时间平均值记为  $\overline{A^2(t)} = A^2$ .如果以  $p(x, t)$  表示行走在  $t$  时刻出现在  $x$  点的概率密度,则它可由下列主方程来描述:

$$\begin{aligned} p(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t | x', t-1) p(x', t-1) dx' \\ &= \left[ \frac{1}{2} - \varepsilon - A(t) \right] p[x - R(t), t-1] \\ &+ \left[ \frac{1}{2} + \varepsilon + A(t) \right] p[x + L(t), t-1]. \quad (2) \end{aligned}$$

利用特征函数方法<sup>[21]</sup>容易求得,对于充分长的时间  $t$  后分布中心的位置(行人的平均位置)为

$$\begin{aligned} x &\approx x_0 + x_t = x_0 - \frac{t}{2} [\overline{L(t)} - \overline{R(t)}] \\ &- t\varepsilon [\overline{L(t)} + \overline{R(t)}], \quad (3) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} x_t &= -\frac{t}{2} [\overline{L(t)} - \overline{R(t)}] \\ &- t\varepsilon [\overline{L(t)} + \overline{R(t)}]. \quad (4) \end{aligned}$$

行人位置的分布方差  $\sigma^2(t)$  可表示为

$$\begin{aligned} \sigma^2(t) &\equiv (x - x_t)^2 \\ &\approx \left\{ \frac{1}{4} - [\varepsilon^2 + \overline{A^2(t)}] \right\} [\overline{L(t)} + \overline{R(t)}] t. \quad (5) \end{aligned}$$

(3)–(5) 式中,  $\cdot$  表示对系综平均,上划线表示对时间平均.

根据中心极限定理,经历足够长的时间以后,  $p(x, t)$  收敛于以  $x$  为中心、以  $\sigma(t)$  为半宽度的高斯分布,即

$$p(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \exp\left[-\frac{(x - x_t)^2}{2\sigma^2(t)}\right]. \quad (6)$$

## 2.2. 有吸附边界的情况

在一维无界空间中扩散方程的唯一严格解是高斯函数,而上述得到的概率密度  $p(x, t)$  的极限行为也可以用高斯函数来描述,因此概率密度分布  $p(x, t)$  可由下列变系数的扩散方程描述:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t} &= D(t) \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2} \\ &- v(t) \frac{\partial p(x, t)}{\partial x}, \quad (7) \end{aligned}$$

其中扩散系数  $D(t)$  和分布中心的漂移速度  $v(t)$  分别为

$$D(t) = \frac{1}{2} \frac{d\sigma^2(t)}{dt}, \quad (8)$$

$$v(t) = \frac{dx_t}{dt}. \quad (9)$$

因为微分方程反映的是物理过程的基本规律,其成立与否与变边界条件的存在与否无关,所以当我们讨论存在边界吸收的问题时,也可以用该方程加上相应的边界条件  $p(x=0, t) \equiv 0$  来描述.

利用类似于文献[20]中的方法可以证明,当满足初始条件  $p(x=0, t) = \delta(x - x_0)$  和边界条件  $p(x=0, t) \equiv 0$  时,方程(7)在  $x \rightarrow \infty$  时的渐进解为

$$\begin{aligned} & p(x, t | x_0, 0) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x + x_0 + x_t)^2}{2\sigma^2(t)}\right] \right. \\ &- \exp\left[-\frac{(x + x_0 - x_t)^2}{2\sigma^2(t)}\right] \\ &+ \exp\left[-\frac{(x - x_0 + x_t)^2}{2\sigma^2(t)}\right] \\ &- \left. \exp\left[-\frac{(x - x_0 - x_t)^2}{2\sigma^2(t)}\right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

由此可以得到行人初始时位于零点右侧并在经历  $t$  时间以后仍然保持在零点右侧的概率(称之为存活概率)

$$S(t | x_0) = \int_0^{\infty} p(x, t | x_0, 0) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x_0 + x_t}{\sqrt{2\sigma^2(t)}} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{x_0 - x_t}{\sqrt{2\sigma^2(t)}} \right) \right], \quad (11)$$

其中  $\operatorname{erf}(x)$  为误差函数.

