

费米环境中两个三能级原子系统的纠缠演化*

马小三^{1,2)} 王安民¹⁾

1) 中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

2) 安徽工业大学电气信息学院, 马鞍山 243002)

(2007 年 4 月 25 日收到, 2007 年 11 月 29 日收到修改稿)

利用负性纠缠度(negativity)研究了两个三能级原子系统在费米环境中的纠缠演化问题. 结果表明, 两个三能级原子系统的纠缠演化不仅依赖于系统和环境的相互作用强度, 而且还依赖于系统所处的具体量子态. 通过例子发现, 系统和环境相互作用强度越大, 纠缠衰减越快. 对于纯态, 仅当时间趋于无穷时纠缠才被完全破坏; 对于混态, 则在有限的时间内纠缠即被彻底破坏. 通过一般的分析找到了一类免退相干的量子子空间. 在这些子空间中, 量子态不受环境的影响, 故其纠缠不变. 研究有助于理解费米环境造成的退相干对玻色系统纠缠的影响.

关键词: 费米环境, 纠缠演化, 两个三能级原子

PACC: 0367, 0365

1. 引言

作为一种资源, 量子纠缠在量子计算和量子信息处理中具有重要的作用. 无论在理论方面还是在实验方面, 研究人员对量子纠缠都作了大量探讨^[1-5]. 量子纠缠所要研究的问题很多, 其中一个基本的问题是纠缠度量. Wootters^[5]在 1998 年给出了一个很好的纠缠度量——共生纠缠度(concurrence), 但是共生纠缠度只适用于 2×2 系统. 对于多方高维系统, 纠缠度量还缺乏很好的理解. 2002 年, Vidal 等^[6]提出用负性纠缠度(negativity)来度量纠缠. 负性纠缠度作为纠缠度量具有很好的可计算性和可操作性, 它不仅适用于量子纯态, 而且也适用于混态. 利用负性纠缠度能够对任意高维系统的两分纠缠(量子关联)进行度量.

在实际的量子信息处理过程中, 系统不可避免地与环境发生相互作用, 从而造成系统的量子相干性破坏或量子态的塌缩, 这种现象在量子力学中被称为量子退相干^[7-13]. 文献[10]对量子退相干的本质问题作了深入探讨, 研究了一个两能级系统在费米环境中的量子退相干问题. 由于量子退相干, 量子纠缠会发生变化, 故研究量子退相干对量子纠缠的影响是一个有意义的问题, 通常称之为纠缠动力

学^[14-20]. 纠缠动力学的研究有助于理解量子退相干在量子信息处理过程中对量子信息的影响. 两个三能级原子系统在量子信息处理中具有重要的作用, 并受到了广泛关注^[21-24]. 研究两个三能级原子系统在费米环境中的纠缠动力学具有重要意义. 本文对文献[10]的模型作了相应的修改, 修改后模型的哈密顿量为

$$H_1 = \xi_{12} S_z^1 S_z^2 + (S_z^1 + S_z^2) \otimes \sum_{i=k}^N g_k \sigma_z^k. \quad (1)$$

为了简单起见, 忽略了系统和环境的自身哈密顿量. 由于相互作用哈密顿量导致了量子系统的退相干, 故相互作用哈密顿量是关注的重点. 在修改的模型中, ξ_{12} 是系统的两个三能级原子耦合常数; g_k 是环境自由度的能级; σ_z^k 是泡利矩阵的 z 方向分量, 表示作用于环境第 k 个自旋算符且通过 g_k 和系统发生相互作用, S_z^1, S_z^2 分别为两个三能级系统的算符, 它们的形式如下:

$$S_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

所考虑的模型在物理上可以认为是两个自旋为 1 的粒子和一个自由度为 N 的费米环境相互作用的模型, 因此称之为玻色系统在费米子环境中的退相干模型. 正如文献[10]所指出, 这样的模型在测量框架

* 国家自然科学基金(批准号: 60573008)资助的课题.