为了考察上述理论的有效性,我们首先考虑文献 [20, 22] 所讨论过的  $\varepsilon = 0$ ,  $I(t) = R(t) = 1$  和  $A(t) = (-1)A_0$  这种特殊情况. 在此情形下, 容易得到

$$x_t = -[1 - (-1)^t] A_0,$$

$$\sigma^2(t) = (1 - 4A_0^2)t.$$

将这些结果代入 (11) 式, 并利用误差函数的展开表示为

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{15} - \frac{x^7}{35} + \dots \right). \quad (12)$$

立即可以得到

$$S(t | x_0) \approx \frac{x_0 + [1 - (-1)^t] A_0}{\sqrt{1 - 4A_0^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^{-1/2}. \quad (13)$$

该结果与文献 [22] 中的 (13) 式完全一致.

### 3. 复杂自适应系统动力学相变的判定条件

以上建立了依赖于时间的随机行走问题与复杂自适应系统中经纪人“财富值”变化间的对应关系, “初始时位于零点右侧并在经历  $t$  时间后仍然保持在零点右侧的概率”对应于“经纪人时刻仍然存活下来的概率, 简称为存活概率”. 另一方面, 文献 [17, 20] 指出, 当经历一定时间的演化以后, 复杂自适应系统中成员结构的分布可以近似地由存活概率函数来描述. 因此, 我们可以用以上给出的结果讨论复杂自适应系统发生动力学相变的条件.

根据文献 [20] 的讨论可知: 如果系统分布中心向吸收边界漂移, 即

$$v = \frac{d x}{d t} < 0,$$

同时当不同经纪人的胜出概率有不同的波动幅度, 即胜出概率的振幅是其策略值  $g$  的函数, 即

$$A_0 = A(g),$$

则系统的结构将由初始时的均匀态, 经历初期的自组织分离态, 然后再经历所谓的中间态过渡到聚集态. 系统发生由自组织分离态向聚集态的相转变. 在实际模型中, 胜出概率的振幅总是关于基因值  $g = 1/2$  对称的, 因此不失一般性, 我们可以将胜出概率的波动振幅近似表示为

$$A_0 = a + b \left| g - \frac{1}{2} \right|, \quad (14)$$

其中  $a, b$  是两个与  $g$  无关的常数, 但与博彩机制、股市印花税税率、赌场老板的抽头比例等复杂自适应系统的结构有关. 由 (3) (9) 式可得到分布中心的漂移速度为

$$v = \frac{d x}{d t} = -\frac{1}{2} [\overline{I(t)} - \overline{R(t)}] - \varepsilon [\overline{I(t)} + \overline{R(t)}]. \quad (15)$$

从 (14) (15) 式出发, 我们可以给出在  $b \neq 0$  的条件下复杂自适应系统发生动力学相变的一般判据. 这里  $R(t)$  对应于第  $n$  次竞争 (相邻两次竞争之间的时间间隔为一个时间单位) 胜出的经纪人所获得的“收益”,  $I(t)$  对应于第  $n$  次竞争失利的经纪人所受到的“损失”, 它们都是随机变量.

我们分胜出概率和失利概率是否存在对  $1/2$  的净偏离 ( $\varepsilon = 0$ ,  $\varepsilon > 0$  和  $\varepsilon < 0$ ) 的三种情形进行讨论.

**情形 1** 如果长时间内经纪人胜出与失利的机会均等, 胜出概率不存在对  $1/2$  的净偏离, 即  $\varepsilon = 0$ . 由 (15) 式可以看出, 欲使分布中心向吸收边界漂移, 必须有  $\overline{I(t)} > \overline{R(t)}$ . 在此情形下, 只要长期平均收益小于长期平均损失, 系统就会发生动力学相变.

**情形 2** 如果长时间内经纪人失利的机会多于胜出的机会, 即  $\varepsilon > 0$ . 由 (15) 式可以看出, 如果长期平均收益小于或等于长期平均损失 ( $\overline{R(t)} \leq \overline{I(t)}$ ), 此时必有  $v < 0$ , 即系统肯定会引发动力学相变. 即使长期平均收益大于长期平均损失 ( $\overline{R(t)} > \overline{I(t)}$ ), 只要

$$\overline{R(t)} < \frac{1 + 2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon} \overline{I(t)}, \quad (16)$$

此时仍有  $v < 0$ , 也会引发动力学相变.

**情形 3** 如果长时间内经纪人胜出的机会多于失利机会, 即  $\varepsilon < 0$ . 在这种情况下, 如果长期平均收益大于或等于长期平均损失 ( $\overline{R(t)} \geq \overline{I(t)}$ ), 系统肯定不会发生动力学相变. 如果长期平均收益小于长期平均损失 ( $\overline{R(t)} < \overline{I(t)}$ ), 但满足

$$\overline{R(t)} < \frac{1 - 2|\varepsilon|}{1 + 2|\varepsilon|} \overline{I(t)}, \quad (17)$$

此时仍有  $v < 0$ , 系统仍会引发动力学相变.

### 4. 应用举例

考虑抛硬币的游戏. 为简单起见, 假定有  $N$  (任意正整数) 个参与者, 每个参与者均独立地选择硬币出现的正面或反面, 同时规定做出同一选择的人数

较少的一方获胜,每个参与者每失败一次输掉一个单位的货币,  $I(t) \equiv 1$ , 每一次活动组织者从所有猜错者输掉的货币中按参加的总人数抽取一定的抽头(比例为  $\mu$ , 我们称之为损耗系数)后, 剩余部分平均分给猜对的参与者. 设第  $t$  次猜赌, 猜对的人数为  $n_w(t)$  猜错的人数为  $n_l(t)$  则有

$$n_w(t) + n_l(t) = N, \quad (18)$$

$$n_w(t)R(t) + N\mu = n_l(t). \quad (19)$$

显然, 由于  $n_w(t)$  和  $n_l(t)$  都是随机变量, 每个猜对者的收益都为  $R(t)$ , 也是随机变量, 由下式确定:

$$R(t) = \frac{n_l(t) - N\mu}{n_w(t)}$$

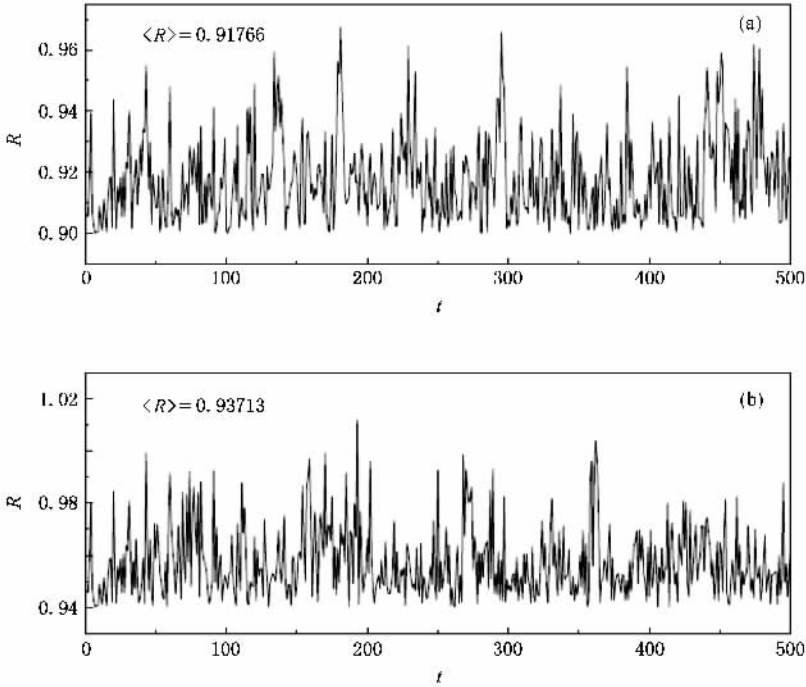


图 1 不同损耗系数时, 收益  $R$  随时间  $t$  的演化 (a)  $\mu = 0.015$  (b)  $\mu = 0.010$

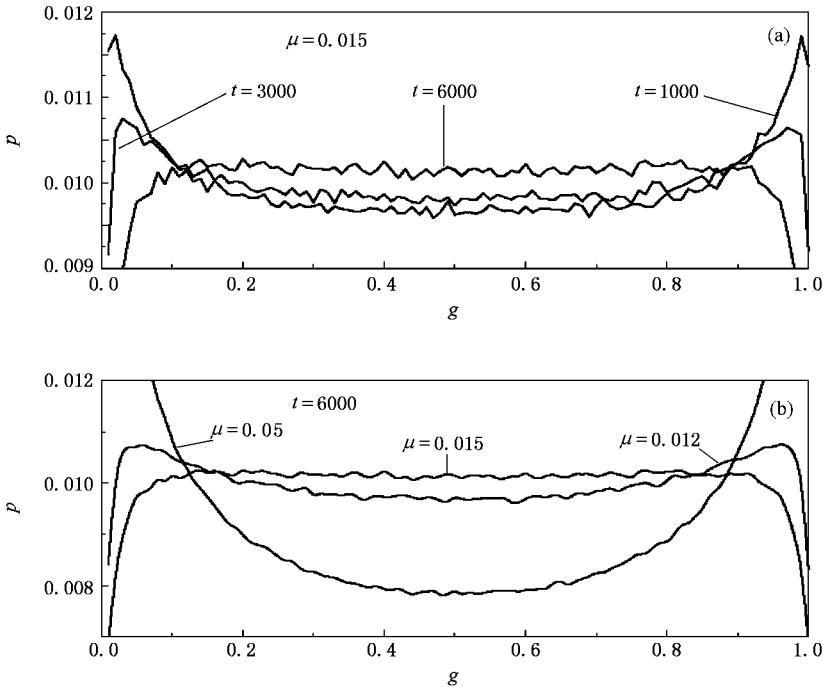


图 2 对于损耗系数  $\mu$  和时间  $t$  不同情况下的系统成员结构分布 (a) 固定损耗系数  $\mu$ 、不同时间  $t$  的情况 (b) 固定时间  $t$ 、不同损耗系数  $\mu$  的情况

$$= \frac{n_i(t) - N\mu}{N - n_i(t)} \quad (20)$$

图 1—图 4 给出了对该模型数值模拟的结果. 图 1 为收益率  $R(t)$  随时间的演化情况, 从中可以看到  $R(t)$  确实是一个随机变量. 而且进一步的模拟还表明, 平均收益率随损耗系数的增大, 近似地呈线性关系减小,

$$\overline{R(t)} = R_0 - \alpha\mu, \quad (21)$$

其中  $R_0$  和  $\alpha$  微弱地依赖于系统大小和观察时间. 对于  $N = 10001$  和  $t = 1000$ , 它们分别为  $R_0 = 1.01399$  和  $\alpha = 1.82459$ .