下对显示量子退相干的本质特别有用. 本文研究两个三能级原子系统在系统-环境相互作用下的纠缠动力学, 这对于理解量子纠缠演化进而理解量子信息处理过程中的退相干具有很好的意义.

2. 密度矩阵的演化

假设两个三能级原子系统和环境组成的整体处于量子态

$$|\psi_{\text{sc}}(0)\rangle = |\psi_s(0)\rangle \otimes \sum_{n=0}^{2^N-1} c_n |n\rangle, \quad (3)$$

其中

$$|\psi_s(0)\rangle = a_1 |00\rangle + a_2 |01\rangle + a_3 |02\rangle + a_4 |10\rangle + a_5 |11\rangle + a_6 |12\rangle + a_7 |20\rangle + a_8 |21\rangle + a_9 |22\rangle,$$

且 $a_i (i=1, \dots, 9)$ 满足量子态的归一化关系

$$\sum_{i=1}^9 |a_i|^2 = 1;$$

$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ 是三能级系统算符 S_z 的本征态, 相应的本征值分别为 $1, 0, -1$; $|n\rangle$ 为环境的基. 注意到二进制数 n 的第 k 个数字为 n_k 表示环境自旋 k 在 z 方向是向上还是向下, 环境量子态满足归一化关系

$$\sum_n |c_n|^2 = 1.$$

在任意时间 t 时, 量子态的演化如下:

$$|\psi_{\text{sc}}(t)\rangle = \sum_{\alpha=1}^9 \sum_{n=0}^{2^N-1} c_n a_\alpha |\alpha\rangle |n\rangle \times \exp(-i\xi_{12}^\alpha t) \exp(-i c_\alpha B_n t), \quad (4)$$

其中系统初始态标记为 $|\alpha\rangle$, 且有

$$\xi_{12} S_z^1 S_z^1 |\alpha\rangle = \xi_{12}^\alpha |\alpha\rangle;$$

a_α, c_α 是依赖于 α 而变化的参数. 对环境的自由度求迹得到系统的约化密度矩阵

$$\rho_s(t) = \text{tr}_e(|\psi_{\text{sc}}(t)\rangle \langle \psi_{\text{sc}}(t)|). \quad (5)$$

约化密度矩阵的形式如下:

$$\rho_s(t) = \sum_{\alpha, \beta=1}^9 a_\alpha a_\beta^* \exp[-i(\xi_{12}^\alpha - \xi_{12}^\beta)t] \times |\alpha\rangle \langle \beta| R_{\alpha\beta}(t),$$

其中

$$R_{\alpha\beta}(t) = \sum_{n=1}^{2^N-1} |c_n|^2 \exp[-i(c_\alpha - c_\beta)B_n t],$$

$$B_n = \sum_{k=1}^N (-1)^{n_k} g_k.$$

$R_{\alpha\beta}(t)$ 为退相干因子, 计算出 $R_{\alpha\beta}(t)$, 则得到系统约

化密度矩阵的解析形式. 现在用文献 [10] 的处理方法来求出退相干因子, 退相干因子可以表示为

$$R_{\alpha\beta}(t) = \int \exp[-i(c_\alpha - c_\beta)B] \gamma(B) \mathcal{D}B, \quad (6)$$

即退相干因子是特征函数 $\gamma(B)$ 的一个傅里叶变换, 而特征函数则定义为

$$\gamma(B) = \sum_{n=1}^{2^N-1} |c_n|^2 \chi(B - B_n). \quad (7)$$

考虑一般情形, 即设定初态为

$$|\psi_{\text{sc}}(0)\rangle = |\psi_s(0)\rangle \bigotimes_{k=1}^N (\lambda_k |0\rangle_k + \gamma_k |1\rangle_k) \quad (8)$$