图 2 给出了对于固定损耗系数  $\mu$ 、不同时间的系统成员结构分布和对于固定时间、不同损耗系数  $\mu$  的系统成员结构分布, 从中可以清楚地看到动力学相变的发生. 为了进一步观察系统成员结构分布随时间的演化, 图 3 给出了系统成员结构分布方差随时间的演化. 从图 3 可以看到, 分布方差从完全随机分布方差  $(\Delta g)^2_0^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0.2887$  出发, 首先经历一段增长期, 然后逐渐减少. 我们知道, 自组织分离态 ( $S_s$ ) 分布的方差  $(\Delta g)^2_s^{1/2}$  大于均匀分布的方差  $(\Delta g)^2_0^{1/2}$ , 均匀分布的方差  $(\Delta g)^2_0^{1/2}$  大于聚集态 ( $S_c$ ) 分布的方差  $(\Delta g)^2_c^{1/2}$ . 图 2 和图 3 表明: 对于较大的损耗系数, 系统由均匀分布状态出发经自组织分离态和中间态  $S_m$  很快转化为聚集态; 对

于较小的损耗系数, 这种转化发生要迟得多.

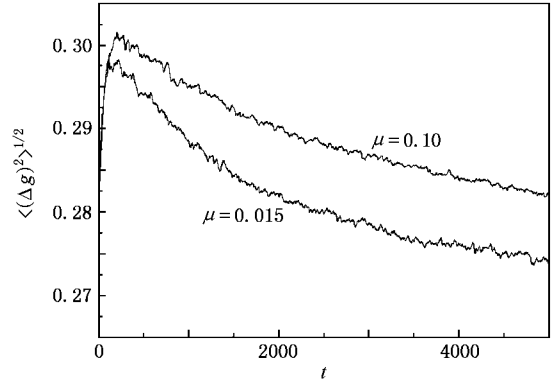


图 3 系统成员结构分布方差  $(\Delta g)^2_0^{1/2}$  随时间  $t$  的演化

为了从理论上分析系统演化和相变的动力学过程, 还进一步模拟了参与者胜出概率随时间的演化情况. 图 4 给出了相同损耗系数条件下, 极端参与者 ( $g = 0.1$ ) 和温和参与者 ( $g = 0.5$ ) 胜出概率  $p(t)$  随时间  $t$  的演化. 从图 4 可以看出, 就此模型而言, 即使是温和参与者 ( $g = 0.5$ ) 的胜出概率也具有一定的波动性, 其振幅可以近似地由 (14) 式表示. 取  $a \approx 0.450$ ,  $b = 0.18$ , 波动周期  $T \approx 8$ . 将这些结果代入 (10) 式, 并利用  $L(t) \equiv 1$ ,  $\epsilon = 0$  及 (4) (5) (13) 和 (21) 式, 容易得到如图 5 所示的动力学相变理论曲线. 图 5 给出了相同时间  $t$ 、不同损耗系数  $\mu$  条件下系统人员结构分布相变的理论曲线, 同时也给出了