采用随机游走图景来描述相关内容. 由于方程 (1) 有不同的 g_k , 所以设定一个子集 $\{g_k\}$. 在一个给定游走过程中, g_k 只取一次, 这样一共有 2^N 不同的随机游走过程 W_n . 每一个游走过程和环境的态 $|n\rangle$ 对应, 且贡献于 $\gamma(B)$ 的大小是由概率 $|\lambda_k|^2, |\gamma_k|^2$ 的直积得到, 即每一步的权重为

$$|c_n|^2 = \left(\prod_{k \in W_n^+} |\lambda_k|^2 \right) \left(\prod_{k \in W_n^-} |\gamma_k|^2 \right).$$

利用 Lindeberg 条件 [10, 25], 即

$$s_N^2 = \sum b_k^2$$

是有限的, 则得到特征函数为

$$\gamma(B) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi s_N^2}} \exp\left(-\frac{B - \bar{B}_N}{2s_N^2}\right). \quad (9)$$

定义

$$\bar{B}_N = \sum_k (|\lambda_k|^2 - |\gamma_k|^2) g_k,$$

$$b_k^2 = 4|\lambda_k|^2 |\gamma_k|^2 g_k^2.$$

将 (9) 式代入 (6) 式, 得到退相干因子

$$R_{\alpha\beta}(t) = \exp[-i\bar{B}_N(c_\alpha - c_\beta)t] \times \exp\left[-\frac{(c_\alpha - c_\beta)^2 s_N^2 t^2}{2}\right]. \quad (10)$$

利用退相干因子, 密度矩阵就能够完全表示出来. 显然, 当 $c_\alpha = c_\beta$ 时, 退相干因子仅为一个相位, 因而不会影响量子态的振幅.

3. 纠缠演化和退相干

根据 Peres [26] 的可分性判据, Vidal 等在文献 [6] 中提出了负性纠缠度作为纠缠度量. 负性纠缠度具有较好的可计算性和可操作性, 它不仅能够度量纯态的纠缠, 而且可以度量混态纠缠. 对于一个给定的量子态 ρ_s , 其负性纠缠度定义为

$$N(\rho_s) = \frac{\|\rho_s^{T_i}\| - 1}{2}, \quad (11)$$

其中 $\rho_s^{T_i}$ 是矩阵 ρ_s 相对于 i 方的部分转置. $\|\rho_s^{T_i}\|$ 表示为部分转置矩阵 $\rho_s^{T_i}$ 的本征值的绝对值之和, 故负性纠缠度是部分转置矩阵 $\rho_s^{T_i}$ 的负本征值的绝对值之和. 对于两个三能级原子体系, 通过对两个原子任何一方作部分转置即求出两个原子之间的纠缠. 由于环境导致的退相干, 量子态的纯度必然减少. 线性熵作为纯度的函数能够用来度量退相干对量子态的影响. 在本文中, 我们通过考虑两个三能级原子系统量子态的线性熵演化找出不受退相干影响的免退相干量子子空间. 线性熵的定义如下:

$$S(\rho_s) = 1 - \text{tr}(\rho_s^2), \quad (12)$$

当 $c_\alpha = c_\beta$ 时, $S(\rho_s(t)) = S(\rho_s(0))$, 即得到了免退相干子空间满足的条件. 一般而言, 通过一些具体的例子可以直观地理解量子退相干对量子纠缠和量子相干性的影响(图 1、图 2).