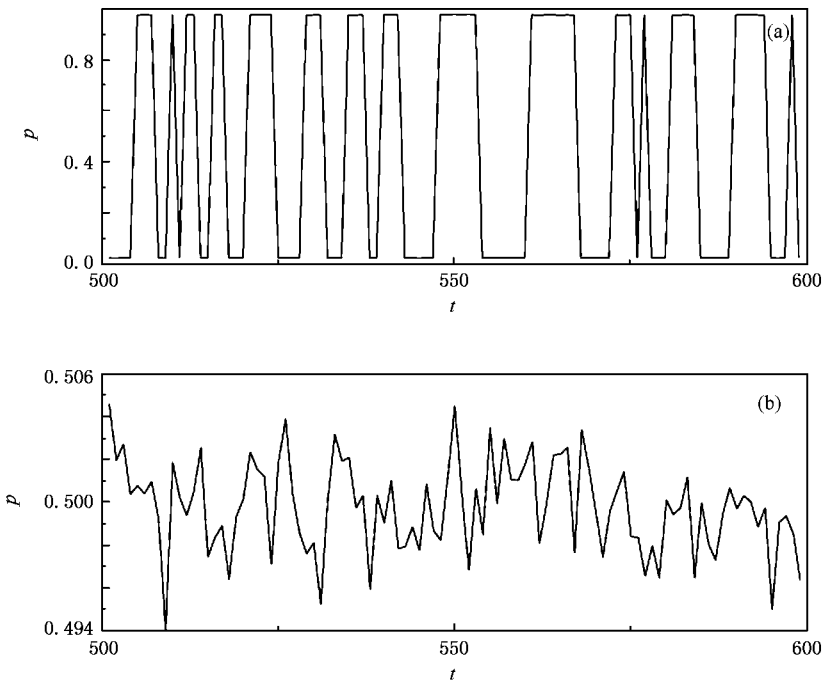


图 4 胜出概率  $p(t)$  随时间  $t$  的演化 (a)  $g = 0.1$  (b)  $g = 0.5$

相同损耗系数  $\mu$ 、不同时间  $t$  条件下系统人员结构分布相变的理论曲线.

比较图 2 与图 5 可以发现,理论结果与数值模拟结果符合很好.

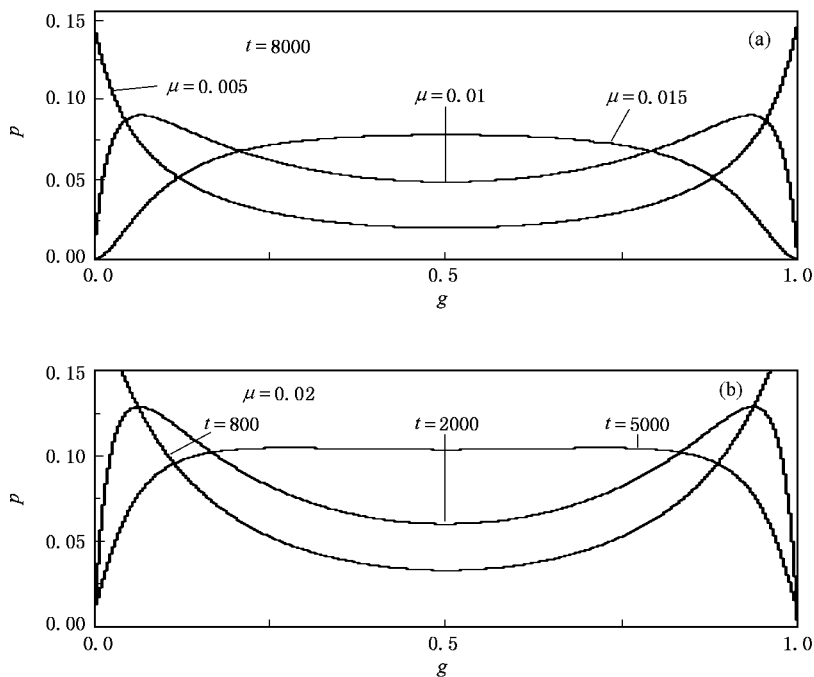


图 5 对于损耗系数  $\mu$  和时间  $t$  不同情况下的系统成员结构分布相变的理论曲线  
(a) 相同时间  $t$ 、不同损耗系数  $\mu$  的情况 (b) 相同损耗系数  $\mu$ 、不同时间  $t$  的情况