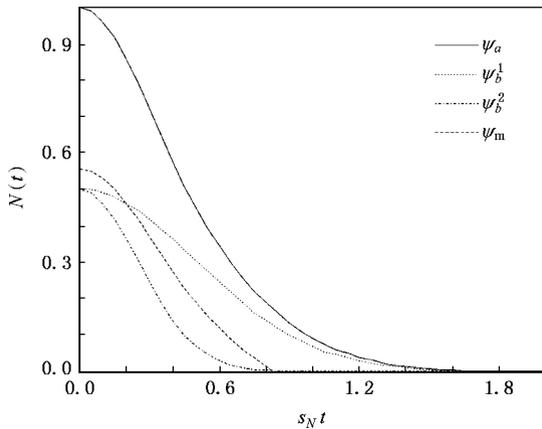


图 1 不同量子态在环境作用下的纠缠演化 混态 ψ_m 中 $p = 1/3$

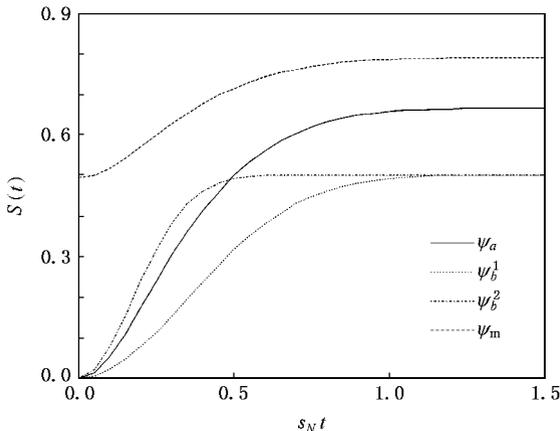


图 2 线性熵随时间的变化趋势 混态 ψ_m 中 $p = 1/3$

例 1 令两个三能级原子的初始态为

$$|\psi_s(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|00\rangle + |11\rangle + |22\rangle).$$

标记该初始态为 ψ_a . 系统的初始态 ψ_a 为一个纠缠态且纠缠度为 1, 它的缠演化为

$$N(\rho_a) = \frac{2}{3} \exp(-2s_N^2 t^2) + \frac{1}{3} \exp(-8s_N^2 t^2). \quad (13)$$

显然纠缠随时间而减少, 仅当时间趋于无穷时纠缠才衰减为零. 该量子态的线性熵

$$S(\rho_a) = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} \exp(-4s_N^2 t^2) - \frac{2}{9} \exp(-16s_N^2 t^2). \quad (14)$$

在初始时刻 $t = 0$ 时线性熵为零, 表明该量子态为纯态. 线性熵随时间而不断增加, 这意味着量子态的纯度不断变小, 而态的混合程度不断加大. 纯度的减小正是环境的退相干导致的. 当时间趋于无穷时量子态变成经典态. 从方程 (13) (14) 不难看出纠缠减少的过程和线性熵增加的过程从某种程度上可以认为是同一过程, 但是这两个过程在本质上是不同的, 因为它们代表了不同的物理量.

例 2 考虑两个量子态 ψ_b^1, ψ_b^2 , 其具体形式为

$$\psi_b^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

$$\psi_b^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |22\rangle).$$

它们的纠缠度同为 0.5, 且纠缠演化形式分别为

$$N(\rho_b^1) = \frac{1}{2} \exp(-2s_N^2 t^2), \quad (15)$$

$$N(\rho_b^2) = \frac{1}{2} \exp(-8s_N^2 t^2).$$

显然, 它们的纠缠演化是不同的. 这表明, 即使量子态的初始纠缠度相同, 由于量子态的结构不同, 它们的纠缠演化是不同的, 即量子纠缠演化不仅依赖于环境, 而且还依赖于量子态的结构. 这两个量子态的线性熵为

$$S(\rho_b^1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-4s_N^2 t^2), \quad (16)$$

$$S(\rho_b^2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \exp(-16s_N^2 t^2).$$

可以看出这两个纯态的演化规律同例 1 中的情形类似, 仅当时间趋于无穷时其相应的纠缠和相干性才能够彻底地被环境破坏.

例 3 除了纯态情形, 混态情形也需要考虑. 这

里我们设定初始态具有形式

$$\phi_m = \frac{pI_{9 \times 9}}{9} + (1-p)|\phi_a \phi_a\rangle,$$

其中 ϕ_a 为例 1 情形中的纯态; p 为参数, 其取值为 $0 \sim 1$, 它表示白色噪声的大小. 当

$$\frac{p}{9} \leq \frac{1-p}{3} \exp(-8s_N^2 t^2)$$

时, 该混态纠缠演化为

$$\begin{aligned} N(\rho_m) &= \frac{2-2p}{3} \exp(-2s_N^2 t^2) \\ &+ \frac{1-p}{3} \exp(-8s_N^2 t^2) - \frac{p}{3}; \quad (17a) \end{aligned}$$

当

$$\frac{1-p}{3} \exp(-8s_N^2 t^2) \leq \frac{p}{9} \leq \frac{1-p}{3} \exp(-2s_N^2 t^2)$$

时, 该混态纠缠演化为

$$N(\rho_m) = \frac{2-2p}{3} \exp(-2s_N^2 t^2); \quad (17b)$$

当

$$\frac{p}{9} \geq \frac{1-p}{3} \exp(-2s_N^2 t^2)$$

时, 该混态纠缠演化为

$$N(\rho_m) = 0. \quad (17c)$$

与纯态的纠缠演化相比, 混态纠缠演化要复杂一些. 结果表明, 只要存在任何一点的白色噪声, 纠缠即会在一个有限的时间内消失, 这个现象被称为纠缠突然消亡^[27]. 混态的线性熵为

$$\begin{aligned} S(\rho_m) &= \frac{6-2p^2+4p}{9} - \frac{\chi(1-p)^2}{9} \\ &\times [2\exp(-4s_N^2 t^2) + \exp(-16s_N^2 t^2)]. \quad (18) \end{aligned}$$

通过例子不难发现, 纯态的纠缠演化不同于混态. 对于纯态, 仅当时间趋于无穷时纠缠才能够被彻底破坏; 对于混态, 在有限时间内其纠缠即被彻底破坏. 此外, 不同量子态的纠缠演化是不同的, 即使它们的初始纠缠相同.

具体的例子在一定程度上能够揭示量子态的纠缠演化特性, 但不能给出一般情形下的量子纠缠

演化特点. 如上所述, 当 $c_a = c_b$ 时,

$$S(\rho_s(t)) = S(\rho_s(0)).$$

利用这个条件可以找到免退相干子空间. 现在标记这样的免退相干子空间为 S_{DF} , 它是由元素 $|00 \ 00\rangle, |01 \ 01\rangle, |02 \ 02\rangle, |10 \ 10\rangle, |11 \ 11\rangle, |12 \ 12\rangle, |20 \ 20\rangle, |21 \ 21\rangle, |22 \ 22\rangle, |01 \ 10\rangle, |02 \ 20\rangle, |12 \ 21\rangle, |10 \ 01\rangle, |20 \ 02\rangle, |21 \ 12\rangle$ 组成的一个线性空间. 任何只能够被上述元素展开的密度矩阵都不会受环境的影响, 故这样的密度矩阵所代表的量子态是免退相干的, 因而其纠缠保持不变. 例如, 系统的初始态为

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),$$

它的密度矩阵只能够被 S_{DF} 中的元素展开, 因而其相干性和纠缠都保持不变, 这样的量子态被称为免退相干量子态. 同理, 任何不能够被上述元素展开的密度矩阵都要受到环境的影响, 其相干性会丢失, 因而纠缠也发生相应的改变.

4. 结 论

利用负性纠缠度研究了两个三能级原子系统在一个费米子环境中的纠缠演化问题. 结果表明, 纠缠演化不仅依赖于系统-环境相互作用的强度, 而且还依赖于量子态的结构. 由于受到环境造成的退相干, 量子态中的真空噪声加速了量子纠缠的衰减. 通过对度量退相干程度的物理量——线性熵的计算, 得到了免退相干子空间 S_{DF} . 任何只能够被 S_{DF} 中的元素展开的密度矩阵不受环境的影响, 故其相干性和纠缠保持不变. 而不能被免退相干子空间 S_{DF} 中的元素展开的密度矩阵, 其相干性会被环境破坏, 纠缠也发生相应的改变. 本文的研究结果有助于理解玻色系统在费米环境中的纠缠演化行为, 并且能够推广到多方高维系统.