## 5. 结 论

本文建立了描述复杂自适应系统动力学过程及其相变的一般理论,将此前建立的仅适用于描述资源竞争过程中每次“输赢”固定的复杂自适应系统的动力学演化及相变理论,推广到可以描述资源竞争过程中每次“输赢”都随机的复杂自适应系统的动力学演化及相变理论,揭示了复杂自适应系统动力学

相变的物理机制,解释了复杂自适应动力学发生相变的物理起源.持不同策略经纪人的财富分布具有不同的扩散速度和“损耗”引起经纪人平均财富减少,给出了不同情形下复杂自适应系统发生动力学相变的判定条件,建立了更一般的复杂自适应系统模型.作为一般理论的应用,给出了抛硬币游戏的策略演化模型和策略分布的演化动力学及其相变,并进行了数值模拟.数值模拟结果与理论结果进行了对比,两者完全一致.

- [ 1 ] Holland J H 1992 *Hidden Order : How Adaptivity Builds Complexity* ( Menlo Park : Addison-Wesley )
- [ 2 ] Bak P ,Paczuski M ,Shubik M 1997 *Physica A* **246** 430
- [ 3 ] Amaral L A N ,Buldyrev S V ,Halvin S ,Salinger M A ,Stanley H E 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 1385
- [ 4 ] Huberman B ,Lukose R 1997 *Science* **277** 535
- [ 5 ] Nowark M A ,May R M 1992 *Nature* **359** 826
- [ 6 ] Challet D ,Zhang Y C 1997 *Physica A* **246** 407
- [ 7 ] Challet D ,Zhang Y C 1998 *Physica A* **256** 514
- [ 8 ] Johnson N F ,Jarvis S ,Jonson R ,Cheung P ,Kwong Y R ,Hui P M 1998 *Physica A* **258** 230
- [ 9 ] D 'hulst R ,Rodgers G J 1999 *Physica A* **270** 514
- [ 10 ] Savit R ,Manuca R ,Riolo R 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2203
- [ 11 ] Ceva H 2000 *Physica A* **277** 496
- [ 12 ] Burgos E ,Ceva H 2000 *Physica A* **284** 478
- [ 13 ] Sysi-Aho M ,Chakrabort A ,Kaski K 2004 *Phys. Rev. E* **69** 036125
- [ 14 ] Sysi-Aho M ,Chakrabort A ,Kaski K 2003 *Physica A* **322** 701
- [ 15 ] Johnson N F ,Hui P M ,Jonson R ,Lo T S 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 3360
- [ 16 ] Lo T S ,Hui P M ,Johnson N F 2000 *Phys. Rev. E* **62** 4393
- [ 17 ] Va 'zquez A 2000 *Phys. Rev. E* **62** R4497
- [ 18 ] Hod S ,Nakar E 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 238702
- [ 19 ] Nakar E ,Hod S 2003 *Phys. Rev. E* **67** 016109
- [ 20 ] Xu B Z ,Jun G J ,Ma Y Q 2005 *Phys. Rev. E* **71** 026107

- [ 21 ] Weiss G H 1994 *Aspect and Application of the Random Walk* [ 22 ] Hod S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 128701  
( Amsterdam : North Holland )

## The general theory of the kinetic evolution and phase transition of complex adaptive systems<sup>\*</sup>

Xu Bing-Zhen<sup>†</sup>

( *Institute of Theoretical Physics , Ningbo University , Ningbo 315211 , China* )

( Received 3 March 2007 ; revised manuscript received 11 September 2007 )

### Abstract

A new model of the complex adaptive systems is established , and the theory developed by the author on the kinetic evolution and phase transition of complex adaptive systems is extended to the general case , with which some more realistic complex adaptive systems may be described . As an application of the new model , we compare the simulation results of winning the toss with the corresponding theoretical one given in this paper . The theoretical results turn out to be in good accordance with the simulation .

**Keywords** : complex adaptive system , self-segregation , cluster , kinetics phase transition

**PACC** : 0175 , 0520

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China ( Grant Nos. 10647135 , 10774080 ).

<sup>†</sup> E-mail : xubingzhen@nbu.edu.cn