- [1] Bennett C H, Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2281
 [2] Nielsen M A, Chuang I L 2000 *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambridge: Cambridge University Press)
 [3] Buzek V, Hillery M 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1844
 [4] Pan J W, Bouwmeester D, Daniell M, Weinfurter H, Zeilinger A 2000 *Nature* **403** 515

- [5] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
 [6] Vidal G, Werner R F 2002 *Phys. Rev. A* **65** 032314
 [7] Zurek W H 2003 *Rev. Mod. Phys.* **75** 715
 [8] Duan L M, Guo G C 1998 *Phys. Rev. A* **57** 737
 [9] Lidar D A, Chuang I L, Whaley K B 1998 *Phys. Rev. Lett.* **81** 2594

- [10] Cucchietti F M ,Paz J P ,Zurek W H 2005 *Phys. Rev. A* **72** 052113
- [11] Cao S ,Fang M F 2006 *Chin. Phys.* **15** 60
- [12] Xiang S H ,Song K H 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 529 (in Chinese)
[向少华、宋克慧 2006 物理学报 **55** 529]
- [13] Zheng S B 2004 *Chin. Phys.* **13** 1707
- [14] Zeng K ,Fang M F 2005 *Chin. Phys.* **14** 2009
- [15] Tan H T ,Xia H X ,Li G X 2005 *Chin. Phys.* **14** 1382
- [16] Zhou Q C ,Zhu S N 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 2043 (in Chinese)
[周青春、祝世宁 2005 物理学报 **54** 2043]
- [17] Liu T K ,Wang J S ,Feng J ,Zhan M S 2005 *Chin. Phys.* **14** 536
- [18] Song J ,Cao Z L 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 696 (in Chinese)
[宋 军、曹卓量 2005 物理学报 **54** 696]
- [19] Liu J M ,Li J , Guo G C 2002 *Chin. Phys.* **11** 339
- [20] Shan C J ,Xia Y J 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2687 (in Chinese) [单
传家、夏云杰 2003 物理学报 **52** 2687]
- [21] Klimov A B ,Guzman R ,Retamal J C ,Saavedra C 2003 *Phys. Rev. A* **67** 062313
- [22] Molina-Terriza G ,Vaziri A ,Rehacek J ,Hradil Z ,Zeilinger A 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 167903
- [23] Kaszlikowski D ,Oi D K L ,Christandl M ,Chang K ,Ekert A ,Kwek L C ,Oh C H 2003 *Phys. Rev. A* **67** 012310
- [24] Bogdanov Y I ,Chekhova M V ,Krivitsky L A ,Kulik S P ,Penin A N , Zhukov A A ,Kwek L C ,Oh C H ,Tey M K 2004 *Phys. Rev. A* **70** 042303
- [25] Gnedenko B V 1968 *The Theory of Probability* (4th ed) (New York : Chelsea) Chapt VIII
- [26] Peres A 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 1413
- [27] Muhammed Y ,Yu T ,Eberly J H 2006 *J. Phys. B : Mol. Opt. Phys.* **39** S621

Entanglement evolution of two three-level atoms in a fermionic environment^{*}

Ma Xiao-San^{1,2)} Wang An-Min¹⁾

1 *Department of Modern Physics ,University of Science and Technology of China ,Hefei 230026 ,China)*

2 *School of Electric Engineering and Information ,Anhui University of Technology ,Ma'anshan 243002 ,China)*

(Received 25 April 2007 ; revised manuscript received 29 November 2007)

Abstract

We study the entanglement evolution of two three-level atoms in a fermionic environment. Our results show that the entanglement evolution depends not only on the strength of the interaction between the system and environment , but also on the structure of states. For the cases of concern , we find that the stronger the interaction between the system and environment is , the faster the entanglement of the system decreases. The entanglement of pure quantum states vanishes completely when the time goes to infinity ; while for the mixed state ,the entanglement will be completely destroyed by decoherence in finite time. The decoherence-free subspace S_{DF} has been identified by using linear entropy to measure decoherence. A density matrix that only can be expanded by the elements of S_{DF} does not perceive the presence of the environment and the entanglement and its linear entropy remain unchangeable. Our analysis will shed some light on the effect of a fermionic environment on the entanglement of bosonic systems.

Keywords : fermionic environment , entanglement evolution , two three-level atoms

PACC : 0367 , 0365

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 60573008).